

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Zweiter Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln und zwei Holzschnitten.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.
1842.

Inhaltsverzeichniss des zweiten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Optik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

De potestatum periodis, radicibus primitivis residuisque quadraticis.

Auctore

C. F. Arndt

math. stud. in Universitate litteraria Gryphiswaldensi.

Quoniam in disquirendis rebus, quae ad numerorum spectant doctrinam, occupatus forte detexi, de residuis quadraticis theoremata simillima iis exstare, quae de potestatum periodis radicibusque primitivis per virum clariss. Gauss in lucem prodierunt, ut videre licet in ejus Disquis. Arithm. pag. 73 sqq., finem in sequentibus mihi proposui, ut arctissimum horum theorematum vinculum, quatenus fieri possit patefaciam. Quaerenti mihi in hac arena etiam nota se obtulit, ex qua facillime dijudicari possit, utrum in congruentia

$$1.2.3.4\ldots.\tfrac{1}{2}(p-1)\equiv\pm1(\mathrm{mod}.p)$$

designante p numerum primum formae $4n+3$, signo superiore utendum sit an inferiore. Quodsi vituperes, quod praeter nova etiam satis nota receperim, tamen novis adhibitis plerumque demonstrandi methodis studioque rem ita instituendi ut latius pateant theoremata, excusatum me esse velim. Sed longiores sumus quam necesse est et ne verbis solum attingamus ea quae volumus ostendere, ad rem ipsam veniamus. Initium autem faciendum erit cum propositione jam ab Euclide inventa et in doctrina numerorum haud dubie memoratu dignissima.

A. De numeris primis in universum agitur.

§. 1. **Numerus quicunque primus qui neque unum neque alterum duorum numerorum metitur etiam productum horum non metietur.**

Demonstratio. Ut demonstrandi methodus latius pateat, assumamus utrumque numerum datum numero dato primo esse majorem, et designemus numeros datos per a, b, numerum primum per p. Residua illorum ex divisione per p relicta sint α, β, ita ut eos hoc modo liceat exhiberi $a=mp+\alpha$, $b=np+\beta$, ubi uterque α, β minor quam p atque m, n sunt integri. Productum igitur ab for-

aut $3p$,.... aut $(p'-1)p$. In priori casu $\frac{p}{p'}$ esset numerus integer q. e. a. quia p non est p' atque p primus. In secundo casu haberetur numerus integer $\frac{2p}{p'}$ contra 1. vel supp., in tertio, quarto, quinto, etc. casu numeri $\frac{3p}{p'}, \frac{4p}{p'}, \frac{5p}{p'}, \ldots \frac{(p'-1)p}{p'}$ essent integri contra ea, quae statuimus. Hinc sequitur si theorema valeat usque ad productum $p''\beta$ etiam pro producto $N.\beta$ verum esse designante N numer. quencunque inter p'' et p' nec minus pro $p'\beta$ ita ut inter p'' et p' numerus non exstet primus.

Jam vero propositionem demonstravimus pro productis 2β, 3β, 4β, 5β; ergo (5) valebit pro 6β et 7β, hinc pro 8β, 9β, 10β et 11β, hinc pro 12β et 13β, ex quo sequitur veram eam esse pro producto $\alpha\beta$.

Aliam et quidem simplicissimam demonstrationem videre licet in Disq. Arithmet.

§. 2. Duorum numerorum productum, quorum uterque ad numerum quencunque p est primus, ipse hic non metitur.

Resolvatur p in factores duos p' et q quorum unus p' sit numerus primus ita ut habeatur $p=p'q$. Quodsi productum numerorum datorum quos a, b vocemus, per p divisibile esset, etiam per p' manifesto dividi posset. Ipse p' autem nullum horum a, b metietur, nam si ex. gr. a esset multiplum hujus primi p', ipse p' quum a tum p metiretur, quo facto a et p divisorem communem haberent contra hyp. Ergo primus p' neque a neque b metietur neque igitur productum (§. 1.), quam ob rem ab per p non erit divisibile.

Coroll. 1. Si quisque numerorum a, b, c, d... ad num. quencunque p est primus, hic ipse productum $abcd$.. non metietur. Nam propositio valet pro ab, hinc pro abc, hinc pro $abcd$... ergo universim.

Coroll. 2. Etiam potestas aliqua puta a^k cujus exponens numerus integer positivus, per numerum quencunque p ad a primum divisibilis esse nequit.

§. 3. Quando p ad a, b, c,... est primus productumque $abc \ldots Z$ per p divisibile est, Z per p divisibilem esse oportet.

Resolvatur p in factores primos aequales inter se vel diversos hoc modo p', p'', p''', p^{IV}, quorum multitudo ex. gr. sit 4. Quia $abc \ldots Z$ per p, ergo per p' divisibilis est p' hujus producti factorem Z metiri debet (§. 1.); si enim Z non metiretur etiam $abc \ldots Z$ metiri non posset. Qua re poni licet $Z=p'Z'$ eritque $\frac{abc \ldots Z}{p}$ $=\frac{abc \ldots Z'}{p''p'''p^{IV}}$ numerus integer. Sequitur productum $abc \ldots Z'$ per p'' divisibile esse, ergo etiam Z' (§. 1.) ita ut poni liceat $Z'=p''Z''$, eritque $\frac{abc \ldots Z}{p}=\frac{abc \ldots Z''}{p'''p^{IV}}$ numerus integer. Quia igitur $abc \ldots Z''$ ipse num. $p'''p^{IV}$ metitur, etiam p''' hoc productum metietur, quam ob rem poni licet $Z''=p'''Z'''$ eritque $\frac{abc \ldots Z}{p}=\frac{abc \ldots Z'''}{p^{IV}}$ numerus integer. Ponamus denique, quia Z''' per p^{IV} dividi potest, $Z'''=p^{IV}Z^{IV}$ habebimusque per substitutionem $Z=p'Z'=p'p''Z''$

ad m est primum etiam haec locum habebit congruentia

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \text{ (mod. } m).$$

Ex 3. sequitur $ad \equiv bc$, quo facto differentia $ad - bc$ tanquam per m divisibilis forma exhibetur km; tum erit $\frac{ad-bc}{cd} = \frac{km}{cd}$ vel $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{km}{cd}$.

Jam vero cd ad m est primus, ergo (§. 3.) k per cd erit divisibilis atque $\frac{k}{cd}$ integer, quam ob rem $\frac{a}{c} - \frac{b}{d}$ multiplum erit ipsius m i. e. $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d}$ (mod. m).

§. 6. Numerus indeterminatus x ita semper potest determinari ut expressio $ax + b$ secundum modulum m ad a primum cuivis numero fiat congrua vel quod idem valet congruentia $ax + b \equiv c$ (mod. m) semper poterit resolvi, si quidem m ad a est primus.

Consideremus producta haec

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots (m-1)a.$$

Quum a ad m sit primus nullum horum productorum per m erit divisibile; nam si quodcunque illorum ka ($k < m$) ipse m metiretur etiam k per m divisibilis esset, quod fieri nequit (§. 3.). Et quidem omnia producta sunt sec. m incongrua. Si enim duo quaelibet per ka, $k'a$ designamus ita ut $k < m$, $k' < m$, differentiam $ka - k'a = (k - k')a$ ipsum m metiri oporteret, ergo $(k - k')$ (§. 3.) quod fieri nequit. Horum igitur productorum residua minima ex divisione eorum per m relicta erunt ordine neglecto haec

$$1, 2, 3, 4, \ldots m-1.$$

Jam vero differentiae $c - b$ residuum minimum positivum inter illa residua oportet inveniri, quam ob rem $c - b$ alicui productorum, de quibus agitur, congrua erit. Sit hoc productum ka eritque

$$ka \equiv c - b \text{ vel } ka + b \equiv c \text{ (mod. } m).$$

Coroll. Quando a et m divisorem comm. habent maximum δ congruentiae $ax + b \equiv c$ (mod. m) satisfieri nequit nisi $c - b$ per δ est divisibilis. Nam quum congruentiam hanc pro modulo δ non minus quam pro modulo m oporteat locum habere, numerus $c - b$ per δ erit divisibilis. Ceterum si resolvi potest ad aliam reducitur

$$\frac{ax}{\delta} \equiv \frac{c-b}{\delta} \text{ (mod. } \frac{m}{\delta})$$

in qua $\frac{a}{\delta}$ ad modulum $\frac{m}{\delta}$ est numerus primus.

§. 7. Quando p est numerus primus numerum A non metiens plures quam n secundum modulum p valores incongrui variabilis x non exstant, qui congruentiae

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{ etc. } + Mx + N \equiv 0$$

secundum eundem mod. satisfaciant.

1. Si n unitati aequivalet propositio nostra ex paragr. praeced. illico sequitur.

2. Si vero n unitatem superat, congruentia si fieri possit pl res quam exempl. gr. $n+1$ valores admittat incongruos α, β, γ, etc. Tum erit

$$A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2} \text{ etc. } + M\alpha + N \equiv 0 \text{ (m. } p)$$
$$A\beta^n + B\beta^{n-1} + C\beta^{n-2} \text{ etc. } + M\beta + N \equiv 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ergo

$$A(\alpha^n - \beta^n) + B(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \text{ etc. } + M(\alpha - \beta) \equiv 0.$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Potestatum differentias quae in hac congruentia reperiantur, p $\alpha - \beta$ divisibiles esse satis notum est, facillimeque perspicitur co gruentiam forma exhiberi

$$(\alpha - \beta)\ (A\beta^{n-1} + B'\beta^{n-2} + C'\beta^{n-3} \text{ etc. } + L'\beta + M') \equiv 0$$

ergo erit

$$A\beta^{n-1} + B'\beta^{n-2} + C'\beta^{n-3} \text{ etc. } + L'\beta + M' \equiv 0$$

quoniam $\alpha - \beta$ per p non divisibilis est, nam α, β sunt valores congrui. Jam quum multitudo horum α, β, γ, δ, ... sit $n+1$ que ipsum α cum aliorum quoque combinari liceat, manifesto n co gruentiae formae, quam modo diximus, habebuntur et quidem om sunt $(n-1)^{ti}$ gradus. Congruentia igitur $(n-1)^{ti}$ gradus adm tet n valores incongruos, ex eadem causa congruentia $(n-2$ gradus $n-1$ valores incongruos. Qua conclusione continuata seq retur congruentiam primi gradus admittere 2 radices diversas, q fieri nequit (§. 6). Multo minus plures quam $n+1$ radices div sae congruentiae propositi n^{ti} gradus satisfacient.

§. 8. Designante φN multitudinem numerorum ad primorum ipsoque minorum et n, n', n'', etc. omnes di sores numeri N unitate et ipso N non exclusis sem erit $\varphi a + \varphi a' + \varphi a'' + \varphi a'''$ etc $= N$.

1. Quando N est formae p^n vel numeri primi potestas, om ejus divisores sunt hi: 1, p, p^2, p^3, ... p^n. Multitudo numer ad p^n primorum eoque minorum est $p^{n-1}(p-1)$, ergo

$$\varphi 1 + \varphi p + \varphi p^2 + \varphi p^3 + \ldots + \varphi p^n$$
$$= 1 + (p-1) + p(p-1) + p^2(p-1) \text{ etc. } + p^{n-1}(p-$$

quam summam potestati p^n aequivalere ex doctrina serierum cons

2. Quando N est numerus compositus puta $A^a B^b C^c$ etc. q cunque hujus divisor forma $A^f B^g C^h$ ... exhibetur, ita ut exp nentes f, g, h vel nonnulli eorum etiam evanescere possint, att men minores sint resp. quam a, b, c, ... Poterit igitur f omn valores inde ab Zero usque ad a, g omnes valores inde ab Zer usque ad b, h omnes valores a Zero usque ad c etc. accipere. E si valoribus his respondentes potestates inter se combinantur, man festo omnes numeri N divisores exstabunt. Jam dico, si nume F, G, H etc. sint ad singulas potestates A^f, B^g, C^h etc. pri etiam productum FGH.. ad illud $A^f B^g C^h$ ... primum fore. Na quum hi modo factoros A, B, C.. productum $A^f B^g C^h$ ... possi metiri, si producta $A^f B^g C^h$.., FGH.. divisorem communem h berent, unum ex factoribus A, B, C... simul ea metiri oporte ex. gr. A. Tum autem A tanquam primus aut F metiri debere aut G, aut H etc. v. c. F, neque vero A^f ad F esset numer

primus contra suppositionem nostram. Viceversa quicunque numerus ad $A^f B^g C^h \ldots$ primus factores modo involvet quorum nullus cum potestatibus A^f, B^g, C^h.. habeat factorem communem. Nunc reperiantur numeri ad A^0, A^1, A^2, ... A^a primi singulisque non majores, deinde numeri ad potestates B^0, B^1, B^2, .. B^b primi singulisque non majores similiterque de ceteris, C^0, C^1. C^2, ... C^c. Primo dictorum multitudo erit A^a, secundo B^b, tertio C^c etc. ex prima parte.

Quodsi numeri de quibus agitur inter se combinantur, ex praecedentibus patebit, omnes numeros exstare ad divisores numeri N primos ipsisque non majores manifestoque multitudo habebitur $A^a B^b C^c$ etc. sive N.

Aliam licet videre demonstrationem huj. prop. in Gauss Disq. Arithm. pag. 33.

B. De numerorum periodis, radicibus primitivis residuisque quadraticis.

§. 9. Quum Fermatii theorema in sequentibus maximi sit momenti in memoriam id revocabimus sed ita enunciatum, ut latissime pateat, nempe ut sequitur.

Quando numeri a, p sunt inter se primi, semper congruentia

$$a^{\varphi p} \equiv 1 (\text{mod. } p)$$

locum habebit, denotante φp multitudinem numerorum ad p primorum eoque minorum.

Significatis omnibus numeris ad p primis eoque minoribus per

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_\mu$$

statim patebit, nullum horum productorum

$$\Theta_1 a \,.\, \Theta_2 a \,.\, \Theta_3 a \,.\, \ldots \,.\, \Theta_\mu \,.\, a$$

per p divisibile esse (§. 2.), deinde producta de quibus agitur secundum p esse incongrua. Nam si universim haberetur $\Theta_\varkappa a \equiv \Theta_\lambda a$ denotantibus $\Theta_\varkappa$, Θ_λ numeros ex his Θ_1, Θ_2, ... Θ_μ differentiam $\Theta_\varkappa a - \Theta_\lambda a$ ergo $\Theta_\varkappa - \Theta_\lambda$ per modulum esse divisibilem oporteret, quod fieri nequit. Tertio dico quodvis residuum ex divisione productorum illorum per p relictum ad p esse primum. Nam si residuum producti alicujus $\Theta_\varkappa a$ est ϱ vel $\Theta_\varkappa a \equiv \varrho$ quicunque residui ϱ divisor productum $\Theta_\varkappa a$ metiri deberet, siquidem etiam numerum primum p metiretur. Tum autem aut $\Theta_\varkappa$ aut a cum p haberet divisorem communem contra ea, quae statuimus. Quum igitur productorum residua sint inaequalia, ad p prima nullumque evanescat, residua haec ordine neglecto his ipsis $\Theta_1 \,.\, \Theta_2 \,.\, \Theta_3 \ldots \Theta_\mu$ aequivalere statim perspicietur. Ergo hanc habemus congruentiam

$$\Theta_1 a \,.\, \Theta_2 a \,.\, \Theta_3 a \ldots \Theta_\mu a \equiv \Theta_1 \,.\, \Theta_2 \,.\, \Theta_3 \ldots \Theta_\mu \;(\text{mod. } p)$$

vel hanc $\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_\mu (a^{\varphi p} - 1) \equiv 0$. Jam vero p ad productum $\Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_\mu$ est primus, quam ob rem (§. 3.) differentia $a^{\varphi p} - 1$ per p divisibilis esse debet i. e. $a^{\varphi p} \equiv 1$ (mod. p).

Quando p est numerus primus omnes ad p primi eoque minores sunt

$$1, 2, 3, \ldots p-1$$

dulus sit 4 aut una formarum exhibeatur p^n, $2p^n$ denotante p numerum primum imparem. Priusquam autem hoc aggredimur argumentum radices congruentiae superioris gradus, in quibus nititur disquisitio, sunt considerandae. Sed eum statim tractabimus casum, in quo p est numerus primus.

§. 12. Semper exstant numeri, quorum nulla potestas inferior quam $(p-1)^{ta}$ unitati congrua est, vel quod idem valet, pro modulo primo radices exstant primitivae.

Quando $p-1$ in factores suos primos hoc modo resolvitur $A^a B^b C^c \ldots$ dico inveniri posse numerum α ad exponentem A^a, num. β ad exp. B^b, numerum γ ad exp. C^c etc. pertinentem. Congruentiam $x^{\frac{p-1}{A}} \equiv 1 \pmod{p}$ non plures quam $\frac{p-1}{A}$ radices admittere diversas ex §. 7. patebit, quam ob rem quisque numerorum $1, 2, 3, 4, \ldots p-1$ quorum multitudo major quam $\frac{p-1}{A}$, congruentiae illi satisfacere non potest. Sit igitur g unus hujusmodi numerus, congruentiae propositae non satisfaciens eritque si ponitur $g^{\frac{p-1}{A^a}} \equiv \alpha$, α numerus ad exponentum A^a pertinens. Potestatem enim $(A^a)^{ta}$ numeri α unitati congruam fore ex Fermatii theoremate intelligitur. Jam si exstarent inferiores numeri α potestates unitati congruae, harum infimae exponens expon. A^a deberet metiri (§. 10.) atque unus esse ex his

$$A^{a-1},\ A^{a-2},\ A^{a-3}, \ldots\ldots$$

Jam vero $\alpha^{A^{a-1}} \equiv \left(g^{\frac{p-1}{A^a}}\right)^{A^{a-1}} \equiv g^{\frac{p-1}{A}}$ ex suppositione nostra unitati non est congrua multoque minus $\alpha^{A^{a-2}}$, $\alpha^{A^{a-3}}$ etc. ergo α ad exponentem A^a pertinet. Tum dico productum numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui ad exponentes singulos A^a, B^b, $C^c, \ldots$ pertineant, ad exponentem $A^a B^b C^c \ldots$ sive $p-1$ pertinere. Quod productum ad potestatem $(p-1)^{tam}$ elevatum unitati congruum fore facile patet.

$$\text{Nam } \alpha^{A^a} \equiv 1,\ \beta^{B^b} \equiv 1,\ \gamma^{C^c} \equiv 1 \text{ etc. ergo}$$

$$\alpha^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1,\ \beta^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1,\ \gamma^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1, \text{ qua ex re}$$

$$(\alpha\beta\gamma\ldots)^{A^a B^b C^c \ldots} \equiv 1 \pmod{p} \text{ sive } (\alpha\beta\gamma\ldots)^{p-1} \equiv 1.$$

Quodsi productum ad minorem exponentem t pertineret, t numerum $p-1$ metiri deberet. Sit igitur $t = A^{a-1} B^b C^c$ etc. eritque $(\alpha\beta\gamma\ldots)^t \equiv (\alpha\beta\gamma\ldots)^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$. Quum jam $\beta, \gamma, \ldots$ ad exponentes B^b, $C^c \ldots$ pertineant potestates $\beta^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$, $\gamma^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$ unitati erunt congruae ergo $(\alpha\beta\gamma\ldots)^t \equiv \alpha^{A^{a-1} B^b C^c \ldots}$. Quum denique α ad exponentem A^a pertineat, debet A^a metiri productum $A^{a-1} B^b C^c \ldots$ q. e. a. Neque igitur $\alpha\beta\gamma\ldots$ ad exponentem $A^{a-1} B^b C^c \ldots$ pertinebit, multoque minus ad minorem.

§. 13. Quoniam residua minima potestatum

$$a,\ a^2,\ a^3, \ldots a^{p-1}$$

si modo a est radix primitiva, sunt inaequalia illa numeris ordine neglecto

$$1, 2, 3, \ldots p-1$$

per δ divisibilem esse oportebit vel Ind $A \equiv 0$ (mod. δ). Sit a radix quaecunque primitiva eritque

$$a^{\text{Ind}\,A} \equiv A \text{ (mod. } p), \; a^{\frac{\text{Ind}\,A(p-1)}{\delta}} \equiv A^{\frac{p-1}{\delta}} \text{ (m. } p).$$

Jam quum $\frac{\text{Ind}\,A}{\delta}$ sit integer, erit $a^{\frac{\text{Ind}\,A(p-1)}{\delta}} \equiv 1$ adeoque $A^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1$ (mod. p), qua deficiente conditione congruentiae $x^n \equiv A$ (m. p) satisfieri nequit.

Coroll. 1. Quando $n = 2$ congruentia $x^2 \equiv A$ (mod. p) resolubilis erit, si $A^{\frac{1}{2}(p-1)}$ unitati congrua, sin vero minus non resolubilis. Ut igitur numerus aliquis quadrato sec. mod. primum congruus fiat, potestas $A^{\frac{p-1}{2}}$ unitati debet esse congrua. Quum jam $p-1$ sit numerus par congruentia $x^2 \equiv A$ (m. p) aut nullam admittet radicem aut duas.

Coroll. 2. Quando $A = 1$ congruentia $x^2 \equiv 1$ (m. p) semper poterit resolvi, si vero $A = -1$ in eo modo casu, quo $\frac{p-1}{\delta}$ est numerus par.

§. 16. Congruentia $x^n \equiv A$ (mod. 2) unam tantummodo radicem admittet nempe 1 quando A est numerus impar, haec vero $x^n \equiv A$ (mod. 4) denotante A etiam nunc numerum imparem, aut nullam, aut unam, aut denique duas.

Propositionis prima pars tam obvia est, ut demonstratione non opus sit. Quod vero attinet ad alteram, sit primo A formae $4n+1$. In hocce casu 1 est radix neque vero 3 nisi exponens n est numerus par. Sit secundo A formae $4n+3$, tum 1 congruentiae non satisfaciet, quia $4n+3-1 = 4n+2$ per 4 non divisibilis neque vero satisfaciet 3 quando n est par. Si vero n est numerus impar manifesto 3 erit radix. Sequitur ex hac consideratione congruentiam $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) semper duas admittere radices nempe 1 et 3.

§. 17. Sequitur ut de modulis una formarum p^n, $2p^n$ comprehensis agatur. In §. 15. inventum est, congruentiam $x^n \equiv 1$ (mod. p) habere δ radices sec. p incongruas, denotante δ maximum communem divisorem num. n et $p-1$. Simili modo enunciabimus theorema quod sequitur.

Congruentia t^{ti} gradus $x^t \equiv 1$ (mod. p^n) admittet δ valores secundum p^n incongruos, denotante δ divisorem communem maximum numerorum t, $p^{n-1}(p-1)$, qua propositione demonstrata patebit congruentiam propositam non plures quam t radices admittere diversas.

Ponatur $\delta = kp\Theta$ ita ut k factorem p non involvat adeoque k ipsum $p-1$ metiatur. Jam dico

1. Si α fuerit radix congruentiae propositae etiam $\alpha + hp^{n-\Theta}$ fore radicem, designante h numerum quencunque per p non divisibilem. Ceterum illico observandum est, numerum Θ hunc $n-1$ superare non posse. Sit primo $n - \Theta > 1$ atque $\Theta = 1$, tum erit

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t = hp^{n-\Theta}\{(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1} + \alpha(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-2}$$
$$+ \alpha^2(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-3} \text{ etc.} + (\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1}\}.$$

Atqui $\alpha + hp^{n-\Theta} \equiv \alpha \pmod{p^2}$ quoniam $n - \Theta > 1$, ergo

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1} \equiv \alpha^{t-1} \pmod{p^2}$$
$$\alpha(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-2} \equiv \alpha^{t-1}$$
$$\alpha^2(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-3} \equiv \alpha^{t-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t-1} \equiv \alpha^{t-1}$$

ergo $(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t \equiv hp^{n-\Theta} . \alpha^{t-1} . t \pmod{p^{n-\Theta+2}}$
quam ob rem terminus in sinistra parte positus erit formae

$$hp^{n-\Theta}(t\alpha^{t-1} + Kp^2) = hp^{n-\Theta}t\alpha^{t-1} + Khp^{n-\Theta+2}$$

quumque $\Theta = 1$ habetur

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t \equiv \alpha^{t-1}hp^{n-\Theta}t \pmod{p^{n+1}}$$
$$\equiv 0 \pmod{p^n}$$

quia in hocce casu t per p non vero per p^2 divisibilis est. Theorema igitur valet quando $n - \Theta > 1$ atque $\Theta = 1$. Sin Θ non est 1 assumamus propositionem nostram valere pro Θ poteritque demonstrari etiam pro $\Theta + 1$ locum habere. Tum autem a valore 1 usque ad 2, hinc ad 3, omnino ad Θ ascendi poterit. Sit igitur

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t \equiv t\alpha^{t-1}hp^{n-\Theta} \;(\text{m. } p^{n+1})$$

ponaturque tp pro t ita ut tp per $p^{\Theta+1}$ non vero per $p^{\Theta+2}$ sit divisibilis. Habemus

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp}$$
$$= \{(\alpha + hp^{n-\Theta})^t - \alpha^t\} \{(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-1)} + \alpha^t(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-2)}$$
$$+ \alpha^{2t}(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-3)} \ldots + \alpha^{t(p-1)}\}$$

verum

$$\alpha + hp^{n-\Theta} \equiv \alpha \pmod{p^2}, \text{ ergo}$$
$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-1)} \equiv \alpha^{t(p-1)} \pmod{p^2}$$
$$\alpha^t(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-2)} \equiv \alpha^{t(p-1)}$$
$$\alpha^{2t}(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-3)} \equiv \alpha^{t(p-1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{t(p-1)} \equiv \alpha^{t(p-1)}$$

adeoque summa erit congrua $\alpha^{t(p-1)} . p$ vel

formae $\alpha^{t(p-1)} . p + Kp^2$, ergo

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp} \text{ formae } (\alpha^{t-1}hp^{n-\Theta}t + Kp^{n+1})$$
$$\{\alpha^{t(p-1)}p + Kp^2\} \text{ vel congrua } \alpha^{tp-1}hp^{n-\Theta}tp$$

secundum modulum $n + 2$. Erit igitur

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp} \equiv \alpha^{tp-1}hp^{n-\Theta}tp \;(\text{m. } p^{n+2}).$$

Jam vero t per p^Θ, $p^{n-\Theta}tp$ per p^{n+1} et $(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp}$ per p^{n+1} divisibilis, quam ob rem

$$(\alpha + hp^{n-\Theta})^{tp} - \alpha^{tp} \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

ita ut prop. valeat pro $\Theta + 1$.

Sit secundo $n-\Theta=1$ atque $\Theta=1$, tum erit

$$(\alpha+hp)^t-\alpha^t=hp\{(\alpha+hp)^{t-1}+\alpha(\alpha+hp)^{t-2}$$
$$+\alpha^2(\alpha+hp)^{t-3}+\ldots+\alpha^{t-1}\}$$

Atqui

$$(\alpha+hp)^{t-1}-\alpha^{t-1}=hp\{(\alpha+hp)^{t-2}+\alpha(\alpha+hp)^{t-3}+\text{etc.}+\alpha^{t-2}\}$$

Deinde

$$(\alpha+hp)^{t-2}\equiv\alpha^{t-2}\ (\text{mod. } p)$$
$$\alpha(\alpha+hp)^{t-3}\equiv\alpha^{t-2}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(\alpha+hp)^{t-2}\equiv\alpha^{t-2}$$

ergo summa erit congrua $\alpha^{t-2}(t-1)$ sec. mod. p vel formae $\alpha^{t-2}(t-1)+Kp$ adeoque

$$(\alpha+hp)^{t-1}-\alpha^{t-1} \text{ erit formae } \alpha^{t-2}(t-1)\,hp+Khp^2$$

quam ob rem

$$(\alpha+hp)^{t-1}-\alpha^{t-1}\equiv\alpha^{t-2}(t-1)\,hp\ (\text{mod. } p^2)$$
$$\text{vel } (\alpha+hp)^{t-1}\equiv\alpha^{t-1}+\alpha^{t-2}(t-1)\,hp$$

prorsus simili modo

$$(\alpha+hp)^{t-2}\equiv\alpha^{t-2}+\alpha^{t-3}(t-2)hp$$
$$(\alpha+hp)^{t-3}\equiv\alpha^{t-3}+\alpha^{t-4}(t-3)hp$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

ergo

$$(\alpha+hp)^t-\alpha^t \text{ erit formae } hp\{t\alpha^{t-1}+\frac{t(t-1)}{1\,.\,2}hp+Kp^2\}$$

vel congrua $hpt\alpha^{t-1}+\frac{t(t-1)}{1\,.\,2}h^2p^2$ (mod. p^3).

Jam vero $\frac{t-1}{2}$ est num. integer adeoque $\frac{t(t-1)}{1\,.\,2}$ per t atque igitur per p divisibilis, quam ob rem habemus

$$(\alpha+hp)^t-\alpha^t\equiv hpt\alpha^{t-1}\ (\text{mod. } p^3)$$
$$\alpha^t\equiv 0\ (\text{mod. } p^2).$$

Simili modo ut antea ad modulos p^n, p^{n+1} poterit ascendi. In omnibus igitur casibus habetur

$$(\alpha+hp^{n-\Theta})^t\equiv\alpha^t(\text{mod. } p^n)$$
$$\text{atque } (\alpha+hp^{n-\Theta})^t\equiv 1$$

quae congruentia pro modulo p^{n+1} non valet.

Ex quo facillime deducitur, numerum aliquem radicem congruentiae propositae esse non posse, nisi in forma contineatur $\alpha+hp^{n-\Theta}$. Quando enim α' ipsi α secundum p neque vero sec. $p^{n-\Theta}$ congruus esset radix poni liceret $\alpha'=\alpha+h'p^\mu$ ita ut sit $\mu<n-\Theta$. Tum erit $(\alpha+h'p^\mu)^t\equiv\alpha^t$ secundum modulum $p^{\mu+\Theta}$ neque vero secund. p^n contra hypoth.

2. Quaecunque radix congruentiae $x^t\equiv 1$ (mod. p^n) eidem sa-

tisfaciet secund. p; jam vero haec $x^t \equiv 1$ (mod. p) habet k radices diversas (§. 15.). Sint hae radices A, B, C, . . . Quodsi a est radix congr. prop. ipsi A secundum p congrua etiam

$$a + p^{n-\Theta},\ a + 2p^{n-\Theta}, \ldots a + (p^\Theta - 1)p^{n-\Theta}$$

fore radices (ex 1) patet. Quam ob rem exstant p^Θ radices congr. nostrae ipsi A sec. p congruae. Idem valet de reliquis B, C, . . . ergo satisfacient omnino kp^Θ sive δ si modo demonstratum fuerit

3. Semper radicem a congruentiae $x^t \equiv 1$ (m. p^n) ipsi A secundum p congruam inveniri posse.

Sit a radix congr. sec. mod. p^{n-1} probeturque semper exstare radicem sec. p^n numero a sec. p congruam. Ex praeced. patet

$$(a + hp^{n-1-\Theta})^t \equiv a^t + ta^{t-1}hp^{n-1-\Theta}$$

sec. mod. p^n ergo propter $a^t \equiv 1$ (mod. p^{n-1}) $(a + hp^{n-1-\Theta})^t - 1$ per p^{n-1} divisibilis est. Ut autem per p^n fiat divisibilis, h ita debet determinari ut

$$\frac{a^t - 1}{p^{n-1}} + a^{t-1}h\frac{t}{p^\Theta}$$

per p sit divisibilis. Quod semper fieri posse inde clarum, quod $a^{t-1}\frac{t}{p^\Theta}$ ad p est numerus primus. Erit igitur $a + hp^{n-1-\Theta}$ radix quaesita, siquidem $n - 1 - \Theta$ non evanescat.

Sin $n - 1 = \Theta$ erit t per p^{n-1} divisibilis, vel $t = t'p^{n-1}$, $t - t' = t'(p^{n-1} - 1)$ atque $t - t'$ per $p - 1$ divisibilis. Quia autem $A^t \equiv 1$ (m. p) erit $A^{t'} \equiv 1$. Quodsi ponimus $A^{t'} = 1 + hp$ habetur $A^t = A^{t'p^{n-1}} = (1 + hp)^{p^{n-1}} \equiv 1$ (m. p^n) ex quo sequitur, in hocce quidem casu quamcunque radicem congruentiae $x^t \equiv 1$ (m. p) ejusdem secund. mod. p^n fore radicem. Jam vero exstat numerus congruentiae $x^t \equiv 1$ (m. p) satisfaciens, hinc ad modulum p^2, hinc ad p^3, . . . ascendi poterit.

§. 18. Etiam congruentia $x^n \equiv 1$ (mod. $2p^n$) admittet δ radices diversas et non plures, designante δ divisorem commun. max. num. t, $p^{n-1}(p-1)$.

Satisfaciat a congruentiae sec. mod. 2, β eidem secundum p^n. Si ponimus $N \equiv a$ (m. 2) $\equiv \beta$ (m. p^n) erit $N^t \equiv a^t$ (mod. 2) $\equiv \beta^t$ (mod. p^n) vel $N^t \equiv 1$ (m. 2) $\equiv 1$ (p^n), ergo $N^t \equiv 1$ (mod. $2p^n$). Jam vero congruentia $x^t \equiv 1$ (m. 2) unam tantummodo radicem admittit, haec vero $x^t \equiv 1$ (p^n) δ radices, huic denique $N \equiv a$ (m. 2) $\equiv \beta$ (m. p^n) unus modo valor qui sit $< 2p^n$, ergo N manifesto habebit $1 . \delta = \delta$ secundum mod. $2p^n$ valores incongruos.

§. 19. Congruentia $x^t \equiv A$ (mod. p^n) admittit δ radices diversas.

Quoniam congruentiam resolubilem esse supponimus sit z radix aliqua, vel $z^t \equiv A$ (mod. p^n). Congruentiam $x^t \equiv 1$ (m. p^n) admittere δ valores sec. modulum incongruos ex §. 17. patet. Sint hi valores a_1, a_2, a_3, . . . a_δ. Jam dico residua minima productorum za_1, za_2, za_3, . . . za_δ radicibus congruentiae propositae aequivalere. Nam si quancunque radicum congruentiae $x^t \equiv 1$ (p^n) designamus per a, erit $a^t \equiv 1$, atqui $z^t \equiv A$ ergo $(za)^t \equiv A$ (mod. p^n), quam ob rem za est radix congruentiae, de qua agitur. Radices igitur erunt hae singulae

$$za_1,\ za_2,\ za_3, \ldots za_\delta.$$

Jam vero omnia haec producta sec. mod. sunt incongrua; nam si haberetur universim $x\alpha_m \equiv x\alpha_{m'}$, differentia $x(\alpha_m - \alpha_{m'})$ ergo $\alpha_m - \alpha_{m'}$ per mod. divisibilis esset, quoniam hic ad x est primus. Atqui α_m, $\alpha_{m'}$ sunt radices congruentiae $x^t \equiv 1$ atque incongrua, ergo revera producta, quae modo diximus, sec. mod. sunt incongrua. Neque vero plures quam δ radices exstabunt; nam quum modulum ad x esse primum supponamus, numerus α ita semper potest determinari ut sit $\alpha x \equiv x'$ (mod. p^n) denotante x' numerum congruentiae propositae satisfacientem. Hinc sequitur $(\alpha x)^t \equiv A$, atqui $x^t \equiv A$, ergo $\alpha^t \equiv 1$, ita ut valor α congruentiae $x^t \equiv 1$ (p^n) satisfieri debeat. Quaecunque igitur radix congruentiae $x^t \equiv A$ (p^n) productorum alicui $x\alpha_1$, $x\alpha_2$, $x\alpha_3$, ... $x\alpha_\delta$ congrua erit, qua ex re δ neque plures exstant radices.

§. 20. Argumentatio §. 12. praesertim in eo vertebatur, ut congruentia $x^t \equiv 1$ (mod. p) non plures quam t radices haberet diversas. Quum jam in §§. 16. 17. 18. probatum sit haec etiam pro modulis p^n, $2p^n$, 4 locum habere, nihil impedit, quominus etiam pro his modulis demonstratio §. 12. adhibeatur. Ex quo sequitur pro modulis p, p^n, $2p^n$, 4 designante p numerum primum imparem, semper radices exstare primitivas, i. e. numeros, quorum periodus omnes ad modulum primos eoque non majores complectatur.

Pro reliquis autem modulis radices non exstare primitivas, hoc modo facillime demonstratur.

Sit modulus formae $A^a B^b C^c \dots$ significetque, si quidem exstare possit, N radicem pro hoc modulo primitivam, ita ut $N^{A^{a-1}(A-1)B^{b-1}(B-1)C^{c-1}(C-1)\dots}$ sit infima num. N unitati congrua potestas secundum modulum $A^a B^b C^c \dots$ Jam vero N ad modulum primus est nec minus ad singulos potestates A^a, B^b, C^c; ergo (§. 9.)

$$N^{A^{a-1}(A-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } A^a)$$
$$N^{B^{b-1}(B-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } B^b)$$
$$N^{C^{c-1}(C-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } C^c).$$

. . . .

Designetur dividuus communis minimus numerorum

$$A^{a-1}(A-1),\ B^{b-1}(B-1),\ C^{c-1}(C-1)\dots$$

per δ, eritque

$$N^\delta \equiv 1 \text{ (m. } A^a) \equiv 1 \text{ (mod. } B^b) \equiv 1 \text{ (m. } C^c)\dots$$

adeoque

$$N^\delta \equiv 1 \text{ (mod. } A^a B^b C^c \dots).$$

Quoniam casus, in quo modulus est numeri primi potestas aut ejus duplum exceptus est, numeri

$$A^{a-1}(A-1),\ B^{b-1}(B-1),\ C^{c-1}(C-1)\dots$$

tanquam pares non erunt inter se primi, ergo horum dividuus communis minimus producto est minor vel

$$\delta < A^{a-1}(A-1)\ B^{b-1}(B-1)\ C^{c-1}(C-1)\dots$$

quo facto N non esset radix primitiva contra hyp.

$$\varphi t + \varphi t' + \varphi t'' + \varphi t''' \text{ etc.} = \varphi' t + \varphi' t' + \varphi' t'' + \varphi' t''' \text{ etc.}$$

am ex praecedentibus patet nullum summae posterioris terminum rioris aliquem posse superare, neque minor esse poterit, quoniam mmae sint aequales ergo $\varphi t = \varphi' t$ i. e. tot numeri ad exponentem pertinent, quot sint ad t primi eoque non majores.

§. 22. Vidimus in §. 20. pro modulo 2^n ubi $n > 2$ radices priitivas non exstare. Etiam ex theoremate quod sequitur haec proitio probatur nempe

Si potestas aliqua numeri 2 altior quam secunda pro odulo assumitur, numeri cujusvis imparis potestas exonentis 2^{n-2} unitati fit congrua.

Clariss. Gauss hoc theorema ex prop. §. 17. derivavit.

Sed quoniam ad illam demonstrandam considerationibus valde culiaribus opus erat atque propositio nostra facilius poterit demonrari hoc modo eam probabimus.

Assumamus theorema verum esse pro modulo 2^{n-1} ita ut sit $^{-3} \equiv 1$ (m. 2^{n-1}), designante a numerum quencunque imparem. amus igitur $a^{2^{n-3}} = 1 + 2^{n-1}\lambda$ eritque $a^{2^{n-2}} = (1 + 2^{n-1}\lambda)^2$ $1 + 2^n\lambda + 2^{2(n-1)}\lambda^2$. Quoniam vero $n > 2$, $2n - n > 2$, $-1) > n$ erit $2^n\lambda + 2^{2(n-1)}\lambda^2 \equiv 0$ (mod. 2^n) ex quo sequitur $^{-2} \equiv 1$ (mod. 2^n), ita ut theorema valeat pro modulo 2^n si verum pro hoc 2^{n-1}.

Jam vero congruentiae $x^2 \equiv 1$ (2^3) omnes numeri impares sa- merus impar forma exhibetur $4m \pm 1$ at- itati sec. mod. 8 vel 2^3 fit congruus. A sque ad 2^4, omnino ad 2^n ascendi poterit. lijudicetur, ad quemnam exponentem nu- pertineat, deinde quot numeri infra 2^n ad ineantes.

numerus impar forma $2^m h \pm 1$ exhi- tque h numerus impar ad exponen- modulum 2^n, ubi $n > 2$ assumitur. ex §. 17. sequitur, sed ut tota dilucidior quae sequitur, adhibeamus.

am numerus propositus a est formae $2^m h \pm 1$ erit a^2 for- h ($2^{m-1}h \pm 1$) vel formae $2^{m+1}h' + 1$, ita ut h' sit $m > 1$. Hinc erit

a^4 formae $1 + 2^{m+2}h''$

a^8 formae $1 + 2^{m+3}h'''$

. . . .

a^{2^μ} formae $1 + 2^{m+\mu}h^{(\mu)}$

, . . . $h^{(\mu)}$ numeros quoscunque impares. Jam sit potestas unitati congrua sec. mod. 2^n eritque

$$2^{m+\mu}h^{(\mu)} \equiv 0 \text{ (mod. } 2^n).$$

sit numerus impar, erit $2^{m+\mu}$ per 2^n divisibilis, in- potestas non divisibilis. Itaque habemus $m + \mu = n$ $n - m$ atque

$$a^{2^{n-m}} \equiv 1 \text{ (m. } 2^n)$$

m a ad exponentem 2^{n-m} pertinet.

ni prouti potestas $A^{\frac{p-1}{2}}$ unitati sec. p congruus sit aut incongruus tamen nunc aliud assequamur ratiocinandi genus huic ipsi materiae magis idoneum.

§. 27. Quando p^n, $2p^n$, 4 pro modulis assumantur atque a significet numerum ad quemque horum primum denique φm exprimat multitudinem ad modulum primorum eoque non majorum numerorum, tum dico

1. Si a sit residuum quadraticum moduli illarum formarum aliqua comprehensi, semper potestatem $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati congruam esse.

2. Vice versa si $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati congrua sit, semper a residuum quadraticum esse moduli propositi.

Demonstratio. Prima pars. Quia a est moduli m residuum quadraticum inveniri poterit quadratum aliquod α^2, cui a secund. m sit congruus vel $\alpha^2 \equiv a$ (mod. m), qua re $(\alpha^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ i. e. $\alpha^{\varphi m} \equiv a^{\frac{1}{2}\varphi m}$. Atqui quum α ad m primum esse supponamus $\alpha^{\varphi m} \equiv 1$ (mod. m) (§. 9.) adeoque $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ (mod. m).

Hanc proprietatem valere pro modulo quocunque inde manat, quod nihil impedit, quominus argumentatio nostra ad quemvis adhibeatur modulum. Longe vero aliter res sese habet in altero casu.

Secunda pars. Congruentia

$$x^{\varphi m} \equiv 1 \text{ (mod. } m)$$

admittit φm radices (§. 9.) tot enim exstant numeri ad modulum primi eoque minores; haec vero altera

$$(x^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1 \text{ (mod. } m)$$

$\frac{1}{2}\varphi m$ habet radices neque plures (§§. 16. 17. 18.), quia numerorum $\frac{1}{2}\varphi m$ et φm divisor communis maximus est $\frac{1}{2}\varphi m$. Jam vero x, ut modo diximus, φm valores involvitin congruos, ergo x^2 $\frac{1}{2}\varphi m$ valores incongruos sec. mod.; facile enim perspicitur, quadrata, quorum radices summam m constituunt esse congrua, quadrata autem, quorum radices $\frac{1}{2}\varphi m$ non superant sec. m incongrua esse. Nam quum $m = p^n$ vel $2p^n$, erit $\frac{1}{2}\varphi m = \frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$. Quodsi esset $\lambda^2 \equiv \mu^2$ ita ut sit quum λ tum $\mu \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\varphi m$ haberetur $(\lambda+\mu)(\lambda-\mu) \equiv 0$. Hi autem factores numerum primum p non simul involvunt, quia differentia per p dividi nequit amboque pares sunt quando modulus est $2p^n$, quoniam in hocce casu et λ et μ est numerus impar, nam $(x^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} - 1$ tanquam per parem $2p^n$ divisibilis ipse erit par adeoque x impar. Ex quo patet aut unum aut alterum factorem per modulum divisibilem esse. Sed hoc fieri nequit quia et $\lambda+\mu$ et $\lambda-\mu$ modulo minor est.

Quum igitur congruentia $(x^2)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ (mod. m) admittat $\frac{1}{2}\varphi m$ neque plures radices, statim perspicitur numerum a congruentiae $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ satisfacientem quadrato alicui sec. m congruum fore.

§. 28. Licet observari quando formae p^n, $2p^n$ pro modulis assumantur potestatem $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati aut positive aut negative sumptae congruam fieri. Nam quum $a^{\varphi m} - 1$ ergo $(a^{\frac{1}{2}\varphi m} + 1)$ $(a^{\frac{1}{2}\varphi m} - 1)$ per m divisibilis sit (§. 9.), aut unum aut alterum factorem per m divisibilem esse oportebit. Nempe ambo factorem m tanquam differentiam 2 constituentes non simul involvunt, quandoque modulus est $2p^n$ ambo erunt pares, ut ex §. praec. patet, quam ob rem erit

aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m} + 1 \equiv 0$ aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m} - 1 \equiv 0$ i. e. aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv -1$ aut $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$.

Si igitur (§. 27.)

1) a est residuum quadraticum moduli p^n, $2p^n$ semper potestas $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ unitati congrua erit.

2) Si $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ unitati congrua est, semper a erit residuum quadraticum.

3) Quando a est non-residuum, erit $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)} \equiv -1$.

4) Quando denique potestas $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)} \equiv -1$ semper erit a non-residuum quadraticum.

Aliam hujus propositionis demonstrationem dedit celeberr. Legendre in opere quod inscribitur Essai sur la théorie des nombres, quae tamen eo limitatur casu, in quo modulus est numerus primus.

§. 29. Hoc residuorum vel non-residuorum criterium pedetentim fert ad propositiones, quae sequuntur demonstrandas, quas ad modulos p^n, $2p^n$ extendi licebit.

Productum ex duobus residuis erit residuum, ex residuo in non-residuum erit non-residuum, productum vero ex duobus non-residuis revera residuum est quadraticum.

1) Sint a, b residua quadratica eritque $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$, $b^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ ubi $\varphi m = p^{n-1}(p-1)$, ergo $(ab)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ i. e. ab residuum (ex §. 28. 2).

2) Quando a est residuum, b autem non-residuum, erit $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$, $b^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv -1$, ergo $(ab)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv -1$ i. e. ab non-residuum quadraticum (§. 28. 4).

3) Quando denique ambo a, b sunt non-residua erit $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv -1$, $b^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv -1$, ergo $(ab)^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ i. e. ab residuum (§. 28. 2).

§. 30. Si alii quam qui in forma p^n, $2p^n$, 4 continentur moduli assumuntur atque $a^{\frac{1}{2}\varphi m}$ unitati sec. m est congrua, nihilominus a non-residuum esse poterit.

Sit modulus $m = A^a B^b C^c \ldots$ atque $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ (mod. m) ita ut sit $\frac{1}{2}\varphi m = \frac{1}{2}A^{a-1}(A-1)\, B^{b-1}(B-1)\, C^{c-1}(C-1) \ldots$, quod ita designemus productum $\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma \ldots$ Sit deinde A numerus primus impar. Assumamus a esse non-residuum moduli A^a, quod semper exstare manifestum est, quo facto erit $a^{\frac{1}{2}\alpha} \equiv -1$ (mod. A^a) (§. 28.) adeoque $a^{\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma\ldots} \equiv +1$ (mod. A^a) quia unum certe horum $\beta, \gamma, \ldots$ numerum parem esse oportebit. Tum vero a est non-residuum mod. A^a, etiamsi congruentia $a^{\frac{1}{2}\varphi m} \equiv 1$ (m. m) locum habeat. Quam ob rem a etiam moduli $A^a B^b C^c \ldots$ vel m erit non-residuum; nam si residuum esset, cujusque horum A^a, B^b, $C^c \ldots$ residuum esse oporteret. Et adhuc quidem modulum 2^n ($n > 2$) excepimus, sed pro hoc etiam propositio demonstratur facillime. Est enim $m = 2^n$, $\varphi m = 2^{n-1}$, $\frac{1}{2}\varphi m = 2^{n-2}$ atque si a designat numerum quemcunque imparem (§. 22.) $a^{2^{n-2}} \equiv 1$ (mod. 2^n). Patet autem non omnes numeros impares moduli 2^n esse residua; nam omnes forma $8k+3$, 5, 7 comprehensi numeri sunt non-residua, quoniam cujusque numeri imparis tanquam formae $4k \pm 1$ quadratum semper formam habet $8k+1$ neque vero $8k+3$, 5, 7.

§. 31. Unitas negative sumpta semper est residuum quadraticum aut non-residuum moduli in aliqua formarum p^n, $2p^n$ exhibiti, prouti p est formae $4n+1$ aut formae $4n+3$. Ceterum -1 non-residuum est moduli 4.

Nam potestas $(-1)^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ unitati positive aut negative sumptae congrua est, prouti $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ est par aut impar, ergo

(§. 28.) -1 resp. residuum aut non-residuum. Erit autem $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ par aut impar prouti $\frac{1}{2}(p-1)$ par aut impar i. e. prouti p formae $4n+1$ aut formae $4n+3$.

Non-residuum denique moduli 4 est -1, quia cujusvis numeri imparis quadratum tanquam formae $8k+1$ secund. mod. 4 unitati positive sumptae fit congruum.

§. 32. Priusquam ad determinandam residuorum vel non-residuorum multitudinem progredimur, nonnulla de radicibus congruentiae secundi gradus $x^2 \equiv 1$ dicenda sunt, quippe quae in sequentibus maximi sit momenti. In universum quidem hoc argumentum in §. 16. jam tractavimus sed ratione modo habita numeri pro modulo assumpti primi; nunc vero de quibuscunque modulis agamus.

§. 33. Congruentia $x^2 \equiv 1$ (mod. m) designante m numerum alicujus formarum p^n, $2p^n$ vel 4 duas tantummodo radices admittit nempe 1 et -1 vel $m-1$.

1) Quando modulus m est numerus primus p differentia $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ per p debet esse divisibilis ergo aut unus factor aut alter (§. 1.), quam ob rem quoniam oportet esse x modulo minorem, ipse x erit aut 1 aut $p-1$.

2) Quando modulus est numeri primi imparis potestas puta p^n etiam tum productum $(x-1)(x+1)$ modulus metietur. Jam vero ambo factores numerum primum p non simul involvunt, quia differentia eorum scilicet 2 per p dividi nequit. Ergo aut $x-1$ aut $x+1$ per p^n debet esse divisibilis vel $x \equiv 1$ aut $\equiv -1$ (m. p^n) et quoniam x modulo est minor $x=1$ aut $x=p^n-1$.

3) Si modulus est duplum numeri primi potestatis manifesto praeterquam quod ambo factores $x-1$, $x+1$ numerum primum p non simul involvunt, etiam ambo erunt pares, qua re modulus aut unum metietur aut alterum i. e. $x \equiv 1$ aut $\equiv -1$ (m. $2p^n$) ergo $x=1$ aut $2p^n-1$.

4) Radices duas modo exstare congruentiae $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) scilicet 1 et 3 demonstratione non egeat.

§. 34. Congruentia $x^2 \equiv 1$ (mod. 2^n), in qua $n>2$ semper quattuor neque plures admittet radices nempe 1, $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}+1$, 2^n-1.

Quia x^2-1 per mod. 2^n debet esse divisibilis, x erit numerus impar, $x+1$ par ita ut poni liceat $x+1=2k$, quo facto habetur $(x-1)(x+1)=4k(k-1)$, $\frac{x^2-1}{2^n}=\frac{k(k-1)}{2^{n-2}}$. Quodsi k est numerus par, $k-1$ impar debet esse k per 2^{n-2} divisibilis vel k formae $2^{n-2}\Theta$, x formae $2^{n-1}\Theta-1$. Si vero k est impar, $k-1$ par, erit $k-1=2^{n-2}\Theta'$, $x=2^{n-1}\Theta'+1$. In omnibus casibus x est modulo minor, ergo hae quattuor inveniuntur radices $2^{n-1}-1$, 2^n-1, 1, $2^{n-1}+1$.

§. 35. Restat, ut modulos, qui in aliqua formarum p^n, $2p^n$, 2^n non sint comprehensi, consideremus. Exhibeatur modulus forma $A^aB^bC^c$ etc. eritque perspicuum, si numerus aliquis sit residuum moduli propositi etiam residuum fore singulorum factorum, qua re ex congruentia

$$x^2 \equiv r \pmod{A^aB^bC^c \ldots}$$

deducuntur hae

$$m^2 \equiv r \pmod{A^a},\ n^2 \equiv r \pmod{B^b},\ q^2 \equiv r \ (\text{m. } C^c) \text{ etc.}$$

tertio. Quodsi numerorum aliquis ad A primorum ex. gr. ϱ_k in reliquos omnes atque etiam in se ipsum multiplicetur, residua inde genita minima ad A erunt prima quumque eorum multitudo sit μ, plures autem numeri ad A primi infra A non exstent, residua haec numeris

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\mu-2}, \varrho_{\mu-1}, \varrho_\mu$$

ordine neglecto aequivalebunt. Jam vero inter hos reperitur 1, qua re semper unum et quidem modo unum illorum productorum unitati secundum A congruum fore patebit. Numeros, quorum productum sec. mod. aliquem unitati fit congruum, Eulerus socios sibi vocavit. In serie igitur

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\mu-2}, \varrho_{\mu-1}, \varrho_\mu$$

cuique numero in eadem serie socius aliquis respondebit, quo loco subintelligendum erit, numerum horum aliquem etiam sibi ipsi socium esse posse.

quarto. Itaque statim decidendum est, quot numeri seriei exstent propositae sibi ipsis socii. Quando vero modulus est unius formarum p^n, $2p^n$ insuperque quando est 4 duo tantummodo numeri infra A reperiuntur, quorum quadrata unitati fiant congrua nempe 1 et $A-1$ (§. 33.). Sint hi ϱ_1 et ϱ_μ. Quo facto in serie

$$\varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\mu-2}\ \varrho_{\mu-1}$$

quisque numerus unum a se diversum habebit socium neque plures, quumque multitudo horum sit par, productum vero ex binis terminis unitati congruum manifesto omnium productum et ipsum unitati fit congruum. Atqui $\varrho_1\varrho_\mu = 1 . (A-1) \equiv -1$ (mod. A) ergo

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \ldots \varrho_{\mu-2}\varrho_{\mu-1}\varrho_\mu \equiv -1 \text{ (mod. } p^n, 2p^n, 4)$$

quinto. Quando denique A est nullius formarum, quas modo diximus, sequitur ex §. 35. quattuor certe numeros exstare infra A (omnino multitudo erit potestas numeri 2 altior quam prima cf. §. 35.) quorum quadrata unitati fiant congrua. Hujusmodi numeris remotis reliquorum productum unitati congruum est. Priorum aliquo designato per ϱ_Θ erit etiam $A-\varrho_\Theta$ eadem proprietate affectus; nam $A-\varrho_\Theta$ ad A primus est non minus quam ϱ_Θ atque $(A-\varrho_\Theta)^2 \equiv \varrho_\Theta^2$ (mod. A), qua re $(A-\varrho_\Theta)^2$ non minus unitati congruus quam ϱ_Θ^2. Bini igitur numerorum sibi ipsis sociorum productum constituent unitati negative sumptae congruum. Et quoniam dimidia ejusmodi pars numerorum est par, productum numerorum sibi ipsis sociorum unitati congruum est, ergo hocce quidem casu

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \ldots \varrho_{\mu-2}\varrho_{\mu-1}\varrho_\mu \equiv 1 \text{ (mod. } A).$$

Exempl. 1. Sit modulus $18 = 2 . 3^2$ formae $2p^n$. Productum

$$1 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 \equiv -1 \text{ (mod. 18)}$$

2. Pro modulo $21 = 3 . 7$ productum

$$1 . 2 . 4 . 5 . 8 . 10 . 11 . 13 . 16 . 17 . 19 . 20 \equiv 1 \text{ (m. 21)}$$

Coroll. Si modulus A est numerus primus p omnes numeri inde ab unitate usque ad $p-1$ ad p erunt primi ergo

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots . p-1 \equiv -1 \text{ (mod. } p)$$

quo modo vulgo enunciatur theorema Wilsonianum.

§. 37. **Summa omnium numerorum ad numerum quencunque A primorum eoque non majorum semper per hunc A divisibilis erit.**

Quando numerus quicunque $m < A$ ad A est primus etiam $A - m$ ad A primus erit atque ambo m, $A - m$ sunt inter se diversi; nam si esset $n = A - m$ haberetur $A = 2m$, $m = \frac{1}{2}A$, quo facto $\frac{1}{2}A$ ad A non esset primus. Quare binorum summa per A divisibilis est vel potius ipsi A aequalis, ergo summa omnium per A divisibilis erit et quidem tot vicibus continebit A quot unitates habet numerorum ad A primorum dimidia pars. Manifesto argumentatio supponit, duos certe numeros ad A primos exstare, qua re excipiendus est casus, in quo $A = 2$.

§. 38. In sequentibus ea modo consideremus residua quadratica, quae ad modulum sint prima, quo facto solos ad hunc ipsum primos numeros ad quadrata elevari oportebit, ut residua de quibus agitur habeantur. Etiamsi hoc expressis verbis non dicetur, tamen semper erit subintelligendum.

§. 39. **Multitudo residuorum quadraticorum moduli p^n, $2p^n$, 4 sec. hunc incongruorum nec non multitudo nonresiduorum aequivalebit multitudinis dimidiae parti ad modulum primorum eoque minorum numerorum.**

1. Quando modulus est numerus primus impar p, horum modo quadratorum

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots (p-3)^2, (p-2)^2, (p-1)^2$$

residua minima considerari oportebit. Jam vero quadrata, quorum radices summam p constituunt, erunt congrua, quoniam omnino $m^2 \equiv (p-m)^2$ sec. mod. p. At vero omnia haec

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

revera erunt incongrua secundum p. Sint duo quaelibet m^2, n^2. Quodsi haberetur $m^2 \equiv n^2$ (mod. p), esset $(m+n)(m-n)$ per p divisibilis ergo aut $m+n$ aut $m-n$ (§. 1.) quod fieri nequit, quoniam et $m+n$ et $m-n < p$. Qua re exstant $\frac{1}{2}(p-1)$ residua manifestoque totidem non-residua.

2. Quando modulus est numeri primi imparis potestas aliqua puta p^n. Sint numeri ad p^n primi eoque minores

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{\mu-2}, \varrho_{\mu-1}, \varrho_\mu$$

ita ut ϱ_1 sit minimus ϱ_μ maximus reliquique vulgari ordine sint positi. Tum vero ita eos ordinari licebit

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots p^n - \varrho_3, p^n - \varrho_2, p^n - \varrho_1.$$

Jam quadrata, quorum radices summam p^n constituunt, sec. p^n erunt congrua, quoniam in universum $m^2 \equiv (p^n - m)^2$ sec. mod. p^n. At vero quadrata eorum, qui moduli dimidiam partem non superant, revera erunt incongrua. Sint hujusmodi numeri duo quilibet a, b. Quodsi esset $a^2 \equiv b^2$, productum $(a+b)(a-b)$ per p^n dividi posset; jam vero ambo factores primum p non involvunt, quia si fieri posset, differentia $2b$ per p divisibilis esset q. e. a. Ergo aut unus factor aut alter per p^n dividi poterit; sed etiam hoc fieri nequit, quod $a+b$, $a-b < p^n$.

3. Pro modulo $2p^n$ multitudinem residuorum quadraticorum esse

$\frac{1}{2}p^{m-1}(p-1)$ simili modo probatur, dummodo ratio habeatur ejus rei, quod ambo $a+b$, $a-b$ sunt pares.

4. Si modulus est 4 duo modo exstant numeri ad 4 primi 1 et 3. 3 vero residuum esse nequit, quia quadratum numeri imparis exhibetur forma $4n+1$ neque vero $4n+3$.

§. 40. **Multitudo residuorum quadraticorum moduli 2^n $(n>2)$ ad eumque incongruorum est 2^{n-3}.**

Primum dico quadrata

$$1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots (2^{n-2}-1)^2$$

sec. modulum 2^n esse incongrua. Nam duo quaelibet sint a^2, b^2. Quodsi haberetur $a^2 \equiv b^2$, productum $(a+b)(a-b)$ per modulum divisibilis esset. Atqui ambo factores numerum 4 non simul involvunt, quia tum differentia eorum $2b$ per 4 dividi posset, quod fieri nequit, quoniam b impar. Ex quo sequitur $a-b$ per 2, $a+b$ per 2^{n-1} divisibilem esse oportere. Sed etiam hoc fieri nequit, quod summa $a+b<2^{n-1}$. Et quum quodque majus quadratum radicem habeat, quae cum alicujus seriei propositae quadrati radice summam 2^{n-1} constituit sequitur talia quadrata revera esse congrua. Multitudinem vero horum

$$1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots (2^{n-2}-1)^2$$

esse 2^{n-3} facile ex inductione intelligitur.

Exempl. 1. Pro modulo 32 habentur $2^{5-3}=4$ residua scilicet 1 . 9 . 25 . 17.

2. Pro modulo 64 haec octo residua

$$1 . 9 . 25 . 49 . 17 . 57 . 41 . 33.$$

§. 41. Vidimus in §. 15. congruentiam $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ designante p numerum primum imparem admittere tot radices, quot unitates habeat divisor communis maximus numerorum n et $p-1$. Jam quum numeros ad eundem exponentem pertinentes examinaturi simus accuratiusque persequuturi, aliam etiam hujus propositionis demonstrationem tentemus, ex qua multa alia attentione haud indigna sponte manabunt.

1. **Quicunque numerus unumquemque aliorum duorum metiens, horum maximum divisorem communem metietur.**

Sint numeri dati a, b divis. comm. maximus δ atque z tertius numerus ipsos a, b metiens. Ponatur $a=\delta k$, $b=\delta k'$ quo facto k et k' erunt inter se primi. Nam si factorem communem Θ involverent, poni liceret $a=\delta\Theta . \lambda$, $b=\delta\Theta . \lambda'$ essentque a, b per $\delta\Theta$ divisibiles q. e. a. quoniam δ divisor communis maximus est. Porro quod z metitur a et b hos ita exhiberi oportebit $a=z\varphi$, $b=z\varphi'$. Demonstrari autem poterit φ, φ' multipla esse numerorum k, k'. Nam $\delta k=z\varphi$, $\delta k'=z\varphi'$ ergo $\frac{k}{k'}=\frac{\varphi}{\varphi'}$ vel $k\varphi'=k'\varphi$ atque $k\varphi'$ per k' divisibilis, jam vero k' ad k primus est, qua re k' ipsum φ' metiri debet, similiterque k ipsum φ. Quoniam φ est multiplum numeri k oportet esse φ formae km, ergo $\delta k=zkm$ vel $\delta=zm$, quam ob rem z numerum δ metitur.

Quando igitur numerus z divisorem communem maximum δ numerorum a, b non metitur hos ipsos a, b simul metiri nequit.

2. Sit a radix congruentiae $x^n \equiv 1 \pmod{p}$, ipsum a ad exponentem pertinere oportebit sec. p, qui numeros n, $p-1$ simul

stat. Quando igitur t est numerus impar, erit $\frac{t+1}{2}$ integer et quoniam $a^t \equiv 1$ erit etiam $P = a^{\frac{t(t+1)}{2}} \equiv 1$ (mod. p). Si vero t est par, erit $\frac{1}{2}t$ integer atque $a^t \equiv 1$, $(a^{\frac{t}{2}} + 1)(a^{\frac{t}{2}} - 1) \equiv 0$. Prorsus simili modo uti jam saepius argumentati sumus erit aut $a^{\frac{t}{2}} + 1$ aut $a^{\frac{t}{2}} - 1$ per modulum divisibilis. Atqui $a^{\frac{t}{2}}$ unitati non congrua, quia a^t est infima unitati congrua potestas, qua re $a^{\frac{t}{2}} \equiv -1$ adeoque $P = a^{\frac{t(t+1)}{2}} \equiv (-1)^{t+1} \equiv -1$.

Si denique modulus est 4 argumentationis prima pars pro hocce casu valet; quod vero attinet ad secundam erit $(a^{\frac{t}{2}} + 1)(a^{\frac{t}{2}} - 1)$ per 4 divisibilis et quoniam ambo factores numerum 4 non simul involvunt tanquam differentiam 2 constituentes, aut $a^{\frac{t}{2}} \equiv 1$ aut $\equiv -1$ esse oportet. Non autem erit $a^{\frac{t}{2}} \equiv 1$ sec. hypoth., ergo $a^{\frac{t}{2}} \equiv -1$, atque $a^{\frac{t(t+1)}{2}} \equiv -1$.

Exempl. Pro modulo 25 periodus numeri 2 est haec

$$2^1 . 2^2 . 2^3 . 2^4 \ldots\ldots 2^{18} . 2^{19} . 2^{20}.$$

Residua sunt

2 . 4 . 8 . 16 . 7 . 14 . 3 . 6 . 12 . 24 . 23 . 21 . 17 . 9 . 18 . 11 . 22 . 19 . 13 . 1

productumque est $\equiv -1$ (mod. 25).

§. 44. Quando a est radix primitiva moduli p^n vel $2p^n$, ita ut sit $a^{p^{n-1}(p-1)}$ infima ipsius a potestas unitati congrua, periodus omnes numeros comprehendet ad modulum primos eoque non majores et quoniam in hocce casu $t = p^{n-1}(p-1)$ semper est par, productum numerorum ad aliquem primorum eoque minorum secundum hunc unitati negative sumptae erit congruum. (Cf. §. 36.)

Si a ad exponentem $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ pertinet, erit a residuum quadraticum moduli p^n vel $2p^n$ (§. 28.) nec minus residua erunt a^2, a^3, a^4, .. $a^{\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)}$ et quidem omnia his exhibentur residua, quod multitudo eorum $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ (§. 39.). Sequitur hoc

Theorema. Productum residuorum quadraticorum moduli in aliqua formarum p^n, $2p^n$ exhibiti congruum est unitati positive vel negative sumptae. Positive autem sumenda est unitas vel negative prouti $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ impar vel par i. e. prouti p est formae $4n+3$ vel formae $4n+1$.

Aliam magisque peculiarem demonstrationem tentabimus in paragrapho quae sequitur.

§. 45. Numeri ad modulum quem in universum per m designemus, primi eoque minores sint

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots m - \Theta_3, m - \Theta_2, m - \Theta_1$$

quorum multitudinem tanquam parem esse 2μ supponemus. Quo facto residua quadratica congrua erunt potestatibus

$$\Theta_1^2, \Theta_2^2, \Theta_3^2, \ldots \Theta_{\mu-1}^2, \Theta_\mu^2.$$

Quodsi

1. p est formae $4n+1$ erit (§. 31.) -1 residuum quam ob rem residua etiam ita exhibentur

$$-\Theta_1^2, -\Theta_2^2, -\Theta_3^2, \ldots -\Theta_{\mu-1}^2, -\Theta_\mu^2$$

vel ita

$$\Theta_1(m-\Theta_1), \Theta_2(m-\Theta_2), \ldots \Theta_{\mu-1}(m-\Theta_{\mu-1}), \Theta_\mu(m-\Theta_\mu).$$

Hinc patet productum numerorum ad m primorum congruum esse producto residuorum ipsius m. Jam vero illud productum unitati negative sumptae congruum (§. 36.) ergo theorema probatum est pro modulo, cujus factor p formae $4n+1$.

Si vero p est formae $4n+3$ erit -1 non residuum (§. 41.), quam ob rem non-residua sunt his congrua

$$-\Theta_1^2, -\Theta_2^2, \ldots\ldots -\Theta_\mu^2$$

vel his

$$\Theta_1(m-\Theta_1), \Theta_2(m-\Theta_2) \ldots \Theta_\mu(m-\Theta_\mu)$$

productumque non-residuorum a congruum erit producto numerorum ad modulum primorum i. e. unitati negative sumptae (§. 36.). Jam vero productum residuorum P in productum non-residuorum P' congruit producto numerorum ad mod. primorum i. e. $PP' \equiv -1$, atqui $P' \equiv -1$, ergo $PP' \equiv -P$, $-P \equiv -1$ vel $P \equiv 1$.

Exempl. 1. Pro modulo 25 habentur residua

1 . 4 . 9 . 16 . 11 . 24 . 14 . 6 . 21 . 19

quorum productum $\equiv -1$ vel 24.

Ex. 2. Pro modulo 18 sunt residua

1 . 7 . 13 quorum productum $\equiv 1$.

§. 46. Productum residuorum quadraticorum moduli 2^n $(n>2)$ unitati secundum modulum 2^{n-1} congruum est.

Designemus residua moduli 2^{n-1} per

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_\mu$$

quorum multitudinem esse 2^{n-4} patet ex §. 40., quo loco observandum multitudinem esse 1 quando $n=3$. Quo facto residua moduli 2^n congrua erunt his terminis

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{\mu-1}, \varrho_\mu; \varrho_\mu, \varrho_{\mu-1} \ldots \varrho_2\ \varrho_1$$

sec. mod. 2^{n-1} quoniam multitudo residuorum ipsius 2^n est 2^{n-3} vel duplum multitudinis residuorum mod. 2^{n-1} atque quodcunque ipsius 2^n residuum congruum esse debet alicui ipsius 2^{n-1} residuo sec. mod. 2^{n-1}. Quodsi productum residuorum moduli 2^n designamus per P_n, residuorum hujusce 2^{n-1} per P_{n-1} habetur congruentia

$$P_n \equiv P_{n-1}^2 \pmod{2^{n-1}}.$$

Jam theorema verum esse assumamus pro modulo 2^{n-1} ita ut sit

$$P_{n-1} \equiv 1 \pmod{2^{n-2}}$$

eritque P_{n-1} formae $1+2^{n-2}\varphi$, P_{n-1}^2 formae $1+2^{n-1}\varphi+2^{2(n-2)}\varphi^2$.

Quia $n > 2$ est $2(n-2) \overline{\overline{>}} n-1$ adeoque $P_{n-1}^2 \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$ ergo ex praeced.

$$P_n \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}.$$

Quando igitur propositio nostra valet pro modulo 2^{n-1} etiam pro hocce 2^n valebit.

Jam vero valet pro modulo 2^3, manifesto enim unum modo exstat residuum 1. Hinc ad modulum 2^4, hinc ad 2^5, in universum ad 2^n ascendi poterit.

Exempl. 1. Residua moduli 32 sunt haec quattuor 1.9.25.17 quorum productum unitati secundum 16 est congruum.

2. Residua moduli 64 haec sunt octo 1 . 9 . 25 . 49 . 17 . 57 . 41 . 33 quorum productum $\equiv 1$ sec. mod. 32.

§. 47. **Residuorum quadraticorum ad modulum quencunque m primorum multitudini aequivalebit numerorum ad modulum primorum divisae per numerum, qui tot unitates habet, quot radices congruentia $x^2 \equiv r \pmod{m}$.**

Congruentia haec habeat Θ radices diversas. Ex quaque harum radicum, quas omnes ad modulum primas esse supposuimus, unum idemque gignitur residuum minimum, quam ob rem disquisitio eo reducta est, ut determinetur quoties Θ in multitudine numerorum ad m primorum contineatur. Ex quo pedetentim sequitur theorema.

Ceterum observandum est, si modulus factores modo primos impares involvat, residuorum multitudinem esse $\frac{\varphi m}{2^k}$, designante φm multitudinem numerorum ad m primorum et k multitudinem factorum ipsius m primorum.

Ex hoc theoremate facillime deducuntur prop. §§. 39. 40.

Exempl. Congruentia $x^2 \equiv r$ (mod. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$) admittit 2^3 vel 8 radices, deinde $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ ergo multitudo resid. moduli 105 erit $\frac{48}{8} = 6$. Sunt vero haec

1 . 4 . 16 . 64 . 46 . 79.

§. 48. **Quivis numerus per numerum primum p non divisibilis, qui ipsius p est residuum vel non-residuum, erit residuum etiam vel non-residuum moduli p^n vel $2p^n$.**

Primo perspicuum est quemvis numerum, qui residuum sit vel non-residuum ipsius p^n etiam residuum fore vel non-residuum moduli p. Jam vero (§. 39.) multitudo residuorum moduli p^n vel $2p^n$ est $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ quaeriturque, utrum inter hujus residua omnia omnino residua moduli p (etiam sec. p congrua) reperiantur, necne. Secund. p incongrua ipsius p residua exstant $\frac{1}{2}(p-1)$, totidem manifesto inter p et $2p$, totidem inter $2p$ et $3p$ etc. Qua re residua moduli p infra p^n inveniuntur $p^{n-1} \cdot \frac{1}{2}(p-1) = \frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$. Omnia igitur residua moduli p infra p^n inter residua moduli p^n vel $2p^n$ reperiuntur.

Aliam hujus dissimillimam propositionis argumentationem dedit summus Gauss in Disq. Arithm. pag. 99 sqq.

§. 49. **Quando potestas aliqua numeri 2 altior quam secunda puta 2^n pro modulo assumitur, omnes numeri impares formae $8k+1$ erunt residua, reliqui vero non-residua.**

Multitudo residuorum moduli 2^n est 2^{n-3} (§. 40.) quaeriturque, num omnes numeri infra 2^n formae $8k+1$ inter haec reperiantur. Debet autem k ita determinari ut sit $8k+1<2^n$ vel $k<2^{n-3}-\frac{1}{8}$ adeoque k num. $2^{n-3}-1$ non superet. Si igitur pro k ponuntur valores

$$0, 1, 2, 3, \ldots 2^{n-3}-1$$

habetur multitudo 2^{n-3}, ergo omnes numeri formae $8k+1$ qui minores sunt modulo in residuis ipsius 2^n reperiuntur. Prop. sec. pars jam in §. 30. breviter perstricta est.

§. 50. Pro modulo aliquo qui forma p^n vel $2p^n$ non continetur residuorum quadraticorum productum non quidem semper unitati congruum est sed tamen numero alicui congruum erit, qui in moduli residuis invenitur.

Redigatur modulus sub formam $A^aB^bC^c\ldots$ designantibus A, B, C, .. numeros primos diversos inter se. Sed unum modo casum brev. gratia consideremus, quo quidem A, B, C.. sunt numeri primi impares; quicunque enim est modulus, disquisitio facillime ex §§. 45. 46. peti poterit.

1. Sint omnes moduli factores primi formae $4n+1$ vel omnes formae $4n+3$. Residua moduli m etiam singularium potestatum A^a, B^b, C^c, .. erunt residua. Jam vero residua moduli A^a infra A^a exstant $\frac{1}{2}A^{a-1}(A-1)$, residua moduli m infra m

$$\frac{A^{a-1}(A-1)\; B^{b-1}(B-1)\; C^{c-1}(C-1)\ldots}{2^k}$$

(§. 47.) designante k multitudinem factorum moduli primorum.

Ex quo sequitur multitudinem residuorum moduli m infra m multiplum esse multitudinis residuorum moduli A^a infra A^a, manifesto enim numerus $\frac{B^{b-1}(B-1)\; C^{c-1}(C-1)\text{ etc.}}{2^{k-1}}$ est integer; quoniam quisque horum $B-1$, $C-1$, $D-1$ etc. quorum multitudo $k-1$ est numerus par. Quodsi hunc numerum ita exhibemus

$$\tfrac{1}{2}(B-1)B^{b-1}\,.\,\tfrac{1}{2}(C-1)C^{c-1}\,.\,\tfrac{1}{2}(D-1)D^{d-1}\text{ etc.}$$

perspicuum erit quando omnes B, C, D etc. sint formae $4n+1$ hunc numerum esse parem, imparem vero quando omnes formae $4n+3$. Jam productum residuorum moduli A^a infra A^a est $\equiv\pm1$ sec. A^a prouti A est formae $4n+3$ vel f. $4n+1$ (§. 45.) adeoque productum residuorum moduli m infra m erit congruum potestati

$$(\pm1)^{\frac{1}{2}(B-1)B^{b-1}\,.\,\frac{1}{2}(C-1)C^{c-1}\text{ etc.}}$$

ergo semper unitati positive sumptae congruum. Idem valet de reliquis B^b, C^c, D^d..., quam ob rem producto mod. m residuorum designante per P habebimus

$$\begin{aligned}P&\equiv1 \pmod{A^a}\\ &\equiv1 \pmod{B^b}\\ &\equiv1 \pmod{C^c}\\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

ergo etiam $P\equiv1$ (mod. $A^aB^bC^c\ldots=m$). Hinc habemus theorema: Si modulus est nullius formarum p^n, $2p^n$ atque omnes ejus factores primi sunt impares omnesque formae ejus-

dem, semper productum hujus moduli residuorum unitati positive sumptae erit congruum.

2. Si nonnulli factores sunt formae $4n+1$ reliqui vero formae $4n+3$ productum residuorum moduli m unitati congruum est secundum quamque potestatum, quarum radices formae $4n+3$. Sint formae $4n+3$ hi $A, B, C\ldots$ formae autem $4n+1$ hi $H, K, L\ldots$ ita ut sit $m = A^a B^b C^c \ldots H^h K^k L^l$ eritque $P \equiv 1 \pmod{A^a} \equiv 1 \pmod{B^b} \equiv 1 \pmod{C^c}$ ergo etiam $P \equiv 1 \pmod{A^a B^b C^c \ldots}$. Quodsi unus modo factor H exstat formae $4n+1$ productum P erit congruum (1) potestati $(-1)^{\frac{1}{2}(A-1)A^{a-1} \cdot \frac{1}{2}(B-1)B^{b-1} \text{ etc.}}$ ergo $\equiv -1$ secund. modulum H^h, quam ob rem congruentias resolvi oportebit $P \equiv 1 \pmod{A^a B^b C^c \ldots}$, $P \equiv -1 \pmod{H^h}$, quo facto P unitati neque positive neque negative sumptae erit congruum sec. mod. $A^a B^b C^c \ldots H^h = m$. Si vero plures factores exstent formae $4n+1$ nempe $H, K, L\ldots$ productum residuorum moduli m est congruum potestati

$$(-1)^{\frac{1}{2}(A-1)A^{a-1} \cdot \frac{1}{2}(B-1)B^{b-1} \ldots \frac{1}{2}(K-1)K^{k-1} \cdot \frac{1}{2}(L-1)L^{l-1} \text{ etc.}}$$

secundum modulum H^h vel congruum unitati positive sumptae, quoniam in hocce casu exponens est par. Idem valet de modulis K^k, L^l etc., qua re habetur

$$P \equiv 1 \pmod{H^h} \equiv 1 \pmod{K^k} \equiv 1 \pmod{L^l} \text{ etc.}$$

ergo $P \equiv 1 \pmod{H^h K^k L^l \ldots}$ adeoque

$$P \equiv 1 \pmod{A^a B^b C^c \ldots H^h K^k L^l \ldots = m}.$$

Ex quo tandem sequitur theorema:

Si in moduli factoribus duo vel plures reperiuntur formae $4n+1$, semper productum residuorum moduli ejusdem quadraticorum unitati positive sumptae secundum hunc erit congruum. In eo casu, quo unus modo factor exstat formae $4n+1$ productum de quo agitur residuo moduli alicui ab 1 et -1 vel $m-1$ diverso congruum fit, nempe productum residuorum et ipsum est residuum.

Exempl. 1. Pro modulo $33 = 3 \cdot 11$, cujus factores primi ejusdem sunt formae productum residuorum

$$1 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 31$$

unitati congruum est.

2. Pro modulo $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$ residua sunt haec duodecim

$$1 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 49 \cdot 64 \cdot 121 \cdot 61 \cdot 94 \cdot 166 \cdot 139 \cdot 181 \cdot 79$$

quorum productum unitati congruum, quoniam duo 13 et 5 formae sunt $4n+1$.

3. Pro modulo $35 = 5 \cdot 7$ qui unum modo factorem involvit formae $4n+1$ productum residuorum

$$1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 29 \cdot 11$$

congruum est 29. Invenitur hoc residuum sequenti modo. Erit

$$P \equiv -1 \; (\text{m. } 5) \equiv 1 \; (\text{m. } 7)$$

qua re P ita exhiberi licet $P = -1 + 5\Theta$, ergo $5\Theta \equiv 2$ (m. 7) vel $5\Theta - 2$ erit per 7 divisibilis. Atqui $5\Theta - 2 = (7-2)\,\Theta - 2$,

quam ob rem debet esse $2\Theta+2$ vel $\Theta+1$ per 7 divisibilis. Ponamus $\Theta+1=7\Theta'$ eritque

$$P=-1+5(7\Theta'-1)\equiv-6 \text{ (mod. 35) vel } \equiv 29 \text{ (mod. 35)}.$$

§. 51. Theorema paragr. 45 manifesto ita etiam poterit enunciari:

Quadratum producti omnium numerorum ad modulum $m=p^n$ vel $2p^n$ primorum ejusque dimidia parte minorum unitati est congruum, quando p est formae $4n+3$.

Maximus ad m primus numerus debet esse $\frac{m-1}{2}$, nam $\frac{m-1}{2}$ ad m certe primus. Si igitur numeros de quibus agitur designamus per

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots . \frac{m-1}{2}$$

ex praec. intelligitur semper esse

$$(\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \ldots \frac{m-1}{2})^2 \equiv 1 \text{ (mod. } m)$$

Hinc sequitur productum

$$(\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \ldots \frac{m-1}{2}+1)\ (\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \ldots \frac{m-1}{2}-1)$$

per m divisibile esse. Quoniam autem hi factores tanquam differentiam 2 constituentes factorem primum p non simul involvunt amboque pares sunt, aut unus aut alter per m dividi poterit i. e.

$$\Theta_1\Theta_2\Theta_3 \ldots \frac{m-1}{2} \text{ aut } \equiv 1 \text{ aut } \equiv -1.$$

Quando modulus est numerus primus impar habetur

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 \text{ (mod. } p)$$

Nunc vero statim dijudicandum est, utrum signo superiore utendum sit an inferiore.

§. 52. Quod p est formae $4n+3$ erit $-\varrho$ vel $m-\varrho$ nonresiduum, si ϱ est residuum (§. 31. 29.). Si igitur pro residuis iis, quae sunt majora moduli dimidia parte ea substituantur negativa, quae illis sunt congrua quorumque valores absolute sumpti erunt minores moduli dimidia parte, manifesto series omnium ipsius m residuorum absolute sumptorum complectetur omnes numeros ad modulum primos ejusque dimidia parte minores. Et quia productum ipsorum residuorum unitati congruum est (§. 45.) habetur hoc theorema:

Productum omnium numerorum ad modulum p^n vel $2p^n$ primorum ejusdemque dimidia parte minorum unitati congruum erit positive aut negative sumptae, prouti multitudo residuorum ipsius m, quae sunt moduli dimidia parte majora est numerus par aut impar.

Productum igitur $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \frac{p-1}{2}$ denotante p numerum primum formae $4n+3$ unitati positive aut negative sumptae congruum est prouti multitudo residuorum ipsius p, quae sunt majora quam $\frac{1}{2}p$ est par aut impar.

Exempl. 1. Pro modulo 19 habentur residua

$$1 . 4 . 9 . 16 . 6 . 17 . 11 . 7 . 5$$

$$\text{vel } 1 . 4 . 9 . -3 . 6 . -2 . -8 . 7 . 5$$

ergo productum $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 \equiv -1$ (mod. 19)

2. Pro modulo 23 vero haec

$$1 . 4 . 9 . 16 . 2 . 13 . 3 . 18 . 12 . 8 . 6$$

$$\text{vel } 1 . 4 . 9 . -7 . 2 . -10 . 3 . -5 . -11 . 8 . 6$$

ergo productum $1 . 2 . 3 \ldots 11 \equiv 1$ (m. 23).

3. Quando modulus est 27 exstant residua haec novem

$$1 . 4 . 16 . 25 . 22 . 10 . 19 . 13 . 7$$

productumque $\equiv 1$ (mod. 27).

§. 53. **Quadratum producti omnium numerorum imparium inde ab unitate usque ad $p-2$ designante p numerum primum formae $4n+3$ semper unitati congruum est.**

Numerorum

$$1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2$$

mulitudo erit $\frac{1}{2}(p-1)$; jam vero $p-2 \equiv -2$,

$$p-4 \equiv -4,\ p-6 \equiv -6 \text{ etc. } \frac{p+3}{2} \equiv -\frac{p-3}{2}$$

adeoque

$$1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2 \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots \frac{p-1}{2}$$

ergo

$$P^2 = (1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} . (1 . 2 . 3 \ldots \frac{p-1}{2})^2.$$

Atqui $\frac{p-3}{2}$ est numerus par atque (§. 51.) productum

$$(1 . 2 . 3 \ldots \frac{p-1}{2})^2 \equiv 1 \text{ ergo}$$

$$P^2 = (1 . 3 . 5 . 7 \ldots p-2)^2 \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$

Ex hac consideratione manabit etiam haec propositio, quo loco observandum est numerum $\frac{p-3}{4}$ esse parem vel imparem prouti p sit formae $8k+3$ vel formae $8k+7$. **Productum omnium numerorum imparium inde ab unitate usque ad $p-2$ designante p numerum primum formae $4n+3$ producto omnium numerorum inde ab unitate usque ad $\frac{1}{2}(p-1)$ positive aut negative sumpto congruum est, prouti p est formae $8k+3$ vel formae $8k+7$.**

Alia hujus theorematis demonstratione propositionem nanciscemur in doctrina numerorum attentione haud indignam.

Productum $1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots p-1$ est $\equiv -1$ (mod. p) sec. theorema Wilsonianum ergo

$$1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2 . 1 . 2 . 3 \ldots \frac{p-1}{2} . 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$$

atque si ponimus $1 . 2 . 3 . 4 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv \lambda$, $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mu$

$$P\lambda\mu \equiv -1 \text{ (mod. } p\text{); at vero } P \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} . \lambda$$

qua re $P\lambda \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} \lambda^2 \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}}$ adeoque $(-1)^{\frac{p-3}{4}} \mu \equiv -1$ (mod. p). Quodsi p est formae $8k+3$ erit $\frac{p-3}{4}$ par, impar vero quando p formae $8k+7$. Hinc erit $\mu \equiv -1$ aut $-\mu \equiv -1$ prouti p forma comprehenditur $8k+3$ aut hacce $8k+7$. Est igitur $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (mod. $p = 8k+3$) $\equiv 1$ (mod. $p = 8k+7$) ergo propter §. 28.

Numerus 2 est residuum quadraticum moduli primi formae $8k+7$, non-residuum vero formae $8k+3$.

§. 54. In universum quadratum producti omnium numerorum imparium inde ab unitate usque ad $p-2$ designante p num. primum quencunque, unitati positive vel negative sumptae erit congruum, prouti p est formae $4n+3$ vel hujusce $4n+1$.

Residua moduli p exhibentur potestatibus

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2, \left(\frac{p-3}{2}\right)^2, \left(\frac{p-5}{2}\right)^2, \ldots\ldots\ldots$$

omnino ex potestate $\left(\frac{p-k}{2}\right)^2$ residuum gignitur quadraticum, denotante k numerum imparem, cujus minimus valor 1 cujusque maximus $p-2$.

Ponamus $\left(\frac{p-k}{2}\right)^2 \equiv r$ eritque $(p-k)^2 \equiv 4r$ vel $k^2 \equiv 4r$, ita ut poni liceat $k^2 = 4r - p$, quo facto habetur $r = \frac{p+k^2}{4}$. Residua igitur erunt haec

$$\frac{p+1}{4}, \frac{p+3^2}{4}, \frac{p+5^2}{4}, \ldots \frac{p+(p-2)^2}{4}$$

Productum horum designetur per P eritque (§. 45.) $P \equiv \pm 1$ prouti p formae $4n+3$ vel hujusce $4n+1$, ergo

$$P . 4^{\frac{p-1}{2}} = P . 2^{p-1} \equiv \pm 2^{p-1} \text{ i. e.}$$

$$(p+1)(p+3^2)(p+5^2)(p+7^2) \ldots p+(p-2)^2 \equiv \pm 2^{p-1}$$

adeoque $\equiv \pm 1$ (§. 9.), qua re etiam

$$(1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots p-2)^2 \equiv \pm 1 \text{ (mod. } p\text{)}$$

prouti p est formae $4n+3$ vel hujusce $4n+1$.

§. 55. Propositio in §. 52. enunciata etiam ex sociorum doctrina facillime petitur hoc modo.

In §. 36. demonstratum est cuique numero seriei

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots\ldots p-1$$

socium aliquem in eadem serie sed unum modo respondere. Quodsi numeri hujus seriei socii sibi designantur in universum per α, β ita ut sit $\alpha\beta \equiv 1$ (mod. p) habetur $\alpha(p-\beta) \equiv -1$ (m. p). Vocari

liceat numeros, quorum productum unitati negative sumptae fit congruum, **socios oppositos**, quo facto in serie

$$1 . 2 . 3 . 4 \ldots \frac{p-1}{2}$$

cuivis numero socius respondebit vel socius oppositus in eadem serie et quidem unus modo. Nam cuique horum numerorum in serie $1 . 2 . 3 . 4 \ldots p-1$ socius respondet ergo in priore aut socius aut socius oppositus. Si vero esset $\alpha\beta' \equiv \alpha\beta''$ ita ut α, β', β'' moduli dimidia parte sint minores atque $\alpha\beta' \equiv \alpha\beta'' \equiv -1$ haberetur $\alpha(p-\beta') \equiv \alpha(p-\beta'') \equiv 1$, quo facto quum $p-\beta'$, tum $p-\beta''$ ipsi α socius esset contra §. 36. Etiam nullus horum

$$2 . 3 . 4 \ldots \frac{p-1}{2}$$

quorum multitudo par, sibi ipsi socius esse poterit vel socius oppositus. Nam praeter 1 et $p-1$ nullius quadratum unitati congruum est (§. 36.) atque etiam nullius quadratum unitati negative sumptae erit congruum, quoniam -1 est non-residuum formae $4n+3$. (§. 31.). Qua re productum binorum terminorum seriei

$$2 . 3 . 4 \ldots . \frac{p-1}{2}$$

unitati aut positive aut negative sumptae erit congruum, quadratumque hujus producti semper unitati congruum. Ergo

$$\left(2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ldots \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv 1 \quad (\text{m. } p = 4n+3)$$

Nunc vero aliud criterium sese offert congruentiae

$$1 . 2 . 3 . 4 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv \pm 1.$$

Signo enim superiore vel inferiore utendum erit prouti multitudo numerorum seriei

$$2 . 3 . 4 . 5 \ldots \frac{p-1}{2}$$

quibus socius oppositus aliquis respondet, est par vel impar.

Exempli gr. pro modulo 23 habentur congruentiae

$$2 . 11 \equiv -1,\ 3 . 8 \equiv 1,\ 4 . 6 \equiv 1,\ 5 . 9 \equiv -1,\ 7 . 10 \equiv 1$$

ergo productum

$$1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots 11 \equiv 1.$$

Utrum numero alicui respondeat socius an socius oppositus facile ex fractionum continuarum doctrina decidi poterit. Nam si α designat numerum aliquem ex his $2 . 3 . 4 \ldots \frac{p-1}{2}$, evolvatur fractio $\frac{p}{\alpha}$ in fractionem continuam eritque si fractio convergens quae ipsam $\frac{p}{\alpha}$ antecedit designatur per $\frac{g}{h}$, $\alpha g - hp = \pm 1$ vel $\alpha g \equiv \pm 1$ (mod. p). Quodsi g moduli dimidia parte est minor, ipsi α respondebit socius vel socius oppositus. Si vero $g > \frac{1}{2}p$ erit

$a(p-g)\equiv\mp 1$ (mod. p) atque tum a et $p-g$ sibi erunt socii oppositi vel socii.

§. 56. **Summa residuorum quadraticorum moduli alicujus formarum p^n, $2p^n$ semper per hunc divisibilis est, excepto casu in quo $p=3$.**

Designentur residua per

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_\mu.$$

Jam 4 tanquam quadratum residuum est moduli cujusvis, ergo (§. 29.) etiam his residua erunt congrua

$$4\varrho_1, 4\varrho_2, 4\varrho_3, \ldots 4\varrho_\mu$$

manifestoque omnia sunt incongrua, quoniam si haberetur $4\varrho_k\equiv 4\varrho_\lambda$, esset $4(\varrho_k-\varrho_\lambda)$ per modulum divisibilis, vel productum $4(\varrho_k-\varrho_\lambda)$ divisibile. Quodsi modulus est p^n hoc fieri nequit quia p^n ad 4 primus atque $\varrho_k-\varrho_\lambda<p^n$, si vero modulus est $2p^n$ erit $\frac{4(\varrho_k-\varrho_\lambda)}{2p^n}=\frac{2(\varrho_k-\varrho_\lambda)}{p^n}$ quo facto denuo p^n ad 2 primus est. Summa igitur S residuorum congrua est $4S$ vel $4S\equiv S$, ex quo sequitur $3S\equiv 0$. Atqui quum casum in quo $p=3$ exceperimus, semper modulus ad 3 primus erit, quam ob rem habetur $S\equiv 0$ (m. p^n vel $2p^n$).

Nota. Quando p est formae $4n+1$ theorema facilius etiam probatur hoc modo. Si r est residuum etiam $-r$ erit residuum, qua re in serie

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_\mu$$

bina signi ratione non habita erunt aequalia, ergo summa omnium per modulum divisibilis.

Ex. gr. Pro modulo 25 residua sunt

1 . 4 . 9 . 16 . 11 . 24 . 14 . 6 . 21 . 19

vel haec

1 . 24, 4 . 21, 9 . 16, 11 . 14, 6 . 19

2. Residua moduli 19 sunt

1 . 4 . 9 . 16 . 6 . 17 . 11 . 7 . 5

summaque per 19 divisibilis.

§. 57. **Summa omnium terminorum periodi numeri cujusvis a est $\equiv 0$ sec. mod. quencunque, qui ad $a-1$ est numerus primus.**

Sit periodus haec

$$a, a^2, a^3, a^4, \ldots a^t$$

eritque summa s ex serierum doctrina $a.\frac{a^t-1}{a-1}$ adeoque $s(a-1)$ $=a(a^t-1)$. Atqui $a^t\equiv 1$ ergo $s(a-1)\equiv 0$, vel $s\equiv 0$ quoniam modulus ad $a-1$ primus.

§. 58. **Theorema. Productum omnium radicum congruentiae $x^n\equiv 1$ (mod. p) designante p numerum primum unitati positive aut negative sumptae est congruum prouti divisor communis maximus numerorum n et $p-1$ est impar aut par.**

Divisor communis maximus numerorum n et $p-1$ sit δ habebitque congruentia de qua agitur δ radices (§. 41.). Quarum quaelibet ad exponentem δ pertinens sit w; talis enim semper exstat. Termini

$$w, w^2, w^3, w^4, \ldots w^\delta$$

periodum constituent omnesque congruentiae propositae satisfacient neque plures radices exstant. Ergo productum radicum erit $\equiv \pm 1$ (§. 43.) prouti δ est impar vel par.

Congruentia $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (m. p) admittit $\frac{p-1}{2}$ radices, quae omnes residua ipsius p sunt quadratica ex quo sequitur theorema §. 44.

§. 59. Summa omnium radicum congruentiae $x^n \equiv 1$ (m. p) semper per modulum divisibilis est.

Pertineat w ad exponentem δ statimque propositio sequitur ex §. 57. quoniam in hocce casu $w-1$ tanquam minor quam p ad p est primus.

§. 60. Summa quadratorum omnium numerorum, qui congruentiae $x^n \equiv 1$ (mod. p) satisfaciunt semper per modulum p divisibilis est, dummodo excipietur casus, in quo congruentia duas tantummodo admittit radices.

1. Sit δ i. e. divisor communis maximus numerorum n et $p-1$ impar. Radices deinde congruentiae nostrae sint w, w', w'', w''' etc. eruntque etiam hae radices w^2, w'^2, w''^2, w'''^2, etc. et quidem omnes sunt incongruae. Nam si haberetur $w^2 \equiv w'^2$ esset $(w-w')(w+w')$ ergo $w+w'$ per p divisibilis vel $w \equiv -w'$ (mod. p), ita ut etiam $-w'$ esset radix. Jam n erit impar, nam si esset par, quia etiam $p-1$ par numerum δ tanquam imparem et $\frac{1}{2}n$ et $\frac{1}{2}(p-1)$ metiri oporteret quo facto 2δ numeros n et $p-1$ metiretur contra hyp. quia δ est maximus ipsorum n et $p-1$ divisor communis. Quia igitur n impar erit $(-w')^n \equiv -w'^n \equiv -1$ neque vero $-w'$ satisfaciet congruentiae nostrae contra praeced. Quadratis igitur w^2, w'^2, w''^2, w'''^2, etc. exhibentur omnes radices diversae adeoque

$$w + w' + w'' \text{ etc.} \equiv w^2 + w'^2 + w''^2 \text{ etc.}$$

Atqui $w + w' + w''$ etc. (§. 59.) per p divisibilis est, ergo etiam $w^2 + w'^2 + w''^2$ etc.

2. Sint denuo radices congruentiae $x^n \equiv 1$ (mod. p) vel quod idem valet hujusce $x^\delta \equiv 1$ (mod. p) w, w', w'', w''' etc. atque δ par. Congruentiae $(x^2)^{\frac{1}{2}\delta} \equiv 1$ satisfaciunt $\frac{1}{2}\delta$ radices incongruae, quarum summa (§. 59.) per modulum erit divisibilis. Hae radices manifesto inter has

$$w^2, w'^2, w''^2, w'''^2, \ldots$$

inveniuntur. Quae quum omnia quadrata congruentiae $(x^2)^{\frac{1}{2}\delta} \equiv 1$ satisfaciant, erit perspicuum hanc quadratorum summam congruam esse duplo radicum congruentiae $(x^2)^{\frac{1}{2}\delta} \equiv 1$, quae sec. p sint incongruae. Hoc vero duplum per p divisibilis est, ergo etiam summa quadratorum radicum congruentiae $x^\delta \equiv 1$.

Pro $\frac{1}{2}\delta = 1$ theorema non valere facile perspicietur.

§. 61. Productum ex omnibus numeris ad eundem exponentem t pertinentibus unitati congruum est sec. mod. p^n vel $2p^n$, denotante p numerum primum imparem, excepto casu in quo $t=2$. Tum enim unus modo exstat numerus, ab 1 diversus.

Pertineat a ad exponentem t secund. modulum p^n vel $2p^n$,

quem brev. grat. per m designabimus. Tum numeris ad t primis eoque non majoribus designatis per

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_\mu$$

omnes ad exponentem t pertinentes numeri exhibentur potestatibus (§. 21.)

$$a^{\theta_1}, a^{\theta_2}, a^{\theta_3}, \ldots a^{\theta_\mu}$$

quam ob rem productum erit congruum huic potestati

$$a^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_\mu}$$

sec. mod. m. Jam vero $\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots+\Theta_\mu \equiv 0$ (mod. t) (§. 37.) atque $a^t \equiv 1$ (mod. m) ergo etiam $a^{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_\mu} \equiv 1$ (mod. m).

Coroll. Quando a ad exponentem $p^{n-1}(p-1)$ pertinet vel radix est primitiva hoc theorema ita enunciari oportebit:

Productum ex omnibus radicibus primitivis unitati congruum est sec. mod. p^n vel $2p^n$ excepto casu in quo $p=3$.

§.62. Summa omnium numerorum ad eundem exponentem t pertinentium sec. modulum p designante p numerum primum est $\equiv 0$, quando t per quadratum aliquod divisibilis est, quando vero t per nullum quadratum dividi poterit, summa erit $\equiv \pm 1$ prouti multitudo factorum primorum ipsius t est $\begin{matrix}\text{par}\\ \text{impar}\end{matrix}$.

Demonstratio.

Primus casus. Factore primo aliquo cujus quadratum exponentem t metiatur, per α designato dico si k sit numerus ad t primus etiam $k+\frac{t\varphi}{\alpha}$ ad t primum fore, designante φ numerum integrum quencunque. Nam primum numeri t, $k+\frac{t\varphi}{\alpha}$ factorem α non simul involvent, quandoquidem $\frac{t\varphi}{\alpha}$ ex hyp. per α divisibilis est ergo si fieri posset, numeri t, k factorem communem α involverent contra ea, quae supposuimus. Quodsi numeri de quibus agitur alium factorem primum communem Θ haberent, tum esset $k+\frac{t\varphi}{\alpha} \equiv 0$ (mod. Θ). adeoque $\alpha k+t\varphi \equiv 0$, metireturque Θ productum αk ergo k quia Θ ab α diversus est. Tum autem denuo k et t non essent primi inter se. Ex quo sequitur omnes hos numeros

$$k,\ k+\frac{t}{\alpha},\ k+\frac{2t}{\alpha},\ k+\frac{3t}{\alpha}, \ldots k+\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}$$

ad ipsum t fore primos. Jam sit a numerus ad exponentem t pertinens pertinebuntque (§. 21.) omnes hi ad eundem exponentem

$$a^k,\ a^{k+\frac{t}{\alpha}},\ a^{k+\frac{2t}{\alpha}},\ a^{k+\frac{3t}{\alpha}}, \ldots a^{k+\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}$$

quorum multitudo est α.

Summam horum ita exhiberi licet

$$a^k(1+a^{\frac{t}{\alpha}}+a^{\frac{2t}{\alpha}}+a^{\frac{3t}{\alpha}}+\ldots+a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}})$$

Jam vero omnes hi $a^{\frac{t}{\alpha}}, a^{\frac{2t}{\alpha}}, a^{\frac{3t}{\alpha}}, \ldots a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}$ sec. mod. prop. sunt incongrui; nam si haberetur $a^{\frac{mt}{\alpha}} \equiv a^{\frac{m't}{\alpha}}$ ita ut nullus numerorum m, m' hunc $\alpha - 1$ superaret, esset $a^{(m-m')\frac{t}{\alpha}} \equiv 1$; atqui $m - m' < \alpha$, $(m - m')\frac{t}{\alpha} < t$, quo facto inferior ipsius a potestas quam t^{ta} unitati congrua fieret contra hyp. Termini igitur

$$a^{\frac{t}{\alpha}}, a^{\frac{2t}{\alpha}}, a^{\frac{3t}{\alpha}}, \ldots a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}}, 1$$

periodum constituent. Sed numerum $a^{\frac{t}{\alpha}}$ ipso p minorem accipere oportebit. Si enim $a^{\frac{t}{\alpha}} + mp$ ad exponentem α pertinet etiam $a^{\frac{t}{\alpha}}$ ad eundem pertinebit, quandoquidem si $a^{\frac{t}{\alpha}}$ ad $\alpha' < \alpha$ pertineret, manifesto jam potestas $(a^{\frac{t}{\alpha}} + mp)^{\alpha'}$ unitati esset congrua. Erit igitur $a^{\frac{t}{\alpha}} - 1$ ad p primus adeoque (§. 57.) summa terminorum quos modo diximus per p erit divisibilis, ergo etiam

$$a^k(1 + a^{\frac{t}{\alpha}} + a^{\frac{2t}{\alpha}} + \ldots + a^{\frac{t(\alpha-1)}{\alpha}}).$$

Quia α^2 est divisor exponentis t multitudo numerorum ad t primorum ipsius α erit multiplum; quando autem alius numerus ad t primus ab illorum

$$k,\ k + \frac{t}{\alpha},\ k + \frac{2t}{\alpha}, \ldots k + \frac{(\alpha - 1)t}{\alpha}$$

quoque diversus k' assumitur, simili modo productum

$$a^{k'}(1 + a^{\frac{t}{\alpha}} + a^{\frac{2t}{\alpha}} + \ldots + a^{\frac{(\alpha-1)t}{\alpha}})$$

per p divisibilis erit. Hoc modo progredi licebit, quoad omnes ad t primi sunt exhausti, quo facto omnes habebuntur numeri ad exponentem t pertinentes, quorumque summa per p divisibilis erit.

Secundus casus. Sit t per nullum quadratum divisibilis vel formae $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, denotantibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ numeros primos inter se diversos. Sed pro quattuor modo factoribus demonstraturos nos esse theorema observandum est, quandoquidem nihil impediet, quominus argumentatio ad quotcunque extendatur factores. Dico productum

$$(a^{\alpha\beta\gamma} + a^{2\alpha\beta\gamma} + a^{3\alpha\beta\gamma} + \ldots + a^{(\delta-1)\alpha\beta\gamma})$$
$$(a^{\alpha\beta\delta} + a^{2\alpha\beta\delta} + a^{3\alpha\beta\delta} + \ldots + a^{(\gamma-1)\alpha\beta\delta})$$
$$(a^{\alpha\gamma\delta} + a^{2\alpha\gamma\delta} + a^{3\alpha\gamma\delta} \text{ etc. } + a^{(\beta-1)\alpha\gamma\delta})$$
$$(a^{\beta\gamma\delta} + a^{2\beta\gamma\delta} + a^{3\beta\gamma\delta} \text{ etc. } + a^{(\alpha-1)\beta\gamma\delta})$$

designante a numerum ad exponentem t pertinentem summae omnium numerorum ad exponentem t pertinentium sec. p esse congruum. Quencunque enim hujusce producti terminum exhiberi licet hoc modo

$$a^{\psi\alpha\beta\gamma+\psi'\alpha\beta\delta+\psi''\alpha\gamma\delta+\psi'''\beta\gamma\delta}$$

quam formam habere facile perspicietur. Cujus potestatis exponens ad $t=\alpha\beta\gamma\delta$ primus erit, quoniam nullus horum α, β, γ, δ metiri eum potest. Omnes igitur producti de quo agitur termini ad exponentem t pertinent (§. 21.) et quidem omnes sunt incongrui. Nam si haberetur

$$a^{\psi\alpha\beta\gamma+\psi'\alpha\beta\delta+\psi''\alpha\gamma\delta+\psi'''\beta\gamma\delta} \equiv a^{\chi\alpha\beta\gamma+\chi'\alpha\beta\delta+\chi''\alpha\gamma\delta+\chi'''\beta\gamma\delta}$$

esset (§. 10.)

$$(\psi-\chi)\alpha\beta\gamma+(\psi'-\chi')\alpha\beta\delta+(\psi''-\chi'')\alpha\gamma\delta+(\psi'''-\chi''')\beta\gamma\delta\equiv 0$$

secundum modulum t. Atqui ex. gr. $\psi<\delta$, $\chi<\delta$, $\psi-\chi<\delta$, et $(\psi-\chi)\alpha\beta\gamma$ per δ non divisibilis neque vero summa de qua agitur, adeoque haec summa etiam per t dividi nequit. Jam vero multitudo illius producti terminorum, ut ex combinationum doctrina patet, erit $(\alpha-1)$ $(\beta-1)$ $(\gamma-1)$ $(\delta-1)$ atque etiam multitudo numerorum ad t primorum est $(\alpha-1)$ $(\beta-1)$ $(\gamma-1)$ $(\delta-1)$, qua re omnes omnino ad exponentem t pertinentes numeri producto exhibentur.

Quia a ad exponentem $t=\alpha\beta\gamma\delta$ pertinet, termini

$$a^{\alpha\beta\gamma},\ a^{2\alpha\beta\gamma},\ a^{3\alpha\beta\gamma},\ldots a^{(\delta-1)\alpha\beta\gamma},\ 1$$

periodum constituent, et quoniam ut antea $a^{\alpha\beta\gamma}-1$ ad p primum accipi licet, summa horum per p divisibilis erit, adeoque

$$a^{\alpha\beta\gamma}+a^{2\alpha\beta\gamma}+a^{3\alpha\beta\gamma}+\ldots+a^{(\delta-1)\alpha\beta\gamma}\equiv -1 \text{ (mod. } p)$$

Ex eadem causa reliquorum factorum quisque unitati negative sumptae est congruus. Quando igitur multitudo factorum α, β, γ, δ... est par, productum i. e. summa omnium numerorum, qui ad exponentem t pertinent, unitati positive sumptae congruum fit, quando vero impar unitati negative sumptae. In nostro quidem casu unitas positive erit sumenda.

Exempl. Ad exponentem 6 sec. mod. 19 pertinent numeri 8, 12 quorum summa $\equiv 1$ (mod. 19).

Coroll. Quando $t=p-1$ theorema ita debebit enunciari: Summa omnium radicum primitivarum moduli primi est $\equiv 0$ quando $p-1$ per quadratum aliquod divisibilis est, quando vero per nullum quadratum divisibilis summa erit $\equiv\pm 1$ prouti multitudo factorum ipsius $p-1$ primorum est $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{par}}{\text{impar}}$.

Exempl. 2 est radix primitiva mod. 19 et 18 per quadratum divisibilis, qua re summa radicum primitivarum

$$2^1 . 2^5 . 2^7 . 2^{11} . 2^{13} . 2^{17}$$

per 19 divisibilis.

§. 63. Hancce opportunitatem praetermittere non debeo, quin theorema demonstrem, quod primo quidem aspectu demonstratu difficillimum videtur. Est vero hoc: -3 est residuum quadraticum numeri cujusque primi, qui forma continetur $12k+7$ vel $12k+1$, non-residuum vero formarum $12k+5$, $12k+11$. Quo facto sequitur ex. §.31., 3 fore residuum numeri primi

formae $12k+1$ vel $12k+11$, non-residuum vero harum $12k+5$, $12k+7$.

Primo observamus ad exponentem 3 pertinere duos numeros, quoniam tot sunt ad 3 primi. Debet autem 3 ipsum $p-1$ metiri, designante p modulum primum, qua re p erit formae $3k+1$, quae has involvit $12k+1$, $12k+7$. Numeri ad exponentem 3 pertinentes sec. mod. $p=12k+1$, 7 sint α, β eritque (§. 62.) $\alpha+\beta\equiv-1$ atque (§. 61.) $\alpha\beta\equiv 1$ sec. p. Ex quo sequitur $\beta^2+\beta\equiv-1$, $4\beta^2+4\beta\equiv-4$, $4\beta^2+4\beta+1\equiv-3$ i. e. $(2\beta+1)^2\equiv-3$. Quando igitur 3 ipsum $p-1$ metiatur i. e. quando p est unius formarum $12k+1$, $12k+7$ semper -3 erit residuum quadraticum hujusce numeri primi.

Ceterum observari licet, semper numeros ad exponentem 3 pertinentes inveniri posse. Repertis enim residuis mod. p quadraticis, intelligetur, quod quadratum residuo -3 vel $p-3$ respondeat; hujus radix sit w eritque $2\beta+1\equiv\pm w$ (mod. p), quae congruentia primi gradus facillime poterit resolvi.

Exempli gr. Ut numeri ad exp. 3 sec. 31 determinentur pertinentes residua inveniri quadratica mod. 31 oportebit. Sunt haec 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 5 . 18 . 2 . 19 . 7 . 28 . 20 . 14 . 10 . 8. Residuo 28 respondebit quadratum 11^2 ergo congruentia resolvenda

$$2\beta+1\equiv\pm 11 \text{ (mod. 31)}.$$

$$\text{Est vero } 2\beta\equiv\left.\begin{matrix}10\\-12\end{matrix}\right\},\ \beta\equiv\left.\begin{matrix}5\\-6\end{matrix}\right\}\text{ vel }\left.\begin{matrix}5\\25\end{matrix}\right\}$$

ita ut 5 et 25 ad exponentem 3 sec. mod. 21 pertineant.

II.

Ueber Cauchy's Interpolationsmethode.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Interpolationen sind für die Physik und Astronomie, überhaupt für alle Naturwissenschaften, welche die Anwendung der Mathematik gestatten, von so grosser Wichtigkeit, dass jeder Versuch, die bei denselben vorkommenden Rechnungen zu erleichtern und überhaupt die Methode im Allgemeinen zu vervollkommnen, willkommen sein muss. Cauchy's von Herrn Moigno in seinen Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'a-

près les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A.-L. Cauchy. Tome I. Paris. 1840. p. 513 mitgetheilte Interpolationsmethode scheint uns in den vorher angedeuteten Beziehungen so Vieles zu leisten, überhaupt in jeder Rücksicht so vortrefflich, in Deutschland aber noch so wenig bekannt zu sein, dass wir es für unsere Pflicht halten, durch eine ausführliche und deutliche Darstellung derselben, die wir in diesem Aufsatze zu geben versuchen werden, zu ihrer möglichst allgemeinen Verbreitung nach Kräften beizutragen, wobei wir zugleich auch vorläufig bemerken, dass wir bald in einem andern Aufsatze eine von uns versuchte Anwendung dieser schönen Methode auf einen physikalischen Gegenstand mittheilen zu können hoffen.

§. 2.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, dass die von der veränderlichen Grösse x abhängende Function y sich, indem

$$u, v, w, z, \ldots .$$

gewisse ihrer Form nach gegebene Functionen von x, und

$$a, b, c, d, \ldots .$$

gewisse constante, ihren Werthen nach aber unbekannte Coefficienten bezeichnen, in die convergirende Reihe

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots ..$$

entwickeln lasse, und stellen uns, wenn eine hinreichende Anzahl aus Versuchen oder Beobachtungen abgeleiteter Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_n$$

der Function y gegeben ist, welche den ebenfalls gegebenen Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n$$

der veränderlichen Grösse x entsprechen, die Aufgabe:

1) zu ermitteln, wie viele Glieder der Reihe

$$au, bv, cw, dz, \ldots .$$

vom Anfange an man beibehalten muss, um durch deren Summirung einen hinreichend genäherten Werth der Function y zu erhalten, dessen Abweichung von dem wahren Werthe dieser Function als unmerklich betrachtet werden kann, d. h. sich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler hält;

2) die Werthe der constanten Coefficienten

$$a, b, c, d, \ldots .$$

der beibehaltenen Glieder der obigen Reihe zu bestimmen.

§. 3.

Zuvörderst wollen wir die Bedeutung einer Bezeichnung erklären, von welcher wir im Folgenden der Kürze wegen häufig Gebrauch machen werden.

Wenn nämlich

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n$$

und

$$v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots v_n$$

überhaupt gewisse gegebene Grössen, in beiden Reihen in gleicher Anzahl, bezeichnen; so soll den Symbolen Su_n und Σv_n immer die folgende Bedeutung beigelegt werden. Das Symbol Su_n bezeichnet jederzeit die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n,$$

wobei man sich jedoch diese Summe immer auf solche Weise gebildet zu denken hat, dass man die Grössen

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n,$$

jenachdem sie positiv oder negativ sind, mit $+1$ oder mit -1 multiplicirt und alle auf diese Art erhaltenen Producte zu einander addirt. Wenn man nun aber ferner ganz mit denselben Factoren, mit denen man vorher die Grössen

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots. u_n$$

multiplicirt hat, dann auch respective die Grössen

$$v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots. v_n$$

multiplicirt, und alle auf diese Art sich ergebenden Producte zu einander addirt; so soll die Summe, welche man dadurch erhält, im Folgenden immer durch Σv_n bezeichnet werden, wobei man also wohl fest zu halten hat, dass Σv_n keinesweges die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots. v_n$$

bezeichnet. In einem ähnlichen Verhältnisse wie die durch Su_n und Σv_n bezeichneten Grössen, sollen im Folgenden auch die durch $S_1 u_n$ und $\Sigma_1 v_n$, $S_2 u_n$ und $\Sigma_2 v_n$, $S_3 u_n$ und $\Sigma_3 v_n$, u. s. w. oder ähnliche Symbole bezeichneten Grössen zu einander stehen.

§. 4.

Indem wir nun der Auflösung unserer Aufgabe näher treten, bemerken wir zuvörderst sogleich, dass die Bedingungen derselben wegen der vorausgesetzten Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.,$$

wenn wir die den Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots. x_n$$

der veränderlichen Grösse x entsprechenden Werthe der Functionen

$$u, v, w, z, \ldots.$$

durch

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots. u_n;$$

$$v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots. v_n;$$

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4, \ldots .\ w_n;$$

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4, \ldots .\ z_n;$$

u. s. w.

bezeichnen, zwischen den constanten Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots$$

unmittelbar die folgenden n Gleichungen:

$$y_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 + dz_1 + \ldots,$$
$$y_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 + dz_2 + \ldots,$$
$$y_3 = au_3 + bv_3 + cw_3 + dz_3 + \ldots,$$

u. s. w.

$$y_n = au_n + bv_n + cw_n + dz_n + \ldots:$$

liefern, welche in Bezug auf a, b, c, d, ... als Gleichungen des ersten Grades oder sogenannte lineare Gleichungen zu betrachten sind.

Vernachlässigen wir nun als eine erste Annäherung vorläufig die sämmtlichen Coefficienten b, c, d, ..., oder reduciren wir, was dasselbe ist, die Reihe, durch welche y ausgedrückt wird, auf ihr erstes Glied; so ist

$$y = au$$

der allgemeine genäherte Werth von y, und wir haben daher jetzt das folgende System von Gleichungen:

$$y_1 = au_1,\ y_2 = au_2,\ y_3 = au_3, \ldots y_n = au_n.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen auf beiden Seiten mit gewissen willkührlichen Coefficienten, nämlich respective mit den Coefficienten

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4 \ldots .\ k_n;$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$ak_1u_1 = k_1y_1,$$
$$ak_2u_2 = k_2y_2,$$
$$ak_3u_3 = k_3y_3,$$

u. s. w.

$$ak_nu_n = k_ny_n;$$

durch deren Addition sich ferner die Gleichung

$$a(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n)$$
$$= k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n,$$

also

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n}$$

ergiebt. Bezeichnen wir nun die in den durch Versuche oder Beobachtungen gefundenen Werthen

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \ldots y_n$$

von y steckenden Fehler respective durch

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4, \ldots \varepsilon_n,$$

so dass also die wahren entsprechenden Werthe von y

$$y_1 + \varepsilon_1,\ y_2 + \varepsilon_2,\ y_3 + \varepsilon_3, \ldots y_n + \varepsilon_n$$

sind: so ist nach dem Vorhergehenden der wahre Werth von a offenbar eigentlich

$$\frac{k_1(y_1 + \varepsilon_1) + k_2(y_2 + \varepsilon_2) + k_3(y_3 + \varepsilon_3) + \ldots + k_n(y_n + \varepsilon_n)}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n},$$

und der in der Bestimmung

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n}$$

von a steckende Fehler ist daher augenscheinlich

$$\frac{k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 + \ldots + k_n\varepsilon_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n}.$$

Die Coefficienten

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4, \ldots k_n$$

sind allerdings ganz willkührlich; jedoch hat man des Folgenden wegen zu beachten, dass man den absoluten Werth keines derselben grösser als die Einheit anzunehmen braucht, weil es, um dies in allen Fällen zu bewirken, bloss nöthig ist, dass man alle Coefficienten durch den absoluten Werth desjenigen unter ihnen, welcher den grössten absoluten Werth hat, dividirt, wodurch der Werth von a und des in demselben steckenden Fehlers offenbar gar keine Aenderung erleidet.

Bei der absoluten Unkenntniss, in welcher man sich rücksichtlich der Fehler

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4, \ldots \varepsilon_n$$

befindet, kann man nun, um die willkührlichen Coefficienten

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4, \ldots k_n$$

auf die vortheilhafteste Weise zu bestimmen, offenbar nichts weiter thun, als dass man dieselben so zu bestimmen sucht, dass der absolute Werth des Nenners des Bruchs

$$\frac{k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 + \ldots + k_n\varepsilon_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n},$$

durch welchen der in der Bestimmung

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n}$$

von a steckende Fehler im Allgemeinen ausgedrückt wird, seinen grössten Werth erhält. Dies erreicht man aber dadurch, dass man die in Rede stehenden Coefficienten so bestimmt, dass der Nenner

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n$$

in die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4, \ldots u_n$$

übergeht, d. h. man muss für

$$k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots k_n$$

die Grösse $+1$ oder -1 setzen, jenachdem die Grössen

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n$$

positiv oder negativ sind, wobei zugleich erhellet, dass wenn man dies thut, auch der absolute Werth des Zählers

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 + \ldots + k_n\varepsilon_n$$

nie die Summe der absoluten Werthe der Grössen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots \varepsilon_n,$$

d. h. das Maximum, welches dieser absolute Werth überhaupt erreichen kann *), übersteigt. Wendet man also jetzt die Bezeichnung, deren Bedeutung im vorigen Paragraphen ausführlich erklärt worden ist, an; so liefert wegen der oben bewiesenen Gleichung

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 + \ldots + k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n}$$

offenbar die Formel

$$a = \frac{\Sigma y_n}{Su_n}$$

die vortheilhafteste Bestimmung von a, so weit sich wenigstens bei der völligen Unkenntniss, in welcher man sich rücksichtlich der Werthe der Fehler

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots \varepsilon_n$$

befindet, hierüber urtheilen lässt, und für y erhält man nun den genäherten Ausdruck

$$y = \frac{\Sigma y_n}{Su_n} u,$$

oder, wenn

$$u' = \frac{u}{Su_n}$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$y = u'\Sigma y_n.$$

Wäre überhaupt $u = 1$, also $y = a$, d. h. y eine constante Grösse, wenigstens näherungsweise, so wäre offenbar

$$Su_n = n,$$

und folglich $u' = \frac{1}{n}$, also

$$y = \frac{1}{n} \Sigma y_n,$$

d. i., weil in diesem Falle offenbar

---

*) Wo man fest zu halten hat, dass nach dem Obigen in allen Fällen der absolute Werth keines der Coefficienten $k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots k_n$ grösser als die Einheit angenommen zu werden braucht.

$$\Sigma y_n = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n$$

ist,

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_n}{n},$$

wodurch wir also in dem vorliegenden Falle unmittelbar auf das bekannte Princip des arithmetischen Mittels, dessen man sich in den Naturwissenschaften so häufig bedient, geführt werden.

Wir wollen jetzt in völliger Genauigkeit

$$y = u' \Sigma y_n + \Delta y,$$

also

$$\Delta y = y - u' \Sigma y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x entsprechenden Werthe von Δy, die sich, weil man die den in Rede stehenden Werthen von x entsprechenden Werthe von y und u kennt, mittelst des obigen Ausdrucks von Δy jederzeit berechnen lassen, respective durch

$$\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \Delta y_4, \ldots \Delta y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d, ..., nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$y = u' \Sigma y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man weiter das folgende Verfahren einschlagen.

Weil

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma y_n = a\, \Sigma u_n + b\, \Sigma v_n + c\, \Sigma w_n + d\, \Sigma z_n + \ldots.,$$

und folglich, wenn man

$$v = u' \Sigma v_n + \Delta v,$$
$$w = u' \Sigma w_n + \Delta w,$$
$$z = u' \Sigma z_n + \Delta z,$$

u. s. w.

setzt, da offenbar jederzeit

$$\Sigma u_n = S u_n,$$

also nach dem Obigen

$$u' \Sigma u_n = u' S u_n = u$$

ist,

$$\Delta y = b\, \Delta v + c\, \Delta w + d\, \Delta z + \ldots.$$

und folglich, wenn man

$$\Delta^3 x = w' \Sigma_3 \Delta^3 x_n + \Delta^4 x,$$

u. s. w.

setzt, da offenbar

$$\Sigma_3 \Delta^3 w_n = S_3 \Delta^3 w_n,$$

also nach dem Obigen

$$w' \Sigma_3 \Delta^3 w_n = w' S_3 \Delta^3 w_n = \Delta^3 w$$

ist.

$$\Delta^4 y = d\Delta^4 x + \ldots\ldots$$

Die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots .\ x_n$$

...echenden Werthe von $\Delta^4 x, \ldots,$ welche wir respective

$$\Delta^4 x_1,\ \Delta^4 x_2,\ \Delta^4 x_3,\ \Delta^4 x_4,\ \ldots \Delta^4 x_n;$$

u. s. w.

...ollen, kann man mittelst der Formeln

$$\Delta^4 x = \Delta^3 x - w' \Sigma_3 \Delta^3 x_n,$$

u. s. w.

...echnen, und kann also auf die Gleichung

$$\Delta^4 y = d\Delta^4 x + \ldots\ldots$$

ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches wir oben ...hung

$$y = au + bv + cw + dx + \ldots .$$

...ben. Wir werden nämlich

$$d = \frac{\Sigma_4 \Delta^4 y_n}{S_4 \Delta^4 x_n}$$

$$\Delta^4 y = \frac{\Sigma_4 \Delta^4 y_n}{S_4 \Delta^4 x_n} \Delta^4 x,$$

...er Kürze wegen

$$x' = \frac{\Delta^4 x}{S_4 \Delta^4 x_n}$$

$$\Delta^4 y = x' \Sigma_4 \Delta^4 y_n,$$

$$\ldots u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n + x' \Sigma_4 \Delta^4 y_n$$

...nauigkeit wollen wir nun aber

$$\Delta^4 y = x' \Sigma_4 \Delta^4 y_n + \Delta^5 y,$$

Die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots . x_n$$

von x entsprechenden Werthe von Δv, Δw, Δz, ..., welche wir respective durch

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \Delta v_3,\ \Delta v_4, \ldots \Delta v_n;$$
$$\Delta w_1,\ \Delta w_2,\ \Delta w_3,\ \Delta w_4, \ldots \Delta w_n;$$
$$\Delta z_1,\ \Delta z_2,\ \Delta z_3,\ \Delta z_4, \ldots \Delta z_n;$$

u. s. w.

bezeichnen wollen, kann man mittelst der Formeln

$$\Delta v = v - u'\Sigma v_n,$$
$$\Delta w = w - u'\Sigma w_n,$$
$$\Delta z = z - u'\Sigma z_n,$$

u. s. w.

jederzeit berechnen, und kann also auf die Gleichung

$$\Delta y = b\Delta v + c\Delta w + d\Delta z + \ldots .$$

jetzt offenbar wieder ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches wir vorher auf die Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots .$$

angewandt haben. Wir werden nämlich

$$b = \frac{\Sigma_1 \Delta y_n}{S_1 \Delta v_n}$$

und

$$\Delta y = \frac{\Sigma_1 \Delta y_n}{S_1 \Delta v_n} \Delta v,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$v' = \frac{\Delta v}{S_1 \Delta v_n}$$

gesetzt wird,

$$\Delta y = v'\Sigma_1 \Delta y_n,$$

also näherungsweise

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen.

In völliger Genauigkeit wollen wir nun aber

$$\Delta y = v'\Sigma_1 \Delta y_n + \Delta^2 y,$$

also

$$\Delta^2 y = \Delta y - v'\Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots . x_n$$

von x entsprechenden Werthe von $\Delta^2 y$, die sich mittelst des obigen Ausdrucks dieser Grösse immer berechnen lassen, respective durch

$$\Delta^2 y_1, \ \Delta^2 y_2, \ \Delta^2 y_3, \ \Delta^2 y_4, \ldots \Delta^2 y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d, ... nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$\Delta y = v' \Sigma_1 \Delta y_n,$$

also

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man ferner das folgende Verfahren einschlagen.

Weil

$$\Delta y = b\Delta v + c\Delta w + d\Delta z + \ldots.$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma_1 \Delta y_n = b\Sigma_1 \Delta v_n + c\Sigma_1 \Delta w_n + d\Sigma_1 \Delta z_n + \ldots,$$

und folglich, wenn man

$$\Delta w = v' \Sigma_1 \Delta w_n + \Delta^2 w,$$
$$\Delta z = v' \Sigma_1 \Delta z_n + \Delta^2 z,$$
u. s. w.

setzt, da offenbar

$$\Sigma_1 \Delta v_n = S_1 \Delta v_n,$$

also nach dem Obigen

$$v' \Sigma_1 \Delta v_n = v' S_1 \Delta v_n = \Delta v$$

ist,

$$\Delta^2 y = c\Delta^2 w + d\Delta^2 z + \ldots.$$

Die den Werthen

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ldots . x_n$$

von x entsprechenden Werthe von $\Delta^2 w$, $\Delta^2 z$, ..., welche wir respective durch

$$\Delta^2 w_1, \ \Delta^2 w_2, \ \Delta^2 w_3, \ \Delta^2 w_4, \ldots \Delta^2 w_n;$$
$$\Delta^2 z_1, \ \Delta^2 z_2, \ \Delta^2 z_3, \ \Delta^2 z_4, \ldots \Delta^2 z_n;$$
u. s. w.

bezeichnen wollen, kann man mittelst der Formeln

$$\Delta^2 w = \Delta w - v' \Sigma_1 \Delta w_n,$$
$$\Delta^2 z = \Delta z - v' \Sigma_1 \Delta z_n,$$
u. s. w.

leicht berechnen, und kann also auf die Gleichung

$$\Delta^2 y = c\Delta^2 w + d\Delta^2 z + \ldots.$$

jetzt wieder ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches wir oben auf die Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots .$$

angewandt haben. Wir werden nämlich

$$c = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 w_n}$$

und

$$\Delta^2 y = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 w_n} \Delta^2 w,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2 \Delta^2 w_n}$$

gesetzt wird,

$$\Delta^2 y = w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n,$$

also näherungsweise

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen.

In völliger Genauigkeit wollen wir nun aber

$$\Delta^2 y = w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n + \Delta^3 y,$$

also

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y - w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots x_n$$

von x entsprechenden Werthe von $\Delta^3 y$, die sich mittelst des obigen Ausdrucks dieser Grösse immer berechnen lassen, respective durch

$$\Delta^3 y_1,\ \Delta^3 y_2,\ \Delta^3 y_3,\ \Delta^3 y_4, \ldots \Delta^3 y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d, ... nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$\Delta^2 y = w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n,$$

also

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man weiter auf folgende Art verfahren.

Weil

$$\Delta^2 y = c \Delta^2 w + d \Delta^2 z + \ldots .$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma_2 \Delta^2 y_n = c \Sigma_2 \Delta^2 w_n + d \Sigma_2 \Delta^2 z_n + \ldots .,$$

und folglich, wenn man

$$\Delta^2 z = w' \Sigma_2 \Delta^2 z_n + \Delta^3 z,$$

u. s. w.

setzt, da offenbar

$$\Sigma_2 \Delta^2 w_n = S_2 \Delta^2 w_n,$$

also nach dem Obigen

$$w' \Sigma_2 \Delta^2 w_n = w' S_2 \Delta^2 w_n = \Delta^2 w$$

ist,

$$\Delta^2 y = d\Delta^3 z + \ldots\ldots$$

Die den Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x entsprechenden Werthe von $\Delta^3 z, \ldots,$ welche wir respective durch

$$\Delta^3 z_1, \Delta^3 z_2, \Delta^3 z_3, \Delta^3 z_4, \ldots \Delta^3 z_n;$$

u. s. w.

bezeichnen wollen, kann man mittelst der Formeln

$$\Delta^3 z = \Delta^2 z - w' \Sigma_2 \Delta^2 z_n,$$

u. s. w.

jederzeit berechnen, und kann also auf die Gleichung

$$\Delta^3 y = d\Delta^3 z + \ldots\ldots$$

jetzt wieder ganz dasselbe Verfahren anwenden, welches wir oben auf die Gleichung

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots.$$

angewandt haben. Wir werden nämlich

$$d = \frac{\Sigma_3 \Delta^3 y_n}{S_3 \Delta^3 z_n}$$

und

$$\Delta^3 y = \frac{\Sigma_3 \Delta^3 y_n}{S_3 \Delta^3 z_n} \Delta^3 z,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$z' = \frac{\Delta^3 z}{S_3 \Delta^3 z_n}$$

gesetzt wird,

$$\Delta^3 y = z' \Sigma_3 \Delta^3 y_n,$$

also näherungsweise

$$y = u' \Sigma y_n + v' \Sigma_1 \Delta y_n + w' \Sigma_2 \Delta^2 y_n + z' \Sigma_3 \Delta^3 y_n.$$

setzen.

In völliger Genauigkeit wollen wir nun aber

$$\Delta^3 y = z' \Sigma_3 \Delta^3 y_n + \Delta^4 y,$$

also

$$\Delta^4 y = \Delta^3 y - z'\Sigma_3 \Delta^3 y_n$$

setzen, und wollen die den Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

von x entsprechenden Werthe von $\Delta^4 y$, die sich mittelst des obigen Ausdrucks dieser Grösse immer berechnen lassen, respective durch

$$\Delta^4 y_1, \Delta^4 y_2, \Delta^4 y_3, \Delta^4 y_4, \ldots \Delta^4 y_n$$

bezeichnen. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so braucht man mit der Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d, ... nicht weiter vorzuschreiten, und kann mit hinreichender Annäherung

$$\Delta^3 y = z'\Sigma_3 \Delta^3 y_n,$$

also

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n + w'\Sigma_2 \Delta^2 y_n + z'\Sigma_3 \Delta^3 y_n$$

setzen. Halten sich aber die in Rede stehenden Grössen nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, so muss man wieder ein ganz ähnliches Verfahren wie oben anwenden, und auf diese Art überhaupt immer weiter gehen, bis man auf eine Reihe von Grössen von der Form

$$\Delta^m y_1, \Delta^m y_2, \Delta^m y_3, \Delta^m y_4, \ldots \Delta^m y_n$$

kommt, die sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten.

§. 5.

Wir wollen nun die Hauptmomente der vorhergehenden Interpolationsmethode hier nochmals in der Kürze übersichtlich zusammenfassen, ohne die Erklärung der Bedeutung der gebrauchten Symbole zu wiederholen.

1. Angenommen wird, dass die Function y sich in eine convergirende Reihe von der Form

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots$$

entwickeln lässt, und dass die den n gegebenen Werthen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

der veränderlichen Grösse x, von welcher die Function y und die Functionen u, v, w, z, ..., abhängen, entsprechenden Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_n$$

der Function y gegeben sind.

2. Dies vorausgesetzt, bestimme man zuerst die Grösse u' mittelst der Formel

$$u' = \frac{u}{Su_n}$$

und die Grössen

$$\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \Delta y_4, \ldots \Delta y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta y = y - u'\Sigma y_n,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = u'\Sigma y_n$$

setzen.

3. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man Δv und v' mittelst der Formeln

$$\Delta v = v - u'\Sigma v_n,\ v' = \frac{\Delta v}{S_1 \Delta v_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \Delta^2 y_3,\ \Delta^2 y_4,\ \ldots\ \Delta^2 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^2 y = \Delta y - v'\Sigma_1 \Delta y_n,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n$$

setzen.

4. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man Δw, $\Delta^2 w$ und w' mittelst der Formeln

$$\Delta w = w - u'\Sigma w_n,\ \Delta^2 w = \Delta w - v'\Sigma_1 \Delta w_n,\ w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2 \Delta^2 w_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^3 y_1,\ \Delta^3 y_2,\ \Delta^3 y_3,\ \Delta^3 y_4,\ \ldots\ \Delta^3 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y - w'\Sigma_2 \Delta^2 y_n,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n + w'\Sigma_2 \Delta^2 y_n$$

setzen.

5. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man Δz, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$ und z' mittelst der Formeln

$$\Delta z = z - u'\Sigma z_n,\quad \Delta^2 z = \Delta z - v'\Sigma_1 \Delta z_n,\quad \Delta^3 z = \Delta^2 z - w'\Sigma_2 \Delta^2 z_n,$$

$$z' = \frac{\Delta^3 z}{S_3 \Delta^3 z_n}$$

und die Grössen

$$\Delta^4 y_1,\ \Delta^4 y_2,\ \Delta^4 y_3,\ \Delta^4 y_4, \ldots \Delta^4 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^4 y = \Delta^3 y - z'\Sigma_3 \Delta^3 y_n,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots . x_n$$

setzt. Findet man dann, dass sich diese Grössen sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = u'\Sigma y_n + v'\Sigma_1 \Delta y_n + w'\Sigma_2 \Delta^2 y_n + z'\Sigma_3 \Delta^3 y_n$$

setzen.

6. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, ist klar.

§. 6.

Auf die vorhergehende Weise lehrt Herr Moigno a. a. O. nach Cauchy die Anordnung der Rechnung. Man könnte aber, wie es uns scheint, auch auf folgende Art verfahren, wobei wir bemerken, dass nach dem Obigen, wie leicht erhellet,

$$u' = \frac{a}{\Sigma y_n} u,$$

$$v' = \frac{b}{\Sigma_1 \Delta y_n} \Delta v,$$

$$w' = \frac{c}{\Sigma_2 \Delta^2 y_n} \Delta^2 w,$$

$$z' = \frac{d}{\Sigma_3 \Delta^3 y_n} \Delta^3 z,$$

u. s. w.

ist.

1. Angenommen wird wieder, dass die Function y sich in eine convergirende Reihe von der Form

$$y = au + bv + cw + dz + \ldots .$$

entwickeln lässt, und dass die den n gegebenen Werthen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots . x_n$$

der veränderlichen Grösse x, von welcher die Function y und die Functionen u, v, w, z, ... abhängen, entsprechenden Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \ldots . y_n$$

der Function y gegeben sind.

2. Dies vorausgesetzt, bestimme man zuerst die Grösse a mittelst der Formel

$$a = \frac{\Sigma y_n}{S u_n},$$

und die Grössen

$$\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \Delta y_4, \ldots \Delta y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta y = y - au,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

setzt. Findet man nun, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unveränderlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = au$$

setzen.

3. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man Δv und b mittelst der Formeln

$$\Delta v = v - \frac{\Sigma v_n}{S u_n} u, \quad b = \frac{\Sigma_1 \Delta y_n}{S_1 \Delta v_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \Delta^2 y_3, \Delta^2 y_4, \ldots \Delta^2 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^2 y = \Delta y - b\Delta v,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$y = au + b\Delta v$$

setzen.

4. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man Δw, $\Delta^2 w$ und c mittelst der Formeln

$$\Delta w = w - \frac{\Sigma w_n}{S u_n} u, \quad \Delta^2 w = \Delta w - \frac{\Sigma_1 \Delta w_n}{S_1 \Delta v_n} \Delta v, \quad c = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 y_n}{S_2 \Delta^2 w_n},$$

und die Grössen

$$\Delta^3 y_1, \Delta^3 y_2, \Delta^3 y_3, \Delta^3 y_4, \ldots \Delta^3 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y - c\Delta^2 w,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = au + b\Delta v + c\Delta^2 w$$

setzen.

5. Findet man aber, dass die in Rede stehenden Grössen sich nicht sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so bestimme man Δz, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$ und d mittelst der Formeln

$$\Delta z = z - \frac{\Sigma z_n}{Su_n} u,\ \Delta^2 z = \Delta z - \frac{\Sigma_1 \Delta z_n}{S_1 \Delta v_n} \Delta v,\ \Delta^3 z = \Delta^2 z - \frac{\Sigma_2 \Delta^2 z_n}{S_2 \Delta^2 w_n} \Delta^2 w,$$

$$d = \frac{\Sigma_3 \Delta^3 y_n}{S_3 \Delta^3 z_n}.$$

und die Grössen

$$\Delta^4 y_1, \Delta^4 y_2, \Delta^4 y_3, \Delta^4 y_4, \ldots \Delta^4 y_n$$

mittelst der Formel

$$\Delta^4 y = \Delta^3 y - d\Delta^3 z,$$

indem man in derselben für x nach und nach

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$$

setzt. Findet man dann, dass diese Grössen sich sämmtlich innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler halten, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$y = au + b\Delta v + c\Delta^2 w + d\Delta^3 z$$

setzen.

6. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, liegt deutlich vor Augen.

Die beste Art der Ausführung der nöthigen Rechnungen und manche Abkürzungen bei denselben werden sich einem Jeden leicht von selbst darbieten, weshalb wir hier darüber der Kürze wegen nichts weiter sagen. Häufig wird man insbesondere schon vorher berechnete Grössen bei den folgenden Rechnungen wieder in Anwendung bringen können.

§. 7.

Bei weitläufigen Rechnungen ist es immer nöthig, wenigstens im höchsten Grade vortheilhaft, im Besitze von Bedingungsgleichungen zu sein, mit deren Hülfe man die Richtigkeit der geführten Rechnung prüfen kann. Solche Bedingungsgleichungen lassen sich aber aus dem Vorhergehenden eine grössere Anzahl ohne Schwierigkeit herleiten, wobei man nur immer die den gebrauchten Symbolen beigelegte Bedeutung wohl vor Augen zu behalten hat.

Weil nach dem Obigen bekanntlich zuvörderst

$$u' = \frac{u}{Su_n}$$

ist, so ist offenbar

$$Su'_n = \frac{Su_n}{Su_n},$$

und folglich

$$Su'_n = 1.$$

Weil ferner nach dem Obigen

$$\Delta v = v - u'\Sigma v_n,$$
$$\Delta w = w - u'\Sigma w_n,$$
$$\Delta z = z - u'\Sigma z_n,$$
u. s. w.

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta v_n = \Sigma v_n - \Sigma u'_n \Sigma v_n,$$
$$\Sigma\Delta w_n = \Sigma w_n - \Sigma u'_n \Sigma w_n,$$
$$\Sigma\Delta z_n = \Sigma z_n - \Sigma u'_n \Sigma z_n.$$
u. s. w.

Wegen der Gleichung

$$u' = \frac{u}{Su_n}$$

ist aber offenbar

$$\Sigma u'_n = \frac{\Sigma u_n}{Su_n},$$

und folglich, weil augenscheinlich $\Sigma u_n = Su_n$ ist,

$$\Sigma u'_n = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\Delta v_n = 0,\ \Sigma\Delta w_n = 0,\ \Sigma\Delta z_n = 0, \ldots.$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$v' = \frac{\Delta v}{S_1\Delta v_n},$$

also offenbar

$$\Sigma v'_n = \frac{\Sigma\Delta v_n}{S_1\Delta v_n},\ S_1 v'_n = \frac{S_1\Delta v_n}{S_1\Delta v_n};$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma v'_n = 0,\ S_1 v'_n = 1.$$

Weil nun

$$\Delta^2 w = \Delta w - v'\Sigma_1\Delta w_n,$$
$$\Delta^2 z = \Delta z - v'\Sigma_1\Delta z_n,$$
u. s. w.

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta^2 w_n = \Sigma\Delta w_n - \Sigma v'_n \Sigma_1\Delta w_n,$$
$$\Sigma\Delta^2 z_n = \Sigma\Delta z_n - \Sigma v'_n \Sigma_1\Delta z_n,$$
u. s. w.

und folglich nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\Sigma\Delta^2 v_n = 0,\ \Sigma\Delta^2 x_n = 0, \ldots\ldots$$

Ferner ergiebt sich aus den obigen Gleichungen

$$\Sigma_1\Delta^2 v_n = \Sigma_1\Delta v_n - \Sigma_1 v'_n \Sigma_1\Delta v_n,$$

$$\Sigma_1\Delta^2 x_n = \Sigma_1\Delta x_n - \Sigma_1 v'_n \Sigma_1\Delta x_n,$$

u. s. w.

Wegen der Gleichung

$$v' = \frac{\Delta v}{S_1\Delta v_n}$$

ist aber offenbar

$$\Sigma_1 v'_n = \frac{\Sigma_1\Delta v_n}{S_1\Delta v_n},$$

und folglich, weil augenscheinlich $\Sigma_1\Delta v_n = S_1\Delta v_n$ ist,

$$\Sigma_1 v'_n = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma_1\Delta^2 v_n = 0,\ \Sigma_1\Delta^2 x_n = 0, \ldots\ldots$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2\Delta^2 w_n},$$

also offenbar

$$\Sigma w'_n = \frac{\Sigma\Delta^2 w_n}{S_2\Delta^2 w_n},\ \Sigma_1 w'_n = \frac{\Sigma_1\Delta^2 w_n}{S_2\Delta^2 w_n},\ S_2 w'_n = \frac{S_2\Delta^2 w_n}{S_2\Delta^2 w_n},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma w'_n = 0,\ \Sigma_1 w'_n = 0,\ S_2 w'_n = 1.$$

Weil nun

$$\Delta^3 x = \Delta^2 x - w'\Sigma_2\Delta^2 x_n,$$

u. s. w.

ist, so ist offenbar

$$\Sigma\Delta^3 x_n = \Sigma\Delta^2 x_n - \Sigma w'_n \Sigma_2\Delta^2 x_n,$$

u. s. w.

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\Delta^3 x_n = 0, \ldots\ldots$$

Ferner ergiebt sich aus den obigen Gleichungen

$$\Sigma_1\Delta^3 x_n = \Sigma_1\Delta^2 x_n - \Sigma_1 w'_n \Sigma_2\Delta^2 x_n,$$

u. s. w.

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma_1\Delta^3 x_n = 0, \ldots\ldots$$

Endlich erhält man auch

$$\Sigma_2 \Delta^2 x_n = \Sigma_3 \Delta^2 x_n - \Sigma_2 w'_n \Sigma_3 \Delta^2 x_n,$$

u. s. w.

Wegen der Gleichung

$$w' = \frac{\Delta^2 w}{S_2 \Delta^2 w_n}$$

ist aber offenbar

$$\Sigma_2 w'_n = \frac{\Sigma_2 \Delta^2 w_n}{S_2 \Delta^2 w_n},$$

und folglich, weil augenscheinlich $\Sigma_2 \Delta^2 w_n = S_2 \Delta^2 w_n$ ist,

$$\Sigma_2 w'_n = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma_2 \Delta^2 x_n = 0, \ldots\ldots$$

Nach dem Obigen ist ferner

$$x' = \frac{\Delta^3 x}{S_3 \Delta^3 x_n},$$

also offenbar

$$\Sigma x'_n = \frac{\Sigma \Delta^3 x_n}{S_3 \Delta^3 x_n}, \quad \Sigma_1 x'_n = \frac{\Sigma_1 \Delta^3 x_n}{S_3 \Delta^3 x_n}, \quad \Sigma_2 x'_n = \frac{\Sigma_2 \Delta^3 x_n}{S_3 \Delta^3 x_n},$$

$$S_3 x'_n = \frac{S_3 \Delta^3 x_n}{S_3 \Delta^3 x_n},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma x'_n = 0, \quad \Sigma_1 x'_n = 0, \quad \Sigma_2 x'_n = 0, \quad S_3 x'_n = 1.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Man kann aber auch noch andere Bedingsgleichungen finden. Weil nämlich nach dem Obigen bekanntlich

$$\Delta y = y - u' \Sigma y_n$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma \Delta y_n = \Sigma y_n - \Sigma u'_n \Sigma y_n,$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma u'_n = 1$$

ist,

$$\Sigma \Delta y_n = 0.$$

Weil ferner nach dem Obigen

$$\Delta^2 y = \Delta y - v' \Sigma_1 \Delta y_n$$

ist, so ist offenbar

$$\Sigma \Delta^2 y_n = \Sigma \Delta y_n - \Sigma v'_n \Sigma_1 \Delta y_n,$$

$$\Sigma_1 \Delta^2 y_n = \Sigma_1 \Delta y_n - \Sigma_1 v'_n \Sigma_1 \Delta y_n;$$

und folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma \Delta y_n = 0, \quad \Sigma v'_n = 0, \quad \Sigma_1 v'_n = 1$$

ist,

$$\Sigma\Delta^2 y_n = 0,\quad \Sigma_1\Delta^2 y_n = 0.$$

Auf ähnliche Art ist nach dem Obigen

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y - w'\Sigma_2\Delta^2 y_n.$$

und folglich

$$\Sigma\Delta^3 y_n = \Sigma\Delta^2 y_n - \Sigma w'_n\Sigma_2\Delta^2 y_n,$$
$$\Sigma_1\Delta^3 y_n = \Sigma_1\Delta^2 y_n - \Sigma_1 w'_n\Sigma_2\Delta^2 y_n,$$
$$\Sigma_2\Delta^3 y_n = \Sigma_2\Delta^2 y_n - \Sigma_2 w'_n\Sigma_2\Delta^2 y_n;$$

also ist, weil nach dem Obigen

$$\Sigma\Delta^2 y_n = 0,\quad \Sigma_1\Delta^2 y_n = 0,\quad \Sigma w'_n = 0,\quad \Sigma_1 w'_n = 0,\quad \Sigma_2 w'_n = 1$$

ist,

$$\Sigma\Delta^3 y_n = 0,\quad \Sigma_1\Delta^3 y_n = 0,\quad \Sigma_2\Delta^3 y_n = 0.$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$\Delta^4 y = \Delta^3 y - z'\Sigma_3\Delta^3 y_n,$$

folglich

$$\Sigma\Delta^4 y_n = \Sigma\Delta^3 y_n - \Sigma z'_n\Sigma_3\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_1\Delta^4 y_n = \Sigma_1\Delta^3 y_n - \Sigma_1 z'_n\Sigma_3\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_2\Delta^4 y_n = \Sigma_2\Delta^3 y_n - \Sigma_2 z'_n\Sigma_3\Delta^3 y_n,$$
$$\Sigma_3\Delta^4 y_n = \Sigma_3\Delta^3 y_n - \Sigma_3 z'_n\Sigma_3\Delta^3 y_n;$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\Delta^3 y_n = 0,\quad \Sigma_1\Delta^3 y_n = 0,\quad \Sigma_2\Delta^3 y_n = 0;$$
$$\Sigma z'_n = 0,\quad \Sigma_1 z'_n = 0,\quad \Sigma_2 z'_n = 0,\quad \Sigma_3 z'_n = 1$$

ist,

$$\Sigma\Delta^4 y_n = 0,\quad \Sigma_1\Delta^4 y_n = 0,\quad \Sigma_2\Delta^4 y_n = 0,\quad \Sigma_3\Delta^4 y_n = 0.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Die Vortheile, welche die in diesem Aufsatze entwickelte Interpolationsmethode gewährt, hier noch besonders aus einander zu setzen, halten wir für völlig überflüssig, da dieselben zu sehr ganz von selbst in die Augen springen. Jedenfalls bilden aber die vorher bewiesenen Bedingungsgleichungen ein nicht zu übersehendes Hauptmoment bei dieser schönen Methode, die wir den Physikern zu recht häufiger und fleissiger Anwendung empfehlen möchten. Auch hoffen wir, wie schon im Eingange erwähnt worden ist, bald selbst eine Anwendung derselben auf einen wichtigen physikalischen Gegenstand im Archive mittheilen zu können.

III.

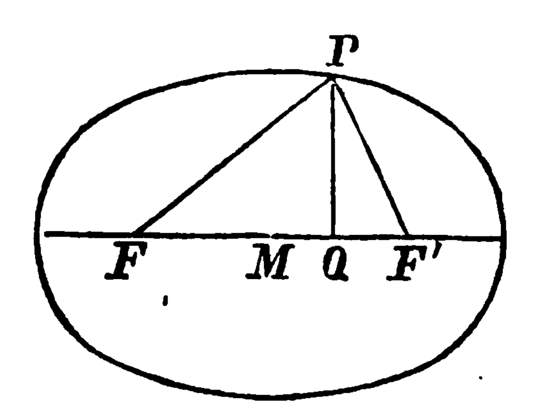
Die Gleichung der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ auf einfache Weise entwickelt aus der Grundeigenschaft $v+v'=2a$.

Von

Herrn Dr. Fr. Heinen,

Director der Realschule zu Düsseldorf.

Es seien in unten stehender Figur M der Mittelpunkt einer



Ellipse; F, F' ihre Brennpunkte, $FP=v$, $F'P=v'$ die nach einem Punkte P derselben gezogenen Leitstrahlen, das von P auf die grosse Axe $=2a$ gefällte Perpendikel $PQ=y$, das Stück MQ der grossen Axe $=x$, und $MF=MF'=\sqrt{a^2-b^2}=e$. Alsdann ist

$$PF^2-FQ^2=PF'^2-F'Q^2,$$

$$\text{oder } PF^2-PF'^2=FQ^2-F'Q^2,$$

$$\text{oder } v^2-v'^2=(e+x)^2-(e-x)^2,$$

$$\text{oder } (v+v')\,(v-v')=4e\,.\,x;$$

also, weil $v+v'=2a$ ist, (1)

$$v-v'=\frac{2ex}{a}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $v=a+\frac{ex}{a}$. (3)

Es ist aber auch $FP=\sqrt{FQ^2+QP^2}$

$$\text{oder } v=\sqrt{(e+x)^2+y^2} \quad (4)$$

mithin wegen (3) und (4)

der Oeffnung gestellt; liegt alsdann der andere Schenkel zur linken Hand, so soll der Winkel positiv, gegentheils negativ genommen werden. Es seien nun für die Winkel

$$ABC=\alpha,\ ABD=\beta,\ BCD=\gamma,\ ACD=\delta$$

beziehlich AB, AB, BC und AC die ersten Schenkel.

Man sieht sogleich, dass Alles darauf hinausläuft, eins der Dreiecke ABD oder ACD zu bestimmen; wir wählen das erstere, nennen φ den Winkel ADB und bemerken, dass derselbe mit β stets gleiches Zeichen hat.

Aus der Betrachtung der Dreiecke erhält man alsdann in völliger Allgemeinheit

$$\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\beta)},\quad \frac{BC}{AB}=\frac{\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)},\quad \frac{BD}{BC}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma-\beta)},$$

hieraus

$$\frac{\sin(\varphi+\beta)}{\sin\varphi}=\frac{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha+\gamma-\beta)},$$

und weiter

$$\operatorname{Cotg}\varphi=\frac{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin\beta\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha+\gamma-\beta)}-\operatorname{Cotg}\beta.$$

Bestimmt man noch den Hülfswinkel ξ aus der Gleichung

$$\operatorname{Cotg}\xi=\frac{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha+\gamma-\delta)\sin\beta},\ \ldots\ldots(A)$$

so wird

$$\operatorname{Cotg}\varphi=\frac{\sin(\beta-\xi)}{\sin\beta\sin\xi}\ \ldots\ldots(B)$$

und aus (A) und (B) lässt sich nun φ ohne alle Zweideutigkeit finden. Die übrigen Stücke der Figur ergeben sich dann ohne Schwierigkeit.

II.

Ueber eine Beziehung, welche zwischen 4 Punkten, die in einer Ebene liegen, statt findet.

Sucht man die Bedingungsgleichung dafür, dass vier Punkte, deren Coordinaten $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3;\ x_4, y_4, z_4$ sind, in einer Ebene liegen, so gelangt man bekanntlich zu derselben, wenn man in die allgemeine Gleichung der Ebene:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

für die Coordinaten x, y, z nach einander die Coordinaten der 4 Punkte setzt, also die Gleichungen

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$
$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0,$$
$$Ax_3+By_3+Cz_3+D=0,$$
$$Ax_4+By_4+Cz_4+D=0$$

bildet und aus denselben die Grössen A, B, C, D eliminirt.

Führt man dies aus, so gelangt man zu einer Gleichung zwischen den Coordinaten der gegebenen 4 Punkte, die wir zu unserem Zwecke unter die Form

$$\begin{aligned} & x_1\{(y_4z_3 - y_3z_4) + (y_2z_4 - y_4z_2) + (y_3z_2 - y_2z_3)\} \\ + & x_2\{(y_3z_4 - y_4z_3) + (y_4z_1 - y_1z_4) + (y_1z_3 - y_3z_1)\} \\ + & x_3\{(y_2z_1 - y_1z_2) + (y_1z_4 - y_4z_1) + (y_4z_2 - y_2z_4)\} \\ = & x_4\{(y_2z_1 - y_1z_2) + (y_1z_3 - y_3z_1) + (y_3z_2 - y_2z_3)\} \end{aligned}$$

bringen. Nehmen wir nun an, dass das zum Grunde liegende Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist und betrachten die Projectionen der 4 Punkte auf die yz Ebene, bezeichnen dieselben mit (1), (2), (3), (4) und setzen voraus, dass (4) derjenige Punkt sei, welcher innerhalb des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks $\Delta(1\ 2\ 3)$ liegt, so kann man nach bekannten Sätzen die obige Gleichung auch so ausdrücken:

$$x_1\ \Delta(2\ 3\ 4) + x_2\ \Delta(1\ 3\ 4) + x_3\ \Delta(1\ 2\ 4) = x_4\ \Delta(1\ 2\ 3) \ldots (1)$$

oder wenn man bedenkt, dass

$$\Delta(2\ 3\ 4) + \Delta(1\ 3\ 4) + \Delta(1\ 2\ 4) = \Delta(1\ 2\ 3)$$

ist, auch folgendermassen:

$$(x_1 - x_4)\Delta(2\ 3\ 4) + (x_2 - x_4)\Delta(1\ 3\ 4) + (x_3 - x_4)\Delta(1\ 2\ 4) = 0 \ldots (2)$$

Nennen wir nun den Punkt, welcher innerhalb des von den drei anderen Punkten gebildeten Dreiecks liegt, den inneren Punkt, so können wir den in der Gleichung (1) in analytischem Gewande ausgedrückten Satz also aussprechen:

Wenn man drei Punkte und einen innern derselben auf eine beliebige Ebene projicirt, und sich die Pyramiden gebildet denkt, welche einen der gegebenen Punkte und die Projectionen der drei anderen zu Eckpunkten haben, so ist diejenige Pyramide, welche den inneren Punkt zu einem Eckpunkte hat, gleich der Summe der drei anderen Pyramiden.

V.

Ueber einen Lehrsatz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Herrn Doctor A. R. Luchterhandt

Oberlehrer am Gymnasium zu Königsberg in der Neumark.

Poisson giebt in seinem Lehrbuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 31 nach der Uebersetzung von Schnuse, für die Wahrscheinlichkeit Π, aus einer Urne, in der ursprünglich a weisse und b schwarze Kugeln enthalten sind, in μ Ziehungen m weisse und n schwarze Kugeln in einer beliebigen Ordnung zu ziehen, wenn die jedes Mal gezogene Kugel nicht wieder in die Urne zurückgelegt wird, den Ausdruck:

$$\Pi = \frac{1.2.3\ldots\ldots\mu.1.2.3\ldots\ldots a.1.2.3\ldots\ldots b.1.2.3\ldots\ldots(c-\mu)}{1.2.3\ldots\ldots m.1.2.3\ldots\ldots n.1.2.3\ldots\ldots c.1.2.3\ldots\ldots(a-m)1.2.3\ldots(b-n)}$$

$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

$$\times \frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-m+1)b(b-1)(b-2)\ldots\ldots(b-n+1)}{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots\ldots(c-\mu+1)},$$

worin $c = a + b$ gesetzt ist.

Es heisst dann ebendaselbst in der Note: „Nach μ Ziehungen von m weissen und n schwarzen Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem neuen Versuche eine weisse Kugel zu ziehen, von den Zahlen m und n abhängig und $= \frac{a'}{c'}$, wo $a' = a - m$ und $c' = c - (m + n)$. Aber für eine Person, welche bloss wüsste, dass aus der Urne μ Kugeln gezogen sind, aber nicht, wie viele weisse und wie viele schwarze, wäre die Wahrscheinlichkeit des Zuges einer weissen Kugel bei einem neuen Versuche von der Wahrscheinlichkeit $\frac{a'}{c'}$ sehr verschieden, und nach einer uns eben von F. Mondesir, ehemaligem Schüler der Ecole Polytechnique, mitgetheilten Bemerkung ist die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit von den Zahlen m und n unabhängig und wie vor den Ziehungen $= \frac{a}{c}$." Poisson bemerkt dann ferner, dass Mondesir in dem Journal der Mathematik von Liouville den allgemeinen Beweis für diese Behauptung bekannt machen werde.

Da nun gewiss vielen Lesern des Archivs, gleich mir, das Journal von Liouville nicht zu Gebote steht, so halte ich es nicht für unangemessen, hier einen Beweis für die Richtigkeit der obigen Behauptung mitzutheilen.

Jemand, der überhaupt nur weiss, dass aus einer Urne mit a weissen und b schwarzen Kugeln μ Ziehungen stattgefunden haben, und dass keine der gezogenen Kugeln in die Urne zurückgelegt wurde, kann offenbar nur folgende $\mu+1$ Voraussetzungen über das Herausgekommensein von weissen und schwarzen Kugeln machen. Es sind nämlich entweder μ weisse und keine schwarze, oder $\mu-1$ weisse und 1 schwarze oder $\mu-2$ weisse und 2 schwarze ..... oder endlich keine weisse und μ schwarze Kugeln gezogen worden. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Fälle stattgefunden habe, bestimmt sich nach der obigen Formel, wenn man darin für m und n die entsprechenden Werthe setzt. So giebt dieselbe für die Wahrscheinlichkeit, dass in $\mu=m+n$ Ziehungen δ weisse, und folglich $\mu-\delta$ schwarze Kugeln gezogen worden sind, wenn man $m=\delta$ und $n=\mu-\delta$ setzt, den Ausdruck:

$$\Pi(\delta)=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\delta+1)}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-\delta)}$$

$$\times\frac{a(a-1)(a-2)\ldots.(a-\delta+1)b(b-1)(b-2)\ldots\ldots(b-\mu+\delta+1)}{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-\mu+1)}.$$

Wenn das Ereigniss, dem diese Wahrscheinlichkeit entspricht, eingetroffen wäre, so blieben in der Urne überhaupt $\mu-c$ Kugeln, und darunter $a-\delta$ weisse, und es wird folglich die Wahrscheinlichkeit, bei einem neuen Zuge eine weisse Kugel zu erhalten, durch den Quotienten

$$\frac{a-\delta}{c-\mu}$$

ausgedrückt. Die Wahrscheinlichkeit $\Pi'(\delta)$, dass diese beiden Ereignisse zugleich eintreffen, bestimmt sich bekanntlich durch das Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, und ist demnach

$$\Pi'(\delta)=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\delta+1)}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-\delta)}$$

$$\times\frac{a(a-1)(a-2)\ldots.(a-\delta)\,b(b-1)\ldots\ldots(b-\mu+\delta+1)}{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-\mu)}\ldots.\;(A)$$

Setzt man nun hierin nach einander $\delta=\mu,\ \mu-1,\ \mu-2\ldots.2,1,0$ und nimmt die Summe dieser Ausdrücke, so ergiebt sich offenbar der Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, die wir mit W bezeichnen wollen, und es ist also:

$$W=\Pi'(\mu)+\Pi'(\mu-1)+\Pi'(\mu-2)+\ldots\ldots.+\Pi'(1)+\Pi'(0).$$

Bevor wir nun die Werthe der Π' einsetzen, wollen wir noch bemerken, dass die Formel (A) für $\delta=\mu$ nicht unmittelbar anwendbar ist, und dass man in diesem Falle für die beiden darin vorkommenden Ausdrücke

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\delta+1)}{1.2.3\ldots.(\mu-\delta)}\text{ und }b(b-1)(b-2)\ldots.(b-\mu+\delta+1)$$

die Einheit nehmen muss. Mit Rücksicht hierauf erhält man nun, unter Absonderung des gemeinschaftlichen Factors

$$M = \frac{a}{c(c-1)\,(c-2)\ldots.(c-\mu)},$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit W den Ausdruck

$$\begin{aligned}W = M\{(a-1)\,(a-2)\ldots\ldots(a-\mu)+\mu(a-1)\,(a-2)\ldots.(a-\mu+1)b \\ + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}(a-1)\,(a-2)\ldots\ldots(a-\mu+2)\,b(b-1) \\ + \frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)}{1.2.3}(a-1)\,(a-2)\ldots.(a-\mu+3)\,b(b-1)\,(b-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \mu(a-1)\,b(b-1)\ldots\ldots.(b-\mu+2) \\ + b(b-1)\,(b-2)\ldots\ldots(b-\mu+1)\}.\end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass für $\alpha+\beta=\gamma$ die bekannte, auch von Poisson a. a. O. erwähnte Relation

$$\begin{aligned}\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots.(\gamma-\mu+1) = \alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots\ldots.(\alpha-\mu+1) \\ + \mu\alpha(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots.(\alpha-\mu+2)\beta \\ + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-\mu+3)\,\beta(\beta-1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \mu\alpha\beta(\beta-1)\,(\beta-2)\ldots.(\beta-\mu+2) \\ + \beta(\beta-1)\ldots\ldots.(\beta-\mu+1)\end{aligned}$$

statt findet, und dass, wenn man darin $\alpha = a-1$, $\beta = b$, also $\gamma = c-1$ setzt, die rechte Seite gleich der Grösse ist, womit in unserem Ausdrucke für W die Grösse M zu multipliciren ist, so ergiebt sich

$$W = M(c-1)\,(c-2)\ldots.(c-\mu),$$

und wenn man für M seinen Werth einsetzt,

$$W = \frac{a}{c},$$

was bewiesen werden sollte.

VI.

Vom Kapitalisiren der Zinsen im Laufe des Jahres.

Von

Herrn Doctor Rädell

zu Berlin.

Ist p der jährliche Zins eines Thalers, so nennt man $r = 1 + p$ den Zinsfuss, und ein Kapital K geht am Ende des Jahres durch das Hinzutreten der Zinsen in Kr über, so dass man den Zinsfuss als denjenigen Faktor betrachten kann, mit welchem man ein Kapital K zu multipliciren hat, um den durch das Hinzutreten der Zinsen hervorgegangenen Werth desselben am Ende eines Jahres zu erhalten. Nach demselben Zinsfusse geht das Kapital K in m Jahren in

$$(1) \quad K_m = Kr^m$$

über. Diese Formel gilt zwar zunächst nur für den Fall, wo die Zinsen am Ende eines jeden Jahres zum Kapitale geschlagen und für die fernere Dauer des Geschäfts verzinst werden; kann aber auch auf die Kapitalisirung der Zinsen jedes beliebigen andern Zeitintervalls angewandt werden, wenn man unter m die Anzahl dieser Intervalle und unter r den einem solchen Intervalle zukommenden Vermehrungsfaktor versteht.

Nimmt man demzufolge an, dass s' der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor ist, und dass das Kapitalisiren der Zinsen von $\frac{1}{m}$ zu $\frac{1}{m}$ Jahre geschieht, so ist der entsprechende jährliche Vermehrungsfaktor

$$(2) \quad r_1 = s'^m.$$

Will man diesen mit dem Zinsfusse r dergestalt vergleichen, dass die zu Grunde liegenden Zinsen beider der Zeit nach proportional werden, so hat man $s' = 1 + \frac{r-1}{m}$ zu setzen, wodurch sich

$$(3) \quad r' = \left(1 + \frac{r-1}{m}\right)^m$$

ergiebt.

Dieser Ausdruck wird, seiner Bedeutung nach, offenbar mit m wachsen, weil alsdann um so öfter Zins von Zins genommen wird; um solches aber aus der Formel selbst deutlicher hervortreten zu lassen, als es unter ihrer gegenwärtigen Gestalt geschieht, und zugleich die Grenze des Wachsthums zu finden, entwickele man den Ausdruck rechts nach dem binomischen Lehrsatze. Hierdurch ergiebt sich

$$r' = 1 + (r-1) + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{(r-1)^2}{1.2} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{(r-1)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo offenbar die Subtrahenden $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$ u. s. w. um so kleiner werden, je grösser m wird, woraus hervorgeht, dass jedes einzelne Glied der Reihe und demnach auch r' mit m zugleich zunimmt.

Setzt man voraus, dass die Zinsen von Augenblick zu Augenblick fällig und zum Kapitale geschlagen werden, so erhält man offenbar den möglich grössten Werth, den der jährliche Vermehrungsfaktor zu erreichen im Stande ist. In diesem Falle wird man aber das Jahr in unendlich viele Intervalle zerlegt denken müssen und $m = \infty$ zu setzen, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$ u. s. w. also als Null anzusehen haben, so dass sich

$$(4) \quad \lim r' = 1 + (r-1) + \frac{(r-1)^2}{1.2} + \frac{(r-1)^3}{1.2.3} + \frac{(r-1)^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

ergiebt. Obgleich man aus der Analysis weiss, dass für die Reihe rechts die Potenz e^{r-1}, wo $e = 2,7182818\ldots$, gesetzt werden kann, so mag die Entwickelung dafür, da sie sich leicht aus dem vorhergehenden ergiebt, hier nachfolgen.

Kehrt man nämlich zur Gleichung (3) zurück und bringt dieselbe unter die Form

$$\sqrt[r-1]{r'} = \left(1 + \frac{r-1}{m}\right)^{\frac{m}{r-1}} = \left(1 + \frac{1}{m:(r-1)}\right)^{\frac{m}{r-1}},$$

so sieht man, dass die Potenz rechts mit der in (3) übereinstimmt, wenn man hierin $r-1=1$ und $m = \frac{m}{r-1}$ setzt. Da nun $\frac{m}{r-1}$ mit m zugleich unendlich wird, so ergiebt sich nach (4)

$$\lim. \sqrt[r-1]{r'} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = e,$$

also wie vorher,

$$(5) \quad \lim. r' = e^{r-1}.$$

Ist jetzt der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor s'', setzt man bei demselben aber voraus, dass zwar auch die Zinsen alle $\frac{1}{m}$ Jahre fällig werden, dass dieselben jedoch bis zu Ende des Jahres nur in einfacher Verzinsung genutzt werden können, so erhält man den jährlichen Vermehrungsfaktor auf nachstehendem Wege:

Am Ende des ersten Termins erhält man von jedem Thaler die Zinsen $s''-1$; diese giebt, nach der Voraussetzung der einfachen Verzinsung bis zu Ende des Jahres, für die noch übrigen

$m-1$ Termine $(m-1)(s''-1)^2$ Zinsen, so dass also die Zinsen eines Thalers mit ihren Zinseszinsen

für den 1ten Termin . . . $s''-1+(m-1)(s''-1)^2$, ebenso
- - 2ten - . . . $s''-1+(m-2)(s''-1)^2$,
- - 3ten - . . . $s''-1+(m-3)(s''-1)^2$,
- - 4ten - . . . $s''-1+(m-4)(s''-1)^2$,

u. s. w.

betragen. Also belaufen sich am Ende des Jahres sämmtliche Zinsen und Zwischenzinsen eines Thalers unter der gemachten Voraussetzung auf

$$m(s''-1)+\{(m-1)+(m-2)+(m-3)+\ldots+1\}(s''-1)^2,$$

d. h. auf

$$m(s''-1)\{1+\frac{(m-1)(s''-1)}{2}\}.$$

Fügt man daher zu diesen Zinsen noch 1 hinzu, so ergiebt sich für den jährlichen Vermehrungsfaktor r_2 die Gleichung

$$(6)\quad r_2=1+m(s''-1)\{1+\frac{(m-1)(s''-1)}{2}\}.$$

Nimmt man $s''=1+\frac{r-1}{m}$, d. h. werden wiederum die $\frac{1}{m}$ jährlichen Zinsen den dem Zinsfusse r entsprechenden jährlichen Zinsen der Zeit nach proportional gesetzt, so erhält man statt der letzten Gleichung die Formel

$$(7)\quad r''=r+\tfrac{1}{2}(1-\frac{1}{m})(r-1)^2,$$

welcher Ausdruck mit m zugleich wächst, und für $m=\infty$

$$(8)\quad \lim r''=\tfrac{1}{2}(r^2+1)$$

giebt.

Vergleicht man den Werth von r'' mit der oben für r' gefundenen Reihe, so sieht man, dass jener Werth die beiden ersten Glieder dieser Reihe bildet, und also beide Vermehrungsfaktoren nur wenig von einander abweichen werden, und zwar um so weniger, je kleiner der zu Grunde gelegte Zinsfuss r angenommen wird. — Für jeden beliebigen Zinsfuss r werden aber beide Vermehrungsfaktoren r' und r'' einander gleich, wenn man $m=2$ setzt, weil alsdann $r''=r+\frac{1}{4}(r-1)^2=(\frac{r+1}{2})^2=(1+\frac{r-1}{2})^2$ wird. Diese Gleichheit hat darin ihren Grund, dass sich für diesen Fall r' und r'' ihrer Bedeutung nach gar nicht von einander unterscheiden, indem beide daraus hervorgehen, dass die Zinsen eines Thalers vom ersten halben Jahre während der zweiten Hälfte des Jahres noch einfache Zinsen tragen.

Soll umgekehrt der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor gefunden werden, wenn der jährliche gegeben ist, und die Zinsen von Termin zu Termin kapitalisirt werden sollen, so ist die Gleichung (2) nach s' aufzulösen, wodurch man

$$(9)\quad s' = \sqrt[m]{r}$$

erhält, wenn man r statt r_1 setzt. Hieraus folgt aber

$$s' - 1 = \sqrt[m]{1 + (r-1)} - 1$$
$$= \frac{r-1}{m} - \frac{1}{2m}(1 - \frac{1}{m})\,(r-1)^2 + \frac{1}{6m}(1 - \frac{1}{m})\,(2 - \frac{1}{m})\,(r-1)^3 - ..$$

also, bei der Kleinheit von $r - 1$, $s' - 1 < \frac{r-1}{m}$, d. h. die $\frac{1}{m}$ jährlichen Zinsen sind in diesem Falle kleiner als die dem Zinsfusse r zugehörigen Zinsen für dieselbe Zeit.

Will man statt der Formel (9) einen hinlänglich genauen Näherungswerth ohne Wurzelzeichen setzen, so nehme man

$$\sqrt[m]{1+x} \equiv \frac{1+ax}{1+bx},$$

wo x eine sehr kleine Quantität bezeichnet, a und b aber dergestalt bestimmt werden sollen, dass der angenommenen Gleichung so viel als möglich Genüge geleistet werden, und das Zeichen $\equiv$ andeuten soll, dass nur von einer Annäherung die Rede ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$1 + x \equiv (\frac{1+ax}{1+bx})^m = (1+ax)^m\ (1+bx)^{-m}$$
$$\equiv (1 + max + \frac{m^2-m}{2}a^2x^2 + \ldots)\,(1 - mbx + \frac{m^2+m}{2}b^2x^2 + \ldots)$$
$$\equiv 1 + m(a-b)x + (\frac{m^2-m}{2}a^2 - m^2ab + \frac{m^2+m}{2}b^2)x^2 + \ldots.$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit von x wird man also der Wahrheit am nächsten kommen, wenn

$$m(a-b) = 1 \text{ und } \frac{m^2-m}{2}a^2 - m^2ab + \frac{m^2+m}{2}b^2 = 0$$

gesetzt wird, weil dabei nur die dritte und die höheren Potenzen von x unberücksichtigt bleiben. Statt der zweiten Gleichung kann man aber schreiben $\frac{m^2}{2}(a-b)^2 - \frac{m}{2}(a^2 - b^2) = 0$, d. h. mit Berücksichtigung der ersten Gleichung $a^2 - b^2 = \frac{1}{m}$ oder wenn man durch $a - b = \frac{1}{m}$ dividirt, $a + b = 1$, so dass also $a = \frac{m+1}{2m}$ und $b = \frac{m-1}{2m}$, folglich

$$\sqrt[m]{1+x} \equiv \frac{2m + (m+1)x}{2m + (m-1)x}$$

folgt.

Von der angenäherten Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich auch a posteriori überzeugen, wenn man beide Seiten derselben nach Potenzen von x entwickelt, wodurch man

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \left(\frac{x}{m}\right) - \frac{m-1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{6}\left(\frac{x}{m}\right)^3$$
$$- \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{24}\left(\frac{x}{m}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$\frac{2m+(m+1)x}{2m+(m-1)x} = 1 + \left(\frac{x}{m}\right) - \frac{m-1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{(m-1)(m-1)}{4}\left(\frac{x}{m}\right)^3$$
$$- \frac{(m-1)(m-1)(m-1)}{8}\left(\frac{x}{m}\right)^4 + \ldots\ldots,$$

also durch Subtraktion

$$\sqrt[m]{1+x} - \frac{2m+(m+1)x}{2m+(m-1)x} = \frac{m^2-1}{12}\left(\frac{x}{m}\right)^3 - \frac{(m^2-1)(3m-2)}{24}\left(\frac{x}{m}\right)^4 + \ldots\ldots$$

erhält, woraus

$$(10)\quad \sqrt[m]{1+x} \equiv \frac{2m+(m+1)x}{2m+(m-1)x},\ \text{Diff.} < \frac{m^2-1}{12}\left(\frac{x}{m}\right)^3$$

folgt.

Will man diese Formel auf die Gleichung (9) anwenden, so hat man $x = r - 1$ zu setzen, und erhält

$$(11)\quad s' \equiv \frac{2m+(m+1)(r-1)}{2m+(m-1)(r-1)},\ \text{Diff.} < \frac{m^2-1}{2}\left(\frac{r-1}{m}\right)^3$$

oder

$$s' - 1 \equiv \frac{r-1}{m + \frac{m-1}{2}(r-1)}$$

Ist der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor aus dem gegebenen jährlichen für den Fall zu finden, dass die Zinsen eines jeden Termins bis zum Schlusse des Jahres nur einfache Zinsen tragen, so hat man die Gleichung (6) nach s'' aufzulösen. Setzt man der Gleichförmigkeit wegen wiederum r statt r_2, so führt die ebengenannte Gleichung vermittelst einer einfachen Reduktion auf

$$(s''-1)^2 + \frac{2}{m-1}(s''-1) = \frac{2(r-1)}{m(m-1)}$$

und giebt also

$$s''-1 = -\frac{1}{m-1} \pm \sqrt{\frac{2(r-1)}{m(m-1)} + \frac{1}{(m-1)^2}},$$

wo aber in unserm Falle, wo $s'' > 1$, nur das positive Zeichen genommen werden darf. Demzufolge erhält man

$$(12)\quad s''-1 = \frac{1}{m-1}\left\{-1 + \sqrt{1 + 2\left(1-\frac{1}{m}\right)(r-1)}\right\}$$

oder mit Anwendung von (10), wenn $m=2$ und $x=2\left(1-\frac{1}{m}\right)(r-1)$ gesetzt und reducirt wird,

$$(13)\quad s''-1 \equiv \frac{r-1}{m+\frac{m-1}{2}(r-1)},\ \text{Diff.} < \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \left(\frac{r-1}{m}\right)^3,$$

wo $s''-1 < \frac{r-1}{m}$ und die Diff. deshalb mit $\frac{1}{m-1}$ multiplicirt ist, weil $s''-1$ diesen Faktor hat, so dass $s' \equiv s''$ ist.

Man kann diese Formel auf folgendem kürzern Wege finden, wenn man die Inkonsequenz zulassen will, für einen und denselben Zeitraum zwei, wiewohl nur sehr wenig verschiedene Vermehrungsfaktoren anzuwenden:

Ist s'' der $\frac{1}{m}$ jährliche Vermehrungsfaktor und r der entsprechende Zinsfuss, so wird $\frac{r-1}{m}$ wenig verschieden sein von $s''-1$, jedenfalls als ein Näherungswerth des letztern angesehen werden können. Wird daher die obige quadratische Gleichung auf die Form

$$s''-1 = \frac{r-1}{m+\frac{m(m-1)}{2}(s''-1)}$$

gebracht, so kann man rechts $\frac{r-1}{m}$ statt $s''-1$ setzen, und erhält dann für s'' den unter (13) stehenden Ausdruck.

Will man aus dem gegebenen jährlichen Vermehrungsfaktor den entsprechenden, d. h. denjenigen Zinsfuss finden, dessen Zinsen den Zinsen des gegebenen Vermehrungsfaktors der Zeit nach proportional sind, so hat man für den Fall, dass der Vermehrungsfaktor von Termin zu Termin nach Zins und Zinseszinsen genommen werden soll, die Gleichung (3) und für den Fall, dass beim gegebenen Vermehrungsfaktor die Zinsen eines jeden Termins bis zum Ende des Jahres nur einfache Zinsen tragen, die Gleichung (7) nach r aufzulösen.

Aus der erstern der beiden genannten Gleichungen findet man aber

$$(14)\quad r = 1 + m(\sqrt[m]{r'}-1)$$

oder mit Anwendung von (10) nach einigen leichten Reduktionen

$$(15)\quad r \equiv \frac{2+(3-\frac{1}{m})(r'-1)}{2+(1-\frac{1}{m})(r'-1)},\ \text{Diff.} < \frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)(r'-1)^3,$$

wo für die Differenz eine ähnliche Erinnerung gilt wie bei (13).

Aus beiden Ausdrücken sieht man, dass r abnimmt, wenn m wächst. Um die Grenze dieser Abnahme zu finden, setze man $\sqrt[m]{r'} = \{1+(r'-1)\}^{\frac{1}{m}}$ und entwickele diese Potenz nach dem binomischen Satze. Hierdurch findet man

$$r = 1+(r'-1)-\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{(r'-1)^2}{1\,.\,2}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(2-\frac{1}{m}\right)\frac{(r'-1)^3}{1\,.\,2\,.\,3}-\ldots$$

also für $m = \infty$

(16) $\lim. r = 1 + (r'-1) - \frac{1}{2}(r'-1)^2 + \frac{1}{3}(r'-1)^3 - \frac{1}{4}(r'-1)^4 + \ldots.$
wofür man bekanntlich

$$\lim.\ r = 1 + ln.\ r'$$

setzen kann. Dieser Werth für lim. r hätte sich auch unmittelbar ergeben, wenn man die hierhergehörende Gleichung (5) nach r aufgelöst hätte. Will man in der Praxis den natürlichen Logarithmus mit dem gewöhnlichen vertauschen, so hat man

$$ln.\ r' = \frac{\log r'}{\log e} = \frac{\log r'}{\lg 2.7182818} = \frac{\log r'}{0.4342945} = 2.3025851 \times \log r'$$

zu setzen und erhält also

$$(17) \quad \lim.\ r = 1 + 2.3025851 \times \log r'.$$

Verlangt man statt dieses Ausdrucks einen bequemeren, so hat man in (15) $\frac{1}{m} = 0$ zu setzen, und findet dann folgenden hinreichend genauen Näherungswerth

$$(18) \quad \lim.\ r \equiv \frac{3r'-1}{r'+1},\ \text{Diff.} < \frac{1}{12}(r'-1)^3,$$

für welche Formel sich der Zusammenhang mit (16) sogleich ergiebt, wenn man $\frac{3r'-1}{r'+1} = \frac{2+3(r'-1)}{2+(r'-1)}$ schreibt, und den letztern Quotienten durch gewöhnliche Division in eine unendliche Reihe verwandelt.

Zur Auflösung der Gleichung (7) gebe man ihr vorher die Form

$$(r-1)^2 + \frac{2m}{m-1}(r-1) = \frac{2m(r''-1)}{m-1},$$

woraus

$$r-1 = -\frac{m}{m-1} + \sqrt{\frac{2m(r''-1)}{m-1} + \left(\frac{m}{m-1}\right)^2}$$

folgt, indem wiederum wegen $r > 1$ nur das positive Wurzelzeichen genommen werden darf. Statt des eben gefundenen Werths kann man auch setzen:

$$(19) \quad r-1 = \frac{m}{m-1}\left\{-1 + \sqrt{1 + 2\left(1-\frac{1}{m}\right)(r''-1)}\right\}$$

oder mit Hinzuziehung von (10), wenn man hier $m = 2$ und $x = 2\left(1-\frac{1}{m}\right)(r''-1)$ setzt und reducirt,

$$(20) \quad r \equiv \frac{2 + \left(3-\frac{1}{m}\right)(r''-1)}{2 + \left(1-\frac{1}{m}\right)(r''-1)},\ \text{Diff.} < \frac{1}{4}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 (r''-1)^3.$$

Setzt man $\frac{1}{m} = 0$, so erhält man aus (19)

$$(21) \quad \lim.\ r = \sqrt{2r''-1}$$

und näherungsweise

$$(22)\quad \lim.\ r \equiv \frac{3r'' - 1}{r'' + 1},\ \text{Diff.} < \frac{1}{4}\,(r'' - 1)^2,$$

wie es der Formel (8) gemäss ist.

Endlich sieht man aus den Formeln (15) und (20), dass die beiden Näherungswerthe von r, respective in r' und r'' ausgedrückt, miteinander übereinstimmen, so dass also in allen den Fällen, wo jene Näherungswerthe für hinreichend erachtet werden, beide Vermehrungsfactoren nicht von einander verschieden sind.

Aus diesen Untersuchungen geht hervor:

1) Dass dem Zinsfusse r zwei zusammengesetzte jährliche Vermehrungsfactoren r' und r'' entsprechen, bei welchen beiden vorausgesetzt wird, dass die Zinsen schon im Laufe des Jahres in gleichen Zwischenräumen zum Kapitale geschlagen werden und Zinsen tragen; dass die Zinsen eines jeden Termins der Zeit nach proportional den zum Zinsfusse r gehörigen Zinsen sind; dass aber bei dem Vermehrungsfaktor r' von Termin zu Termin nach Zinseszinsen gerechnet wird, während bei dem zweiten Vermehrungsfaktor r'' die Zinsen eines jeden Termins während der übrigen Dauer des Jahres nur noch einfache Zinsen tragen.

2) Dass der Zinsfuss r drei terminliche Vermehrungsfaktoren $s = 1 + \frac{r-1}{m}$, s' und s'' unter sich hat, bei welchem die zugehörigen terminlichen Zinsen, der Zeit nach proportional den dem Zinsfusse r zugehörigen Zinsen sind, welche aber alle drei den jährlichen Zinsfuss r hervorbringen, und zwar der erste s dadurch, dass man während der ganzen Dauer des Jahres nur nach einfachen Zinsen rechnet; der zweite s' dadurch, dass man von Termin zu Termin nach Zinseszinsen rechnet, und endlich der dritte s'' dadurch, dass man zwar für die Zinsen eines jeden Termins wiederum Zinsen, aber für jede Rate während des noch folgenden Theils des Jahres nur einfache Zinsen rechnet.

Endlich ist ersichtlich, dass für die im Laufe eines Jahres fällig werdenden Zinsen, noch viele andere Arten der Benutzung angenommen, namentlich für die Zinseszinsen ein anderer Zinsfuss als für die Zinsen des Kapitals zu Grunde gelegt, und danach die entsprechenden Vermehrungsfaktoren berechnet werden können. Diese Rechnungen werden sich aber ihrem Gange nach nicht wesentlich von den vorhergehenden unterscheiden und sollen daher für jetzt unerörtert gelassen werden.

VII.

Ueber die Theorie der Elimination.

Von

dem Herausgeber.

Erste Abhandlung.

§. 1.

Die in neuester Zeit von einigen ausgezeichneten Mathematikern, insbesondare von Cauchy, Sylvester, Richelot, Sarrus, veröffentlichten Untersuchungen über die Theorie der Elimination mit möglichster Deutlichkeit und Vollständigkeit darzustellen, ist der Zweck einiger Abhandlungen über diesen wichtigen Gegenstand, welche von jetzt an in dem Archive nach und nach erscheinen werden, und von denen die erste hier vorliegt. Diese Untersuchungen betreffen zwar sämmtlich nur die Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen höherer Grade; die Deutlichkeit und der Zusammenhang scheinen uns aber zu fordern, dass wir unsere Darstellung mit einer ältern Untersuchung Cauchy's über die Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen des ersten Grades oder sogenannten linearen Gleichungen, die nicht so bekannt geworden und so viel Beachtung gefunden zu haben scheint, wie sie verdient, beginnen, und wir wollen daher jetzt sogleich zu diesem Gegenstande übergehen.

§. 2.

Zu dem Ende wollen wir annehmen, dass zwischen den n unbekannten Grössen

$$x,\ y,\ z,\ \ldots u,\ v$$

die folgenden n Gleichungen des ersten Grades:

$$a_0x+b_0y+c_0z+\ldots+g_0u+h_0v=k_0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z+\ldots+g_1u+h_1v=k_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+g_2u+h_2v=k_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+g_3u+h_3v=k_3.$$

u. s. w.

$$a_{n-1}x+b_{n-1}y+c_{n-1}z+\ldots+g_{n-1}u+h_{n-1}v=k_{n-1};$$

wo

$$a_0, b_0, c_0, \ldots g_0, h_0, k_0;$$
$$a_1, b_1, c_1, \ldots g_1, h_1, k_1;$$
$$a_2, b_2, c_2, \ldots g_2, h_2, k_2;$$
$$a_3, b_3, c_3, \ldots g_3, h_3, k_3;$$
u. s. w.
$$a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, \ldots g_{n-1}, h_{n-1}, k_{n-1}$$

sämmtlich bekannte Grössen bezeichnen, gegeben seien, und dass aus diesen Gleichungen die in Rede stehenden n unbekannten Grössen bestimmt werden sollen, wobei es zuerst vorzüglich auf den Beweis des folgenden Lehrsatzes ankommt.

§. 3.

Lehrsatz. Wenn $a, b, c, d, \ldots g, h$ beliebige ungleiche Grössen, deren Anzahl n sein mag, bezeichnen, und

$$\begin{aligned} P_n = & \ (b-a) \\ & \times(c-a)\,(c-b) \\ & \times(d-a)\,(d-b)\,(d-c) \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g) \end{aligned}$$

gesetzt wird; so ändert das Product P_n jederzeit sein Vorzeichen ohne seinen absoluten Werth zu ändern, wenn man zwei beliebige der Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ gegen einander vertauscht.

Beweis. Dass dieser Satz für $n=2$ gilt, erhellet auf der Stelle aus einer blossen Ansicht der Gleichung

$$P_2 = b-a.$$

Eben so leicht erhellet, dass derselbe für $n=3$ gilt, wenn man mit dem Producte

$$P_3 = (b-a)\,(c-a)\,(c-b)$$

die Producte

$$(a-b)\,(c-b)\,(c-a),$$
$$(b-c)\,(a-c)\,(a-b),$$
$$(c-a)\,(b-a)\,(b-c),$$

welche aus jenem durch Vertauschung von a und b, a und c, b und c gegen einander hervorgehen, vergleicht. Kann man nun beweisen, dass der Satz für

$$\begin{aligned} P_{n+1} = & \ (b-a) \\ & \times(c-a)\,(c-b) \\ & \times(d-a)\,(d-b)\,(d-c) \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g) \\ & \times(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\,(i-d)\ldots(i-g)\,(i-h) \end{aligned}$$

gilt, wenn er für

$$\begin{aligned}P_n = (b-a)&\\ \times(c-a)\,(c-b)&\\ \times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)&\\ \cdots\cdots&\\ \times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g)&\end{aligned}$$

gilt, so wird seine allgemeine Gültigkeit ausser Zweifel gesetzt sein. Dies kann aber auf folgende Art bewiesen werden.

Vertauscht man in P_{n+1} zwei Elemente gegen einander, so können dies zuerst zwei in der Reihe

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots g,\ h$$

vorkommende Elemente sein. Weil

$$P_{n+1} = P_n(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\,(i-d)\ldots(i-g)\,(i-h)$$

ist, P_n nach der Voraussetzung in diesem Falle sein Zeichen ändert ohne seinen absoluten Werth zu ändern, und das Product

$$(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\,(i-d)\ldots(i-g)\,(i-h)$$

in diesem Falle offenbar völlig ungeändert bleibt, so ändert P_{n+1} sein Zeichen ohne seinen Werth zu ändern. Die vertauschten Elemente können aber auch irgend eins der Elemente

$$a,\ b,\ c,\ d, \ldots g,\ h$$

und das Element i sein. Nehmen wir nun z. B. an, dass man die Elemente d und i gegen einander vertauscht habe, wobei der Allgemeinheit des Beweises durchaus kein Eintrag geschieht, da man sogleich übersehen wird, dass sich derselbe in jedem andern Falle eben so führen lässt; so wird aus P_{n+1} das Product

$$\begin{aligned}Q = (b-a)&\\ \times(c-a)\,(c-b)&\\ \times(i-a)\,(i-b)\,(i-c)&\\ \times(e-a)\,(e-b)\,(e-c)\,(e-i)&\\ \times(f-a)\,(f-b)\,(f-c)\,(f-i)\,(f-e)&\\ \cdots\cdots&\\ \times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-i)\,(h-e)\ldots(h-g)&\\ \times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\,(d-i)\,(d-e)\ldots(d-g)\,(d-h)&\end{aligned}$$

erhalten. Da die Anzahl der Factoren des Products

$$\begin{aligned}&(e-i)\,(f-i)\ldots(h-i)\\ \times&(d-i)\,(d-e)\,(d-f)\ldots(d-h)\end{aligned}$$

offenbar ungerade, und folglich

$$\begin{aligned}&(e-i)\,(f-i)\ldots(h-i)\\ \times&(d-i)\,(d-e)\,(d-f)\ldots(d-h)\\ =\ &-(i-e)\,(i-f)\ldots(i-h)\\ \times&(i-d)\,(e-d)\,(f-d)\ldots(h-d)\end{aligned}$$

ist; so ist nach dem Obigen

$$
\begin{aligned}
Q = -&(b-a)\\
&\times(c-a)\,(c-b)\\
&\times(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\\
&\times(e-a)\,(e-b)\,(e-c)\,(i-e)\\
&\times(f-a)\,(f-b)\,(f-c)\,(i-f)\,(f-e)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(i-h)\,(h-e)\ldots(h-g)\\
&\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\,(i-d)\,(e-d)\ldots(g-d)\,(h-d)\\
= -&(b-a)\\
&\times(c-a)\,(c-b)\\
&\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\\
&\times(e-a)\,(e-b)\,(e-c)\,(e-d)\\
&\times(f-a)\,(f-b)\,(f-c)\,(f-d)\,(f-e)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\,(h-e)\ldots(h-g)\\
&\times(i-a)\,(i-b)\,(i-c)\,(i-d)\,(i-e)\ldots(i-g)\,(i-h),
\end{aligned}
$$

d. i. $Q = -P_{n+1}$, woraus sich ergiebt, dass auch in diesem Falle P_{n+1} sein Zeichen ändert ohne seinen absoluten Werth zu ändern.

Hierdurch ist nun vollständig bewiesen, dass der Satz für P_{n+1} gilt, wenn er für P_n gilt, und daher jetzt seine allgemeine Gültigkeit dargethan.

Anmerkung. Wenn unter den Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ gleiche vorkommen, verschwindet das Product P_n, und verschwindet auch jederzeit dann noch, wenn man zwei beliebige der in Rede stehenden Grössen gegen einander vertauscht. Man kann daher auch in dem Falle, wenn unter den Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ gleiche vorkommen, den vorigen Satz als gültig betrachten, weil $0 = -0$ ist.

§. 4.

Der Kürze wegen wollen wir von jetzt an bloss

$$
\begin{aligned}
P = &(b-a)\\
&\times(c-a)\,(c-b)\\
&\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g)
\end{aligned}
$$

setzen. Die Glieder, aus denen dies Product besteht, wenn man es vollständig entwickelt, haben sämmtlich die Form

$$Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots g^{\lambda}h^{\mu},$$

wo M eine gewisse constante, d. h. von $a, b, c, \ldots g, h$ ganz unabhängige Grösse bezeichnet, und offenbar

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+\mu=1+2+3+\ldots+(n-1),$$

d. i.

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+\mu=\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

ist, zugleich aber auch bemerkt werden muss, dass keiner der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu$ grösser als $n-1$ ist, weil in dem Producte P jede der Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ offenbar nur $(n-1)$ mal vorkommt. Da das Product P nach §. 3. sein Zeichen ändert ohne seinen absoluten Werth zu ändern, wenn man zwei beliebige der Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$, z. B. a und b, gegen einander vertauscht; so muss dem Gliede

$$Ma^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots g^\lambda h^\mu$$

in der Entwickelung von P nothwendig ein anderes Glied von der Form

$$-Ma^\beta b^\alpha c^\gamma \ldots g^\lambda h^\mu$$

entsprechen, und P wird sich also als ein aus lauter Gliedern von der Form

$$M(a^\alpha b^\beta - a^\beta b^\alpha)c^\gamma d^\delta \ldots g^\lambda h^\mu$$

bestehendes Polynom darstellen lassen.

Bezeichnet nun Π die Function, welche aus P hervorgeht, wenn man in jedem Gliede von P die Potenzexponenten in blosse unten auf der rechten Seite der Elemente denselben beigeschriebene Indices verwandelt, wodurch das Glied

$$Ma^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots g^\lambda h^\mu$$

in

$$Ma_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots g_\lambda h_\mu$$

übergeht, so wird die Function Π aus lauter Gliedern von der Form

$$M(a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha)c_\gamma d_\delta \ldots g_\lambda h_\mu$$

bestehen, und daher ebenfalls ihr Zeichen ändern ohne ihren absoluten Werth zu ändern, wenn man zwei beliebige der Elemente $a, b, c, d, \ldots g, h$ gegen einander vertauscht. Setzt man aber in dem vorstehenden Gliede von Π, ohne a und b gegen einander zu vertauschen, bloss b für a, so wird dasselbe

$$M(b_\alpha b_\beta - b_\alpha b_\beta)c_\gamma d_\delta \ldots g_\lambda h_\mu,$$

und verschwindet also, woraus sich ergiebt, dass die Function Π jederzeit verschwindet, wenn man für ein beliebiges Element irgend ein anderes Element setzt, ohne diese beiden Elemente gegen einander zu vertauschen.

Da nach dem Obigen keiner der Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \lambda, \mu$ grösser als $n-1$ ist, so kann man, indem

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$$

gewisse von a ganz unabhängige Grössen bezeichnen, die Function Π offenbar jederzeit auf die Form

$$\Pi = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}$$

bringen, und nach dem Vorhergehenden hat man nun die folgenden Gleichungen:

$$0 = A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + \ldots + A_{n-1} b_{n-1},$$
$$0 = A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 + \ldots + A_{n-1} c_{n-1},$$
$$0 = A_0 d_0 + A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3 + \ldots + A_{n-1} d_{n-1},$$

u. s. w.

$$0 = A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3 h_3 + \ldots + A_{n-1} h_{n-1}.$$

Multiplicirt man jetzt die gegebenen Gleichungen

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + g_0 u + h_0 v = k_0,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 u + h_1 v = k_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + g_2 u + h_2 v = k_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + g_3 u + h_3 v = k_3,$$

u. s. w.

$$a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + g_{n-1} u + h_{n-1} v = k_{n-1}$$

nach der Reihe mit A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} und addirt sie dann zu einander, so erhält man nach dem Obigen die Gleichung

$$(A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}) x$$
$$= A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1},$$

aus der sich

$$x = \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}}$$

oder

$$x = \frac{A_0 k_0 + A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{\Pi}$$

ergiebt, wodurch also x gefunden ist. Bei der wirklichen Entwickelung des x hat man sich, wie hieraus hervorgeht, auf folgende Art zu verhalten:

Man entwickele das Product

$$\begin{aligned} P = &(b-a) \\ &\times (c-a)\,(c-b) \\ &\times (d-a)\,(d-b)\,(d-c) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\times (h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g) \end{aligned}$$

und verwandle in allen Gliedern, welche jedoch durch Einführung des Exponenten Null jederzeit sämmtlich so dargestellt werden müssen, dass jede der Grössen a, b, c, d, ... g, h in ihnen als Factor vorkommt, die Exponenten in blosse unten zur Rechten der entsprechenden Grössen stehende Indices; so ist der Ausdruck, welchen man auf diese Weise erhält, der Nenner des Bruchs, durch welchen die unbekannte Grösse x dargestellt wird, aus dem man dann ferner den entsprechenden Zähler erhält, wenn man für a überall das Symbol k setzt.

Uebrigens kann man, wie sich aus dem Obigen unmittelbar ergiebt, auch

$$x=\frac{(b-k)\times(c-k)\,(c-b)\times\ldots\times(h-k)\,(h-b)\,(h-c)\ldots(h-g)}{(b-a)\times(c-a)\,(c-b)\times\ldots\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\ldots(h-g)}$$

setzen, wenn man sich nur erinnert, dass sowohl im Nenner, als auch im Zähler dieses Bruchs alle Potenzexponenten wie oben in blosse Indices verwandelt werden müssen, wobei man aber auch nicht unbeachtet lassen darf, dass man, bevor diese Verwandlung der Potenzexponenten in Indices wirklich vorgenommen wird, alle Glieder des Nenners und des Zählers so darstellen muss, dass in denselben respective die sämmtlichen Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ und $k, b, c, d, \ldots g, h$ als Factoren vorkommen, wozu man durch Einführung des Exponenten Null leicht gelangt.

Leicht erhellet nun aber auch, dass man die Werthe der sämmtlichen unbekannten Grössen $x, y, z, \ldots u, v$ nach der folgenden ganz allgemeinen Regel finden kann:

Man entwickele das Product

$$\begin{aligned}P=&(b-a)\\&\times(c-a)\,(c-b)\\&\times(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\times(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\,(h-d)\ldots(h-g),\end{aligned}$$

stelle mittelst Einführung des Exponenten Null die Glieder dieses Products so dar, dass ein jedes Glied die sämmtlichen Grössen $a, b, c, d, \ldots g, h$ als Factoren enthält, und verwandle in jedem Gliede alle Potenzexponenten in Indices auf die oben näher angegebene Weise; so ist der Ausdruck, welchen man erhält, der gemeinschaftliche Nenner der Grössen $x, y, z, \ldots u, v$, aus dem man dann ferner die entsprechenden Zähler erhält, wenn man das Symbol k respective für die Symbole $a, b, c, d, \ldots g, h$ setzt.

Von der Richtigkeit dieser Regel kann man sich ohne Schwierigkeit auf folgende Art überzeugen. Setzen wir

$$x=\frac{\varphi(k, b, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$

wo nämlich

$$\Pi=\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)$$

gesetzt worden ist, so ist offenbar

$$y=\frac{\varphi(k, a, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(b, a, c, d, \ldots g, h)},$$

$$z=\frac{\varphi(k, b, a, d, \ldots g, h)}{\varphi(c, b, a, d, \ldots g, h)},$$

u. s. w.

$$v=\frac{\varphi(k, b, c, d, \ldots g, a)}{\varphi(h, b, c, d, \ldots g, a)}.$$

Nach der aus dem Obigen bekannten Grundeigenschaft der Function

$$\Pi = \varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)$$

oder vielmehr der Function P ist aber

$$\varphi(b, a, c, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h),$$
$$\varphi(c, b, a, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h),$$
u. s. w.
$$\varphi(h, b, c, d, \ldots g, a) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h),$$

und natürlich ebenso

$$\varphi(k, a, c, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, k, c, d, \ldots g, h),$$
$$\varphi(k, b, a, d, \ldots g, h) = -\varphi(a, b, k, d, \ldots g, h),$$
u. s. w.
$$\varphi(k, b, c, d, \ldots g, a) = -\varphi(a, b, c, d, \ldots g, k);$$

also

$$x = \frac{\varphi(k, b, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$
$$y = \frac{\varphi(a, k, c, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$
$$z = \frac{\varphi(a, b, k, d, \ldots g, h)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)},$$
u. s. w.
$$v = \frac{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, k)}{\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)};$$

woraus die Richtigkeit der obigen Regel unmittelbar erhellet.

Um diese Regel durch ein Paar Beispiele zu erläutern, habe man zuerst die zwei Gleichungen

$$a_0 x + b_0 y = k_0,$$
$$a_1 x + b_1 y = k_1$$

mit den zwei unbekannten Grössen x, y. In diesem Falle ist

$$P = b - a$$

oder vielmehr

$$P = a^0 b^1 - a^1 b^0.$$

Also ist der gemeinschaftliche Nenner von x und y

$$a_0 b_1 - a_1 b_0,$$

und die entsprechenden Zähler sind

$$k_0 b_1 - k_1 b_0 \text{ und } a_0 k_1 - a_1 k_0.$$

Also ist

$$x = \frac{k_0 b_1 - k_1 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, \quad y = \frac{k_1 a_0 - k_0 a_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0}.$$

Auch kann man

$$x = \frac{b-k}{b-a},\; y = \frac{k-a}{b-a}$$

setzen, wenn man nur auf gewöhnliche Weise alle Potenzexponenten in Indices verwandelt. Man muss nämlich die beiden vorhergehenden Gleichungen zuerst auf folgende Art schreiben:

$$x = \frac{k^0 b^1 - k^1 b^0}{a^0 b^1 - a^1 b^0},\; y = \frac{k^1 a^0 - k^0 a^1}{a^0 b^1 - a^1 b^0},$$

und erhält dann durch Verwandlung der Potenzexponenten in Indices auf der Stelle

$$x = \frac{k_0 b_1 - k_1 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0},\; y = \frac{k_1 a_0 - k_0 a_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0},$$

ganz wie vorher.

Es seien ferner die drei Gleichungen

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z = k_0,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$$

mit den drei unbekannten Grössen x, y, z gegeben. In diesem Falle ist

$$P = (b-a)\,(c-a)\,(c-b),$$

und folglich, wenn man dieses Product entwickelt,

$$P = bc^2 - b^2 c + ab^2 - ac^2 + a^2 c - a^2 b$$

oder

$$P = a^0 b^1 c^2 - a^0 b^2 c^1 + a^1 b^2 c^0 - a^1 b^0 c^2 + a^2 b^0 c^1 - a^2 b^1 c^0.$$

Also ist der gemeinschaftliche Nenner von x, y, z

$$a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0.$$

Die Zähler von x, y, z sind aber respective:

$$k_0 b_1 c_2 - k_0 b_2 c_1 + k_1 b_2 c_0 - k_1 b_0 c_2 + k_2 b_0 c_1 - k_2 b_1 c_0,$$
$$a_0 k_1 c_2 - a_0 k_2 c_1 + a_1 k_2 c_0 - a_1 k_0 c_2 + a_2 k_0 c_1 - a_2 k_1 c_0,$$
$$a_0 b_1 k_2 - a_0 b_2 k_1 + a_1 b_2 k_0 - a_1 b_0 k_2 + a_2 b_0 k_1 - a_2 b_1 k_0;$$

und es ist folglich

$$x = \frac{k_0 b_1 c_2 - k_0 b_2 c_1 + k_1 b_2 c_0 - k_1 b_0 c_2 + k_2 b_0 c_1 - k_2 b_1 c_0}{a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0},$$
$$y = \frac{k_0 a_2 c_1 - k_0 a_1 c_2 + k_1 a_0 c_2 - k_1 a_2 c_0 + k_2 a_1 c_0 - k_2 a_0 c_1}{a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0},$$
$$z = \frac{k_0 a_1 b_2 - k_0 a_2 b_1 + k_1 a_2 b_0 - k_1 a_0 b_2 + k_2 a_0 b_1 - k_2 a_1 b_0}{a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0}.$$

Uebrigens kann man die Grössen x, y, z auch unter der Form

$$x = \frac{(b-k)\,(c-k)\,(c-b)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)},$$

$$y=\frac{(k-a)\,(c-a)\,(c-k)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)},$$
$$z=\frac{(b-a)\,(k-a)\,(k-b)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)}$$

darstellen, wenn man nur nach der Entwickelung der Zähler und des gemeinschaftlichen Nenners alle Potenzexponenten auf bekannte Weise in Indices verwandelt.

Sind die vier Gleichungen

$$a_0x+b_0y+c_0z+d_0u=k_0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=k_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=k_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=k_3$$

zwischen den vier unbekannten Grössen x, y, z, u gegeben, so ist auf ganz ähnliche Art

$$x=\frac{(b-k)\,(c-k)\,(c-b)\,(d-k)\,(d-b)\,(d-c)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)},$$
$$y=\frac{(k-a)\,(c-a)\,(c-k)\,(d-a)\,(d-k)\,(d-c)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)},$$
$$z=\frac{(b-a)\,(k-a)\,(k-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-k)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)},$$
$$u=\frac{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(k-a)\,(k-b)\,(k-c)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-a)\,(d-b)\,(d-c)};$$

wenn man nur auch jetzt wieder alle Zähler und den gemeinschaftlichen Nenner gehörig entwickelt, und in den einzelnen Gliedern alle Potenzexponenten auf gewöhnliche Weise in Indices verwandelt.

Wie man sich in andern Fällen zu verhalten hat und die Werthe der unbekannten Grössen immer leicht nach der obigen Regel *) finden kann, erhellet hieraus deutlich genug.

§. 5.

Bevor wir nun ferner zur Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen höherer Grade selbst übergehen, wollen wir zuvörderst den folgenden für die ganze Theorie der Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen höherer Grade höchst wichtigen Lehrsatz beweisen.

Lehrsatz. Wenn zwischen zwei unbekannten Grössen zwei Gleichungen des $m$ten und $n$ten Grades gegeben sind: so kann die Gleichung, welche durch Elimination der einen der beiden unbekannten Grössen aus den beiden gegebenen Gleichungen erhalten wird, den Grad mn niemals übersteigen.

Beweis. Zwischen den beiden unbekannten Grössen x und y seien die beiden nach x geordneten Gleichungen

---

*) Dass Bezout und Cramer zwei andere bemerkenswerthe Regeln zur Bestimmung der Unbekannten aus Gleichungen des ersten Grades gegeben haben, setzen wir hier als bekannt voraus.

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$
$$A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + \ldots + K'x + L' = 0,$$

wo die Coefficienten der Potenzen von x sämmtlich ganze rationale algebraische Functionen von y sind, gegeben. Weil diese beiden Gleichungen nach der Voraussetzung vom $m$ten und $n$ten Grade sind, und folglich die unbekannten Grössen in keiner die $m$te und $n$te übersteigenden Dimension enthalten können, so sind die Functionen

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots M,\ N$$

von keinem höhern Grade als vom

$$0\text{ten},\ 1\text{sten},\ 2\text{ten},\ 3\text{ten}, \ldots (m-1)\text{sten},\ m\text{ten};$$

die Functionen

$$A',\ B',\ C',\ D', \ldots K',\ L'$$

von keinem höhern Grade als vom

$$0\text{ten},\ 1\text{sten},\ 2\text{ten},\ 3\text{ten}, \ldots (n-1)\text{sten},\ n\text{ten}.$$

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun zu beweisen versuchen, dass der Grad der Gleichung, welche man durch Elimination von x aus den beiden obigen Gleichungen erhält, das Product mn nicht übersteigen kann. Weil A und A' Functionen des 0ten Grades von y, und folglich constante Grössen sind; so kann man die beiden obigen Gleichungen auch unter der Form

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Sx + T = 0,$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V'x + W' = 0,$$

wo P, Q, ... S, T und P', Q', ... V', W' lauter ganze rationale algebraische Functionen von y sind, darstellen. Man denke sich nun beide Gleichungen nach x aufgelöst, und bezeichne die Wurzeln der ersten, welche sämmtlich Functionen von y und an der Zahl m sind, durch p, q, ... r, s, t, die Wurzeln der zweiten, welche ebenfalls sämmtlich Functionen von y und an der Zahl n sind, durch p', q', .. u', v', w'. Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} U = \ & (p-p')\,(p-q')\ldots(p-u')\,(p-v')\,(p-w') \\ & \times(q-p')\,(q-q')\ldots(q-u')\,(q-v')\,(q-w') \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times(r-p')\,(r-q')\ldots(r-u')\,(r-v')\,(r-w') \\ & \times(s-p')\,(s-q')\ldots(s-u')\,(s-v')\,(s-w') \\ & \times(t-p')\,(t-q')\ldots(t-u')\,(t-v')\,(t-w'); \end{aligned}$$

so ist klar, dass, wenn die beiden gegebenen Gleichungen, wie erfordert wird, sollen zusammen existiren können, $U=0$ sein muss, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, keine der Wurzeln p, q, ... r, s, t einer der Wurzeln p', q', ... u', v', w' gleich sein könnte, welches doch nothwendig erfordert wird, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zugleich Statt finden sollen. Die Gleichung $U=0$ ist also die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muss, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zusammen existiren sollen, d. h. eben die Gleichung, welche durch die Elimination von x aus

den beiden gegebenen Gleichungen entspringt, und es kommt nun lediglich darauf an, den Grad zu bestimmen, bis zu welchem diese Gleichung höchstens steigen kann.

Vor allen Dingen müssen wir zeigen, dass die Function U jederzeit eine ganze rationale algebraische Function von y ist. Weil nach der Voraussetzung $p', q', \ldots u', v', w'$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V'x + W' = 0$$

sind, so ist nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen für jedes x

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V'x + W'$$
$$= (x - p')(x - q') \ldots (x - u')(x - v')(x - w'),$$

und folglich

$$p^n + P'p^{n-1} + Q'p^{n-2} + \ldots + V'p + W'$$
$$= (p - p')(p - q') \ldots (p - u')(p - v')(p - w'),$$
$$q^n + P'q^{n-1} + Q'q^{n-2} + \ldots + V'q + W'$$
$$= (q - p')(q - q') \ldots (q - u')(q - v')(q - w'),$$

u. s. w.

$$r^n + P'r^{n-1} + Q'r^{n-2} + \ldots + V'r + W'$$
$$= (r - p')(r - q') \ldots (r - u')(r - v')(r - w'),$$
$$s^n + P's^{n-1} + Q's^{n-2} + \ldots + V's + W'$$
$$= (s - p')(s - q') \ldots (s - u')(s - v')(s - w'),$$
$$t^n + P't^{n-1} + Q't^{n-2} + \ldots + V't + W'$$
$$= (t - p')(t - q') \ldots (t - u')(t - v')(t - w').$$

Also ist

$$\begin{aligned} U = \; & (p^n + P'p^{n-1} + Q'p^{n-2} + \ldots + V'p + W') \\ & \times (q^n + P'q^{n-1} + Q'q^{n-2} + \ldots + V'q + W') \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times (r^n + P'r^{n-1} + Q'r^{n-2} + \ldots + V'r + W') \\ & \times (s^n + P's^{n-1} + Q's^{n-2} + \ldots + V's + W') \\ & \times (t^n + P't^{n-1} + Q't^{n-2} + \ldots + V't + W'). \end{aligned}$$

Da U seinen Werth nicht ändert, wenn man zwei beliebige der Grössen $p, q, \ldots r, s, t$ gegen einander vertauscht, und offenbar eine ganze rationale Function dieser Grössen ist, so ist U eine ganze rationale symmetrische Function von $p, q, \ldots r, s, t$. Aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen kann aber hier füglich als bekannt vorausgesetzt werden, dass sich jede ganze rationale symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung als eine ganze rationale Function der Coefficienten dieser Gleichung darstellen lässt. Weil nun $p, q, \ldots r, s, t$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Sx + T = 0$$

sind, so ist U eine ganze rationale Function von $P, Q, \ldots S, T$.

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Mx + N = 0,$$
$$A'x^n + B'x^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + K'x + L' = 0,$$

wo die Coefficienten der Potenzen von x sämmtlich ganze rationale algebraische Functionen von y sind, gegeben. Weil diese beiden Gleichungen nach der Voraussetzung vom $m$ten und $n$ten Grade sind, und folglich die unbekannten Grössen in keiner die $m$te und $n$te übersteigenden Dimension enthalten können, so sind die Functionen

$$A, B, C, D, \dots M, N$$

von keinem höhern Grade als vom

$$0\text{ten}, 1\text{sten}, 2\text{ten}, 3\text{ten} \dots (m-1)\text{ten}, m\text{ten};$$

die Functionen

$$A', B', C', D', \dots K', L'$$

von keinem höhern Grade als vom

$$0\text{ten}, 1\text{sten}, 2\text{ten}, 3\text{ten}, \dots (n-1)\text{sten}, n\text{ten}.$$

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun zu beweisen versuchen, dass der Grad der Gleichung, welche man durch Elimination von x aus den beiden obigen Gleichungen erhält, das Product mn nicht übersteigen kann. Weil A und A' Functionen des 0ten Grades von y, und folglich constante Grössen sind; so kann man die beiden obigen Gleichungen auch unter der Form

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Sx + T = 0,$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \dots + V'x + W' = 0,$$

wo $P, Q, \dots S, T$ und $P', Q', \dots V', W'$ lauter ganze rationale algebraische Functionen von y sind, darstellen. Man denke sich nun beide Gleichungen nach x aufgelöst, und bezeichne die Wurzeln der ersten, welche sämmtlich Functionen von y und an der Zahl m sind, durch $p, q, \dots r, s, t$, die Wurzeln der zweiten, welche ebenfalls sämmtlich Functionen von y und an der Zahl n sind, durch $p', q' \dots u', v', w'$. Setzt man jetzt

$$\begin{aligned}
U = \; & (p-p')(p-q')\dots(p-u')(p-v')(p-w') \\
\times & (q-p')(q-q')\dots(q-u')(q-v')(q-w') \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\times & (r-p')(r-q')\dots(r-u')(r-v')(r-w') \\
\times & (s-p')(s-q')\dots(s-u')(s-v')(s-w') \\
\times & (t-p')(t-q')\dots(t-u')(t-v')(t-w');
\end{aligned}$$

so ist klar, dass, wenn die beiden gegebenen Gleichungen, wie erfordert wird, sollen zusammen existiren können, $U = 0$ sein muss, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, keine der Wurzeln $p, q, \dots r, s, t$ einer der Wurzeln $p', q', \dots u', v', w'$ gleich sein könnte, welches doch nothwendig erfordert wird, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zugleich Statt finden sollen. Die Gleichung $U = 0$ ist also die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muss, wenn die beiden gegebenen Gleichungen zusammen existiren sollen, d. h. eben die Gleichung, welche durch die Elimination von x aus

$$\times\left(\frac{s}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{q'}{y}\right)\cdots\left(\frac{s}{y}-\frac{u'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{s}{y}-\frac{w'}{y}\right)$$

$$\times\left(\frac{t}{y}-\frac{p'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{q'}{y}\right)\cdots\left(\frac{t}{y}-\frac{u'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{v'}{y}\right)\left(\frac{t}{y}-\frac{w'}{y}\right),$$

welches offenbar $=\frac{U}{y^{mn}}$ ist, für unendlich grosse y nicht unendlich, woraus man nun auf der Stelle schliesst, dass der Grad von U oder der Gleichung, welche man erhält, wenn man die Grösse x aus den beiden gegebenen Gleichungen eliminirt, das Product mn nicht übersteigen kann, wie bewiesen werden sollte *).

§. 6.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die beiden Gleichungen

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

$$B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_{n-1}x + B_n = 0,$$

welche in Bezug auf die unbekannte Grösse x beide vom $n$ten Grade, und deren Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_{n-1},\ A_n;$$

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_{n-1},\ B_n$$

constante Grössen oder beliebige ganze rationale algebraische Functionen anderer unbekannter Grössen, nur nicht von x, sind, gegeben seien, und wollen zeigen, wie sich aus denselben die unbekannte Grösse x jederzeit durch ein auf sehr einfachen Principien beruhendes Verfahren eliminiren lässt.

Multiplicirt man nämlich die erste der beiden gegebenen Gleichungen mit $-B_0$, die zweite mit A_0, und addirt die Gleichungen dann zu einander; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A_0B_1 - A_1\ B_0 = C_0,$$

$$A_0B_2 - A_2\ B_0 = C_1,$$

$$A_0B_3 - A_3\ B_0 = C_2,$$

u. s. w.

$$A_0B_{n-1} - A_{n-1}\ B_0 = C_{n-2},$$

$$A_0B_n - A_n\ B_0 = C_{n-1}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$C_0x^{n-1} + C_1x^{n-2} + C_2x^{n-3} + \ldots + C_{n-2}x + C_{n-1} = 0.$$

Multiplicirt man ferner die erste der beiden gegebenen Gleichungen mit B_n, die zweite mit $-A_n$, und addirt die Gleichungen dann wieder zu einander; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$A_0B_n - A_n\ B_0 = D_0,$$

$$A_1B_n - A_n\ B_1 = D_1,$$

---

*) Diesen Beweis des obigen wichtigen Satzes findet man dem Wesentlichen nach in den Exercices de Mathématiques par Cauchy. T. IV. p. 124. Andere Beweise desselben, namentlich der von Poisson, sind allgemein genug bekannt.

$$A_2 B_n - A_n\, B_2 = D_2,$$

u. s. w.

$$A_{n-2} B_n - A_n\, B_{n-2} = D_{n-2},$$

$$A_{n-1} B_n - A_n\, B_{n-1} = D_{n-1},$$

wobei man bemerken kann, dass $D_0 = C_{n-1}$ ist, gesetzt wird, die Gleichung

$$D_0 x^n + D_1 x^{n-1} + D_2 x^{n-2} + \ldots + D_{n-2} x^2 + D_{n-1} x = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung durch x dividirt, die Gleichung

$$D_0 x^{n-1} + D_1 x^{n-2} + D_2 x^{n-3} + \ldots + D_{n-2} x + D_{n-1} = 0,$$

und hat also jetzt die beiden folgenden Gleichungen des $(n-1)$sten Grades:

$$C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + C_2 x^{n-3} + \ldots + C_{n-2} x + C_{n-1} = 0,$$

$$D_0 x^{n-1} + D_1 x^{n-2} + D_2 x^{n-3} + \ldots + D_{n-2} x + D_{n-1} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leitet man auf ganz ähnliche Art wie vorher, wenn der Kürze wegen

$$C_0 D_1 - C_1 D_0 = E_0,$$

$$C_0 D_2 - C_2 D_0 = E_1,$$

$$C_0 D_3 - C_3 D_0 = E_2,$$

u. s. w.

$$C_0 D_{n-2} - C_{n-2} D_0 = E_{n-3},$$

$$C_0 D_{n-1} - C_{n-1} D_0 = E_{n-2}$$

und

$$C_0 D_{n-1} - C_{n-1} D_0 = F_0,$$

$$C_1 D_{n-1} - C_{n-1} D_1 = F_1,$$

$$C_2 D_{n-1} - C_{n-1} D_2 = F_2,$$

u. s. w.

$$C_{n-3} D_{n-1} - C_{n-1} D_{n-3} = F_{n-3},$$

$$C_{n-2} D_{n-1} - C_{n-1} D_{n-2} = F_{n-2}$$

gesetzt wird, die beiden folgenden Gleichungen des $(n-2)$ten Grades ab:

$$E_0 x^{n-2} + E_1 x^{n-3} + E_2 x^{n-4} + \ldots + E_{n-3} x + E_{n-2} = 0,$$

$$F_0 x^{n-2} + F_1 x^{n-3} + F_2 x^{n-4} + \ldots + F_{n-3} x + F_{n-2} = 0;$$

und wird, wenn man dieses Verfahren immer weiter fortsetzt, jederzeit endlich einmal auf zwei Gleichungen des ersten Grades von der Form

$$M_0 x + M_1 = 0,$$

$$N_0 x + N_1 = 0$$

kommen, aus denen man dann sogleich durch Elimination von x die diese unbekannte Grösse gar nicht mehr enthaltende Gleichung

$$M_0 N_1 - M_1 N_0 = 0$$

erhält, und also jetzt an dem Ziele, welches man zu erreichen beabsichtigte, angelangt ist.

Dieses Verfahren, obgleich an sich sehr einfach und überdies völlig allgemein, hat den sehr bedeutenden Fehler, dass es die Endgleichung, als Folge der Einführung fremdartiger Factoren, häufig von einem zu hohen Grade liefert. Um uns hiervon zu überzeugen, wollen wir jetzt einmal annehmen, dass die Coefficienten

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots A_n;$$
$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots B_n$$

der beiden gegebenen Gleichungen, die in Bezug auf x vom $n$ten Grade sind, in Bezug auf die in ihnen enthaltene unbekannte Grösse y respective vom

0ten, 1sten, 2ten, ... $n$ten;

0ten, 1sten, 2ten, ... $n$ten

Grade seien; so sind die Coefficienten

$$C_0 = A_0B_1 - A_1B_0,\quad D_0 = A_0B_n - A_nB_0;$$
$$C_1 = A_0B_2 - A_2B_0,\quad D_1 = A_1B_n - A_nB_1;$$
$$C_2 = A_0B_3 - A_3B_0,\quad D_2 = A_2B_n - A_nB_2;$$
u. s. w. u. s. w.
$$C_{n-1} = A_0B_n - A_nB_0,\quad D_{n-1} = A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1}$$

der beiden aus den vorigen Gleichungen abgeleiteten Gleichungen, welche in Bezug auf x vom $(n-1)$sten Grade sind, offenbar in Bezug auf y respective vom

1sten, 2ten, 3ten, ... $n$ten;

$n$ten, $(n+1)$sten, $(n+2)$ten, ... $(2n-1)$sten

Grade. Ferner sind die Coefficienten

$$E_0 = C_0D_1 - C_1D_0,\quad F_0 = C_0D_{n-1} - C_{n-1}D_0;$$
$$E_1 = C_0D_2 - C_2D_0,\quad F_1 = C_1D_{n-1} - C_{n-1}D_1;$$
$$E_2 = C_0D_3 - C_3D_0,\quad F_2 = C_2D_{n-1} - C_{n-1}D_2;$$
u. s. w. u. s. w.
$$E_{n-2} = C_0D_{n-1} - C_{n-1}D_0,\quad F_{n-2} = C_{n-2}D_{n-1} - C_{n-1}D_{n-2}$$

der beiden aus den vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen, die in Bezug auf x vom $(n-2)$ten Grade sind, in Bezug auf y offenbar respective vom

$(n+2)$ten, $(n+3)$ten, $(n+4)$ten, ... $2n$ten;

$2n$ten. $(2n+1)$sten, $(2n+2)$ten, ... $(3n-2)$ten

Grade. Auf ähnliche Art sind die Coefficienten

$$G_0 = E_0F_1 - E_1F_0,\quad H_0 = E_0F_{n-2} - E_{n-2}F_0;$$
$$G_1 = E_0F_2 - E_2F_0,\quad H_1 = E_1F_{n-2} - E_{n-2}F_1;$$
$$G_2 = E_0F_3 - E_3F_0,\quad H_2 = E_2F_{n-2} - E_{n-2}F_2;$$
u. s. w. u. s. w.
$$G_{n-3} = E_0F_{n-2} - E_{n-2}F_0,\quad H_{n-3} = E_{n-3}F_{n-2} - E_{n-2}F_{n-3}$$

der beiden aus den vorhergehenden Gleichungen abgeleiteten Gleichungen, welche in Bezug auf x vom $(n-3)$ten Grade sind, in Bezug auf y offenbar respective vom

$(3n+3)$ten, $(3n+4)$ten, $(3n+5)$ten, ... $4n$ten;
$4n$ten, $(4n+1)$sten, $(4n+2)$ten, ... $(5n-3)$ten

Grade. Die Coefficienten

$$J_0 = G_0H_1 - G_1H_0,\quad K_0 = G_0H_{n-3} - G_{n-3}H_0;$$
$$J_1 = G_0H_2 - G_2H_0,\quad K_1 = G_1H_{n-3} - G_{n-3}H_1;$$
$$J_2 = G_0H_3 - G_3H_0,\quad K_2 = G_2H_{n-3} - G_{n-3}H_2;$$

u. s. w. u. s. w.

$$J_{n-4} = G_0H_{n-3} - G_{n-3}H_0,\quad K_{n-4} = G_{n-4}H_{n-3} - G_{n-3}H_{n-4}$$

der beiden aus den vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen, welche in Bezug auf x vom $(n-4)$ten Grade sind, sind offenbar in Bezug auf y jederzeit respective vom

$(7n+4)$ten, $(7n+5)$ten, $(7n+6)$ten, ... $8n$ten;
$8n$ten, $(8n+1)$sten, $(8n+2)$ten, ... $(9n-4)$ten

Grade. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, erhellet hieraus schon mit hinreichender Deutlichkeit, und überzeugen wird man sich nun auch sehr leicht, dass die Coefficienten

$$M_0,\ M_1 \text{ und } N_0,\ N_1$$

der beiden Gleichungen

$$M_0x + M_1 = 0,$$
$$N_0x + N_1 = 0$$

des ersten oder $\{n-(n-1)\}$ten Grades, zu denen man durch fortgesetzte Anwendung des obigen Verfahrens immer endlich gelangt, in Bezug auf y jederzeit respective vom

$(2^{n-2}.n-1)$ten, $(2^{n-2}.n)$ten und $(2^{n-2}.n)$ten, $(2^{n-2}.n+1)$ten

Grade sind, woraus sich dann ferner unmittelbar ergiebt, dass die x gar nicht mehr enthaltende Endgleichung

$$M_0N_1 - M_1N_0 = 0$$

in Bezug auf y jederzeit vom $(2^{n-1}.n)$ten Grade ist. Nach dem in §. 5. bewiesenen Satze kann aber unter den gemachten Voraussetzungen die Endgleichung in Bezug auf y den Grad $nn = n^2$ niemals übersteigen, und wenn man also untersuchen will, ob die obige Eliminationsmethode die Endgleichung von einem zu hohen Grade liefert, so kommt es darauf an, die Fälle zu ermitteln, in denen

$$2^{n-1}.n - n^2 > 0$$

oder

$$2^{n-1} - n > 0 \text{ oder } 2^{n-1} > n$$

ist. Für $n=1$ und $n=2$ ist, wie man leicht findet, $2^{n-1}=n$. Für $n=3$, $n=4$, $n=5$, $n=6$ ist dagegen, wie man ebenfalls leicht findet, immer $2^{n-1}>n$, woraus man schliesst, dass für $n>2$

jederzeit $2^{n-1} > n$ ist. Um die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes zu beweisen, wollen wir annehmen, dass derselbe für $n > 2$ gilt, so dass $2^{n-1} > n$ ist, und wollen daraus abzuleiten suchen, dass er dann jederzeit auch für $n+1$ gelten muss, wodurch seine allgemeine Richtigkeit bewiesen sein wird. Weil nun aber nach der Voraussetzung $2^{n-1} > n$ ist, so ist, wenn man auf beiden Seiten mit 2 multiplicirt, auch $2^n > 2n$ oder $2^n > n + n$, und folglich, weil $n > 2$ ist, offenbar $2^n > n + 1$ oder $2^{(n+1)-1} > n + 1$, so dass also der Satz in der That auch für $n + 1$ gilt, und daher allgemein ist. Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass die obige Eliminationsmethode die Endgleichung, wenn $n > 2$ ist, immer von einem zu hohen Grade liefert, und der Grad des eingeführten fremdartigen Factors ist im Allgemeinen

$$2^{n-1} . n - n^2 = n(2^{n-1} - n).$$

Für $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ ist also dieser fremdartige Factor respective vom 3ten, 16ten, 55sten, 156sten, 399sten, 960sten, 2223sten, 5020sten Grade, und steigt demnach sehr bald zu einem sehr hohen Grade, woraus die Unzweckmässigkeit der obigen Eliminationsmethode deutlich genug erhellen wird *).

Im Vorhergehenden ist angenommen worden, dass die beiden gegebenen Gleichungen in Bezug auf x von demselben Grade sind. Ist dies aber nicht der Fall, so kann man immer die beiden Gleichungen leicht auf denselben Grad bringen, wenn man der Gleichung von dem niedrigern Grade am Anfange so viele Glieder mit dem Coefficienten Null beifügt, als erforderlich sind, um diese Gleichung auf denselben Grad wie die höhere Gleichung zu bringen. Hiernach kann man dann auf die beiden Gleichungen die obige Eliminationsmethode offenbar wieder ganz auf dieselbe Weise, wie im Vorhergehenden gelehrt worden ist, anwenden.

Sehr leicht kann nun aber auch gezeigt werden, dass durch die im Vorhergehenden behandelte Aufgabe das Eliminationsproblem für Gleichungen höherer Grade überhaupt im Allgemeinen gelöst ist. Hat man nämlich m Gleichungen mit den m unbekannten Grössen $x, y, z, \ldots u, v$; so ordne man diese sämmtlich nach der einen dieser unbekannten Grössen, etwa nach der Grösse x, und eliminire dann nach der im Obigen gelehrten Methode x aus der 1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 4ten, u. s. w. $(m-1)$sten und $m$ten Gleichung, so erhält man $m-1$ offenbar die Grösse x gar nicht mehr enthaltende Gleichungen, welche man nun sämmtlich nach y ordnet, und dann ganz auf dieselbe Weise wie vorher y eliminirt, wodurch man $m-2$ die Grössen x, y gar nicht mehr

*) Will man sich noch deutlicher überzeugen, dass bei der Anwendung der obigen Eliminationsmethode fremdartige Factoren eingeführt werden, so s. m. Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen von M. Hirsch. Erster Theil. Berlin 1809. S. 109 ff., wo die vier ersten Grade besonders betrachtet sind. Auch kann man den Artikel Elimination in dem zweiten Theile meiner Supplemente zum Klügel'schen Wörterbuche und eine Abhandlung von Gergonne in den Annales de Mathématiques. T. XXI. p. 41., wo auch zugleich Mittel angegeben sind, durch die man sich von den fremdartigen Factoren möglichst frei halten kann.

enthaltende Gleichungen bekommt, auf die man nun wieder ein ganz ähnliches Verfahren anwenden kann. Endlich wird man auf diese Weise zu $m-(m-1)$ die $m-1$ unbekannten Grössen x, y, z, ... u gar nicht mehr, d. h. zu einer bloss noch die eine unbekannte Grösse v enthaltenden Gleichung gelangen, und also den Zweck des Verfahrens, welches man im Allgemeinen mit dem Namen der Elimination der unbekannten Grössen zu belegen pflegt, vollständig erreicht haben.

Die im Obigen entwickelte Eliminationsmethode ist von Euler in dem zweiten Theile der Introductio in Analysin Infinitorum. Cap. XIX. p. 255 gegeben worden. In den Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin. 1764 scheint aber Euler selbst die erste Erfindung dieser Methode Newton beizulegen. In ihren Principien im höchsten Grade einfach, führt dieselbe jedoch, wie oben ausführlich aus einander gesetzt worden ist, häufig zu Gleichungen sehr hoher Grade, die von denen in ihnen enthaltenen fremdartigen Factoren gewöhnlich nur mit nicht leicht zu überwindenden Schwierigkeiten befrei't werden können.

§. 7.

Eine zweite merkwürdige Eliminationsmethode wollen wir jetzt, um nicht zu weitläufig zu werden, zwar nur an einem besondern Falle, aber doch so erläutern, dass die allgemeine Gültigkeit der Regeln, welche wir aus unserer Entwickelung ableiten werden, auf der Stelle und ganz von selbst in die Augen fallen wird.

Wir wollen nämlich annehmen, dass aus den beiden Gleichungen

$$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

und

$$F(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

welche in Bezug auf x respective vom fünften und vom dritten Grade sind, die Grösse x eliminirt werden soll. Zu dem Ende sei w ein diesen beiden Gleichungen genügender Werth von x, so ist nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen für jedes x

$$f(x)=(x-w)f_1(x),\quad F(x)=(x-w)F_1(x),$$

wo $f_1(x)$ und $F_1(x)$ ganze rationale algebraische Functionen des vierten und zweiten Grades von x bezeichnen. Also ist für jedes x

$$f(x)\ F_1(x)=(x-w)f_1(x)F_1(x),$$
$$F(x)\ f_1(x)=(x-w)f_1(x)F_1(x);$$

und folglich für jedes x

$$f(x)F_1(x)=F(x)f_1(x)$$

oder

$$f(x)F_1(x)-F(x)f_1(x)=0.$$

Setzen wir also

$$f_1(x)=-px^4-qx^3-rx^2-sx-t,$$
$$F_1(x)=Px^2+Qx+R;$$

so ist für jedes x

$$0 = (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)(Px^2 + Qx + R)$$
$$+ (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)(px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t),$$

also nach gehöriger Entwickelung für jedes x

$$\begin{array}{llllllll}
0 = aPx^7 & + aQx^6 & + aRx^5 & & & & & \\
& + bP & + bQ & + bRx^4 & & & & \\
& & + cP & + cQ & + cRx^3 & & & \\
& & & + dP & + dQ & + dRx^2 & & \\
& & & & + eP & + eQ & + eRx & \\
& & & & & + fP & + fQ & + fR \\
+ Ap & + Aq & + Ar & + As & + At & & & \\
& + Bp & + Bq & + Br & + Bs & + Bt & & \\
& & + Cp & + Cq & + Cr & + Cs & + Ct & \\
& & & + Dp & + Dq & + Dr & + Ds & + Dt
\end{array}$$

und folglich

$$\begin{array}{lllllllll}
aP & & & + Ap & & & & & = 0, \\
bP & + aQ & & + Bp & + Aq & & & & = 0, \\
cP & + bQ & + aR & + Cp & + Bq & + Ar & & & = 0, \\
dP & + cQ & + bR & + Dp & + Cq & + Br & + As & & = 0, \\
eP & + dQ & + cR & & + Dq & + Cr & + Bs & + At & = 0, \\
fP & + eQ & + dR & & & + Dr & + Cs & + Bt & = 0, \\
& + fQ & + eR & & & & + Ds & + Ct & = 0, \\
& & + fR & & & & & + Dt & = 0.
\end{array}$$

Dies sind acht Gleichungen zwischen den acht Grössen P, Q, R; p, q, r, s, t. Hat man nun aber zwischen den n Grössen x, y, z, ... u, v überhaupt n Gleichungen des ersten Grades oder n sogenannte lineare Gleichungen von der Form

$$a_0x + b_0y + c_0z + \ldots + g_0u + h_0v = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + g_1u + h_1v = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + g_2u + h_2v = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + g_3u + h_3v = 0,$$
u. s. w.
$$a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + g_{n-1}u + h_{n-1}v = 0;$$

so folgt aus denselben, wie aus §. 4. erhellet, wenn man die dort gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehält, da die in dem in Rede stehenden Paragraphen durch

$$\varphi(k, b, c, d, \ldots g, h),$$
$$\varphi(a, k, c, d, \ldots g, h),$$
$$\varphi(a, b, k, d, \ldots g, h),$$
u. s. w.
$$\varphi(a, b, c, d, \ldots g, k)$$

bezeichneten Functionen jetzt offenbar sämmtlich verschwinden, jederzeit

$$x\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)=0,$$
$$y\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)=0,$$
$$z\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)=0,$$
u. s. w.
$$u\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)=0,$$
$$v\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)=0.$$

Weiss man also aus andern Gründen, dass die Grössen $x, y, z, \ldots u, v$ nicht sämmtlich verschwinden, dass folglich wenigstens eine derselben nicht verschwindet, so ist man immer berechtigt zu schliessen, dass

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots g, h)=0$$

ist. Kehren wir jetzt wieder zu unsern obigen acht Gleichungen zwischen den acht Grössen P, Q, R, p, q, r, s, t zurück, so ist man offenbar immer zu der Annahme berechtigt, dass diese acht Grössen nicht sämmtlich verschwinden, weil, wenn dies der Fall wäre, wegen der aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$f(x)=(x-w)f_1(x),\ F(x)=(x-w)F_1(x),$$

d. i.

$$f(x)=-(x-w)\ (px^4+qx^3+rx^2+sx+t),$$
$$F(x)=(x-w)\ (Px^2+Qx+R),$$

für jedes x

$$f(x)=0,\ F(x)=0,$$

d. i. für jedes x

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0,$$
$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

und folglich

$$a=b=c=d=e=f=0,$$
$$A=B=C=D=0$$

sein würde, welches offenbar ungereimt ist. Da also die Grössen P, Q, R, p, q, r, s, t nicht sämmtlich verschwinden, so ist man das vorher überhaupt von n linearen Gleichungen zwischen den n Grössen $x, y, z, \ldots u, v$ bewiesene Verfahren auf unsere obigen acht Gleichungen des ersten Grades zwischen den acht Grössen P, Q, R, p, q, r, s, t anzuwenden berechtigt, und zwar auf folgende Art.

Die in Rede stehenden acht Gleichungen können auf folgende Art geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
aP+0Q+0R+Ap+0q+0r+0s+0t&=0,\\
bP+aQ+0R+Bp+Aq+0r+0s+0t&=0,\\
cP+bQ+aR+Cp+Bq+Ar+0s+0t&=0,\\
dP+cQ+bR+Dp+Cq+Br+As+0t&=0,\\
eP+dQ+cR+0p+Dq+Cr+Bs+At&=0,\\
fP+eQ+dR+0p+0q+Dr+Cs+Bt&=0,\\
0P+fQ+eR+0p+0q+0r+Ds+Ct&=0,\\
0P+0Q+fR+0p+0q+0r+0s+Dt&=0;
\end{aligned}$$

und die Coefficienten dieser acht Gleichungen sind also

$$\begin{array}{cccccccc}
a, & 0, & 0, & A, & 0, & 0, & 0, & 0\\
b, & a, & 0, & B, & A, & 0, & 0, & 0\\
c, & b, & a, & C, & B, & A, & 0, & 0\\
d, & c, & b, & D, & C, & B, & A, & 0\\
e, & d, & c, & 0, & D, & C, & B, & A\\
f, & e, & d, & 0, & 0, & D, & C, & B\\
0, & f, & e, & 0, & 0, & 0, & D, & C\\
0, & 0, & f, & 0, & 0, & 0, & 0, & D
\end{array}$$

Bildet man nun aus diesen Coefficienten die in §. 4. durch φ bezeichnete Function ganz auf die dort gelehrte Weise, und setzt dieselbe, wie dies nach dem Vorhergehenden verstattet ist, der Null gleich, so erhält man eine die Grösse x gar nicht mehr enthaltende Gleichung, welche also das gesuchte Resultat der Elimination dieser Grössen aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0,$$

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

ist, und die Elimination lässt sich daher nach dieser Methode immer ohne grosse Schwierigkeit und ohne weitläufige Rechnungen ausführen. Nöthig ist nur noch, dass wir zeigen, wie das obige Schema der Coefficienten immer leicht entworfen werden kann. Die einfachste Art scheint uns folgende zu sein. Man bilde zuerst aus den Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

und

$$A,\ B,\ C,\ D$$

der beiden gegebenen Gleichungen nach einer sich leicht von selbst ergebenden höchst einfachen Regel das folgende Schema:

$$\begin{array}{llllllll}
a, & & & A, & & & \\
b, & a, & & B, & A, & & \\
c, & b, & a, & C, & B, & A, & \\
d, & c, & b, & D, & C, & B, & A, \\
e, & d, & c, & & D, & C, & B, & A \\
f, & e, & d, & & & D, & C, & B \\
 & f, & e, & & & & D, & C \\
 & & f, & & & & & D
\end{array}$$

und fülle hierauf alle fehlenden Stellen durch Nullen aus, so erhält man unmittelbar das gesuchte Schema

$$\begin{array}{llllllll}
a, & 0, & 0, & A, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
b, & a, & 0, & B, & A, & 0, & 0, & 0 \\
c, & b, & a, & C, & B, & A, & 0, & 0 \\
d, & c, & b, & D, & C, & B, & A, & 0 \\
e, & d, & c, & 0, & D, & C, & B, & A \\
f, & e, & d, & 0, & 0, & D, & C, & B \\
0, & f, & e, & 0, & 0, & 0, & D, & C \\
0, & 0, & f, & 0, & 0, & 0, & 0, & D
\end{array}$$

der Coefficienten, aus denen die der Null gleich zu setzende Function φ nach den in §. 4. gegebenen Regeln gebildet werden muss.

Man kann noch auf eine andere sehr einfache Weise zu der durch Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

und

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

entspringenden Gleichung gelangen. Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich nämlich unmittelbar die acht folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + 0x^1 + 0x^0 &= 0,\\
0x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx^1 + 0x^0 &= 0,\\
0x^7 + 0x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex^1 + fx^0 &= 0,\\
Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0x^0 &= 0,\\
0x^7 + Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0x^0 &= 0,\\
0x^7 + 0x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + 0x^1 + 0x^0 &= 0,\\
0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx^1 + 0x^0 &= 0,\\
0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx^1 + Dx^0 &= 0;
\end{aligned}$$

deren Coefficienten

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0, & 0 \\ 0, & a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0 \\ 0, & 0, & a, & b, & c, & d, & e, & f \\ A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D \end{matrix}$$

sind, aus denen man nach den in §. 4. gegebenen Regeln die Function φ bilden, dieselbe der Null gleich setzen, und dadurch eine die Grösse x gar nicht mehr enthaltende Gleichung, d. h. das gesuchte Resultat der Elimination der Grösse x aus den beiden gegebenen Gleichungen erhalten kann. Das obige Schema der Coefficienten bildet man am leichtesten auf folgende Art. Man schreibt zuerst

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f & & \\ & a, & b, & c, & d, & e, & f & \\ & & a, & b, & c, & d, & e, & f \\ A, & B, & C, & D & & & & \\ & A, & B, & C, & D & & & \\ & & A, & B, & C, & D & & \\ & & & A, & B, & C, & D & \\ & & & & A, & B, & C, & D \end{matrix}$$

und füllt hierauf alle fehlende Stellen durch Nullen aus, wodurch sich ergiebt

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0, & 0 \\ 0, & a, & b, & c, & d, & e, & f, & 0 \\ 0, & 0, & a, & b, & c, & d, & e, & f \\ A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & A, & B, & C, & D \end{matrix}$$

ganz wie oben.

Um nur ein ganz einfaches Beispiel zu den beiden vorhergehenden Regeln zu geben, so habe man die beiden Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad Ax + B = 0.$$

Bei der Anwendung der ersten Regel bildet man das Schema

$$\begin{matrix} a, & A, & 0 \\ b, & B, & A \\ c, & 0, & B \end{matrix}$$

Bei der Anwendung der zweiten Regel muss man das Schema

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ A, & B, & 0 \\ 0, & A, & B \end{matrix}$$

bilden. Betrachtet man nun überhaupt die drei Gleichungen

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z = 0,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0;$$

so ist nach §. 4.

$$P = (b - a)(c - a)(c - b),$$

und folglich, wenn man dieses Product gehörig entwickelt,

$$P = bc^2 - b^2 c + ab^2 - ac^2 + a^2 c - a^2 b$$

oder vielmehr

$$P = a^0 b^1 c^2 - a^0 b^2 c^1 + a^1 b^2 c^0 - a^1 b^0 c^2 + a^2 b^0 c^1 - a^2 b^1 c^0,$$

und folglich durch Verwandlung der Potenzexponenten in Indices die Function φ in diesem Falle

$$a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_0 - a_1 b_0 c_2 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0.$$

Wendet man nun die erste der beiden obigen Regeln an, so muss man

$$a_0 = a, \ b_0 = A, \ c_0 = 0$$
$$a_1 = b, \ b_1 = B, \ c_1 = A$$
$$a_2 = c, \ b_2 = 0, \ c_2 = B$$

setzen, und erhält hierdurch die gesuchte, x nicht mehr enthaltende Gleichung

$$aB^2 - bAB + cA^2 = 0.$$

Wendet man die zweite der beiden obigen Regeln an, so muss man

$$a_0 = a, \ b_0 = b, \ c_0 = c$$
$$a_1 = A, \ b_1 = B, \ c_1 = 0$$
$$a_2 = 0, \ b_2 = A, \ c_2 = B$$

setzen, und erhält hierdurch wieder die gesuchte, x nicht mehr enthaltende Gleichung

$$aB^2 + cA^2 - bAB = 0$$

oder

$$aB^2 - bAB + cA^2 = 0,$$

ganz übereinstimmend mit dem vorher gefundenen Resultate.

Dieselbe Gleichung erhält man auch durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren in einem solchen Falle wie der vorliegende auf folgende Art. Bestimmt man x aus der zweiten der beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man

$$x = -\frac{B}{A},$$

und dieser Werth von x, in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$a\frac{B^2}{A^2} - b\frac{B}{A} + c = 0$$

oder

$$aB^2 - bAB + cA^2 = 0,$$

ganz wie vorher.

Zur Berechnung weitläufigerer Beispiele fehlt hier der Raum; das vorhergehende wird aber auch zur Erläuterung der Anwendung der beiden im Obigen entwickelten Regeln schon hinreichend sein.

Um uns einigermassen ein Urtheil über die Anwendbarkeit der vorhergehenden Methode bei der wirklichen Ausführung von Eliminationen zu bilden, wollen wir in der Kürze untersuchen, wie gross im Allgemeinen die Anzahl der Glieder ist, aus denen die x nicht mehr enthaltende Gleichung besteht, zu welcher die obige Methode führt. Wenn zwischen n unbekannten Grössen n lineare Gleichungen gegeben sind, so ist im Allgemeinen die Anzahl der Glieder der Zähler und Nenner der Werthe der unbekannten Grössen die Permutationszahl für n verschiedene Elemente, nämlich $1.2.3\ldots n$, welches ganz unmittelbar und von selbst aus Bezout's und Cramer's Regeln für die Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen des ersten Grades, die wir hier, wie schon oben erinnert worden ist, als bekannt voraussetzen, erhellet. Sind nun die beiden gegebenen Gleichungen, aus denen x eliminirt werden soll, in Bezug auf diese Grösse überhaupt vom $m$ten und vom $n$ten Grade, so hat man bei der Anwendung der obigen Eliminationsmethode, wie sogleich in die Augen fallen wird, eigentlich $m+n$ Gleichungen des ersten Grades zwischen eben so vielen unbekannten Grössen aufzulösen, und der gemeinschaftliche Nenner der Werthe dieser unbekannten Grössen ist die Function der x nicht mehr enthaltenden Gleichung, zu welcher die obige Eliminationsmethode führt, so dass also die Anzahl der Glieder dieser Gleichung nach dem Vorhergehenden im Allgemeinen $1.2.3\ldots(m+n)$ ist, wenn auch allerdings wegen der vorkommenden verschwindenden Coefficienten mehrere dieser Glieder wegfallen, und die Anzahl der Glieder im Ganzen sich daher etwas verringert. Weil aber z. B. für $m+n=10$ schon $1.2.3\ldots(m+n)=3628800$ ist, so sieht man, dass die Anzahl der Glieder der x nicht mehr enthaltenden Gleichung doch sehr bald ungeheuer gross werden, und die Elimination von x nach der obigen Methode in der Praxis dann so gut wie unausführbar sein wird.

Auch diese zweite Eliminationsmethode lehrt dem Wesentlichen nach Euler in der Introductio in Analysin Infinitorum. Cap. XIX. p. 265. In neuester Zeit ist dieselbe von Sylvester in dem Philosophical Magazine. February. 1840 und von Richelot in Crelle's Journal mit mehreren guten, in das Obige dem Wesentlichen nach mit aufgenommenen Bemerkungen bereichert worden.

§. 8.

In den Mémoires de l'Académie des sciences de Paris. 1764 hat Bezout eine Eliminationsmethode angegeben, die im Allgemeinen auf Folgendes hinaus kommt. Die beiden gegebenen Gleichungen seien jetzt

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$
$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0,$$

wobei wir bemerken, dass in den Fällen, wo die beiden Gleichungen nicht von demselben Grade sind, die Coefficienten einiger Anfangsglieder in der einen dieser beiden Gleichungen als verschwindend zu betrachten sind. Diese beiden Gleichungen wollen wir auf die Form

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_lx^{n-l}$$
$$= -(a_{l+1}x^{n-l-1} + a_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n),$$
$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_lx^{n-l}$$
$$= -(b_{l+1}x^{n-l-1} + b_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n)$$

bringen, wo l jede der positiven ganzen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots n-1$$

sein kann. Aus den beiden auf diese Weise dargestellten Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{a_0x^l + a_1x^{l-1} + a_2x^{l-2} + \ldots + a_{l-1}x + a_l}{b_0x^l + b_1x^{l-1} + b_2x^{l-2} + \ldots + b_{l-1}x + b_l}$$
$$= \frac{a_{l+1}x^{n-l-1} + a_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_{l+1}x^{n-l-1} + b_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit dem Producte der beiden Nenner multiplicirt,

$$(a_0x^l + a_1x^{l-1} + \ldots + a_{l-1}x + a_l)$$
$$\times(b_{l+1}x^{n-l-1} + b_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n)$$
$$-(b_0x^l + b_1x^{l-1} + \ldots + b_{l-1}x + b_l)$$
$$\times(a_{l+1}x^{n-l-1} + a_{l+2}x^{n-l-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = 0.$$

Denkt man sich jetzt die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nach Potenzen von x entwickelt, so wird dieselbe offenbar die folgende Form annehmen:

$$A_{0,l}x^{n-1} + A_{1,l}x^{n-2} + A_{2,l}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,l}x + A_{n-1,l} = 0,$$

und mittelst einer sehr einfachen Betrachtung überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Ausdrücke:

$$A_{0,l} = a_0b_{l+1} - b_0a_{l+1},$$
$$A_{1,l} = a_1b_{l+1} - b_1a_{l+1}$$
$$+ a_0b_{l+2} - b_0a_{l+2},$$
$$A_{2,l} = a_2b_{l+1} - b_2a_{l+1}$$
$$+ a_1b_{l+2} - b_1a_{l+2}$$
$$+ a_0b_{l+3} - b_0a_{l+3}.$$

$$A_{3,l} = a_3 b_{l+1} - b_3 a_{l+1}$$
$$+ a_2 b_{l+2} - b_2 a_{l+2}$$
$$+ a_1 b_{l+3} - b_1 a_{l+3}$$
$$+ a_0 b_{l+4} - b_0 a_{l+4},$$

u. s. w.

$$A_{l-1,l} = a_{l-1} b_{l+1} - b_{l-1} a_{l+1}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+2} - b_{l-2} a_{l+2}$$
$$+ a_{l-3} b_{l+3} - b_{l-3} a_{l+3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$A_{l,l} = a_l b_{l+1} - b_l a_{l+1}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+2} - b_{l-1} a_{l+2}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+3} - b_{l-2} a_{l+3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{l+1,l} = a_l b_{l+2} - b_l a_{l+2}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+3} - b_{l-1} a_{l+3}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+4} - b_{l-2} a_{l+4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{l+2,l} = a_l b_{l+3} - b_l a_{l+3}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+4} - b_{l-1} a_{l+4}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+5} - b_{l-2} a_{l+5}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{l+3,l} = a_l b_{l+4} - b_l a_{l+4}$$
$$+ a_{l-1} b_{l+5} - b_{l-1} a_{l+5}$$
$$+ a_{l-2} b_{l+6} - b_{l-2} a_{l+6}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

u. s. w.

$$A_{n-2,l} = a_l b_{n-1} - b_l a_{n-1}$$
$$+ a_{l-1} b_n - b_{l-1} a_n.$$
$$A_{n-1,l} = a_l b_n - b_l a_n.$$

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke zur Entwickelung der Grössen

$$A_{0,l};\ A_{1,l};\ A_{2,l};\ A_{3,l};\ \ldots A_{n-1,l}$$

hat man sich nur zu merken, dass man sowohl in der Reihe der durch a mit den gehörigen Indices, als auch in der Reihe der durch b mit den gehörigen Indices bezeichneten Coefficienten von jedem Gliede an aufsteigend und absteigend immer nur so weit fortschreiten muss, als diese Coefficienten nicht verschwinden. Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, sei $l=4$, $n=7$; so ist

$$\begin{aligned}
A_{0,4} &= a_0 b_5 - b_0 a_5, \\
A_{1,4} &= a_1 b_5 - b_1 a_5 \\
&\quad + a_0 b_6 - b_0 a_6, \\
A_{2,4} &= a_2 b_5 - b_2 a_5 \\
&\quad + a_1 b_6 - b_1 a_6 \\
&\quad + a_0 b_7 - b_0 a_7, \\
A_{3,4} &= a_3 b_5 - b_3 a_5 \\
&\quad + a_2 b_6 - b_2 a_6 \\
&\quad + a_1 b_7 - b_1 a_7, \\
A_{4,4} &= a_4 b_5 - b_4 a_5 \\
&\quad + a_3 b_6 - b_3 a_6 \\
&\quad + a_2 b_7 - b_2 a_7, \\
A_{5,4} &= a_4 b_6 - b_4 a_6 \\
&\quad + a_3 b_7 - b_3 a_7, \\
A_{6,4} &= a_4 b_7 - b_4 a_7.
\end{aligned}$$

Sehr leicht erhellet nun aber auch aus dem Vorhergehenden die Richtigkeit der nachstehenden für das Folgende wichtigen Relationen:

$$\begin{aligned}
A_{l+1,\,l} &= A_{l,\,l+1}, \\
A_{l+2,\,l} &= A_{l,\,l+2}, \\
A_{l+3,\,l} &= A_{l,\,l+3}, \\
&\text{u. s. w.} \\
A_{n-2,\,l} &= A_{l,\,n-2}, \\
A_{n-1,\,l} &= A_{l,\,n-1}.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$A_{0,\,l}x^{n-1} + A_{1,\,l}x^{n-2} + A_{2,\,l}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,\,l}x + A_{n-1,\,l} = 0,$$

oder vielmehr aus der Gleichung

$$A_{0,l}x^{n-1} + A_{1,l}x^{n-2} + A_{2,l}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,l}x^1 + A_{n-1,l}x^0 = 0,$$

erhält man, wenn, was verstattet ist, für l nach und nach die positiven ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ gesetzt werden, die folgenden n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&A_{0,0}x^{n-1} + A_{1,0}x^{n-2} + A_{2,0}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,0}x^1 + A_{n-1,0}x^0 = 0, \\
&A_{0,1}x^{n-1} + A_{1,1}x^{n-2} + A_{2,1}x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,1}x^1 + A_{n-1,1}x^0 = 0, \\
&A_{0,2}x^{n-1} + A_{1,2}x^{n-2} + A_{2,2}x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,2}x^1 + A_{n-1,2}x^0 = 0, \\
&A_{0,3}x^{n-1} + A_{1,3}x^{n-2} + A_{2,3}x^{n-3} + \ldots + A_{n-2,3}x^1 + A_{n-1,3}x^0 = 0, \\
&\qquad\qquad\text{u. s. w.} \\
&A_{0,n-1}x^{n-1} + A_{1,n-1}x^{n-2} + A_{2,n-1}x^{n-3} + \ldots \\
&\qquad\qquad + A_{n-2,n-1}x^1 + A_{n-1,n-1}x^0 = 0;
\end{aligned}$$

und wird also, wie sich aus dem Obigen sogleich ergiebt, zu der

gesuchten, die Grösse x nicht mehr enthaltenden Gleichung gelangen, wenn man aus den Grössen

$$A_{0,0};\ A_{1,0};\ A_{2,0};\ \ldots A_{n-2,0};\ A_{n-1,0}$$
$$A_{0,1};\ A_{1,1};\ A_{2,1};\ \ldots A_{n-2,1};\ A_{n-1,1}$$
$$A_{0,2};\ A_{1,2};\ A_{2,2};\ \ldots A_{n-2,2};\ A_{n-1,2}$$

u. s. w.

$$A_{0,n-2};\ A_{1,n-2};\ A_{2,n-2};\ \ldots A_{n-2,n-2};\ A_{n-1,n-1}$$
$$A_{0,n-1};\ A_{1,n-1};\ A_{2,n-1};\ \ldots A_{n-2,n-1};\ A_{n-1,n-1}$$

auf bekannte Weise die im Obigen durch φ bezeichnete Function bildet, und dieselbe der Null gleich setzt. Aus den im Vorhergehenden bewiesenen Relationen ergiebt sich aber auf der Stelle, dass man auch statt des obigen Schema's das Schema

$$A_{0,0};\ A_{0,1};\ A_{0,2};\ \ldots A_{0,n-2};\ A_{0,n-1}$$
$$A_{0,1};\ A_{1,1};\ A_{1.2};\ \ldots A_{1,n-2};\ A_{1,n-1}$$
$$A_{0,2};\ A_{1,2};\ A_{2,2};\ \ldots A_{2,n-2};\ A_{2,n-1}$$

u. s. w.

$$A_{0,n-2};\ A_{1,n-2};\ A_{2,n-2};\ \ldots A_{n-2,n-2};\ A_{n-2,n-1}$$
$$A_{0,n-1};\ A_{1,n-1};\ A_{2,n-1};\ \ldots A_{n-2,n-1};\ A_{n-1,n-1}$$

setzen, aus den in diesem Schema enthaltenen Grössen die im Obigen durch φ bezeichnete Function bilden, und dieselbe der Null gleich setzen kann.

Am Schluss dieser Abhandlung bemerken wir noch, dass bei derselben überhaupt das Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique par Cauchy. T. I. Paris. 1840 *) p. 385 vielfach benutzt worden ist. In einer zweiten Abhandlung werden wir späterhin auf diesen Gegenstand zurück kommen.

---

*) Wovon aber die 12te Lieferung, in welcher sich das in Rede stehende Mémoire befindet, nur erst ganz vor Kurzem erschienen ist.

VIII.

Ueber die Summen der Winkel in ebenen geradlinigen Vielecken.

Von dem

Herrn Director J. H. T. Müller

am Realgymnasium zu Gotha.

---

1. Bekanntlich wird die Summe der nach einerlei Richtung genommenen Aussenwinkel eines ebenen einfachen Vielecks dadurch ermittelt, dass man aus irgend einem Punkte mit den auf einander folgenden Polygonseiten die gleichstimmig parallelen Linien zieht und die in einerlei Drehungsrichtung genommenen Winkel der den successiven Seiten entsprechenden Parallelen summirt, woraus hervorgeht, dass diese Summe immer ein Vielfaches von $4R$ betragen muss.

2. Auf ganz dieselbe Weise lässt sich auch, was man bisher übersehen zu haben scheint, die Summe der innern Winkel eines solchen Vielecks finden, wenn aus einem beliebigen Punkte mit der 1sten, 3ten, 5ten, .. Seite die gleichstimmig, mit der 2ten, 4ten, 6ten, .. Seite aber die ungleichstimmig parallelen Linien gezogen und dann bei einerlei Drehungsrichtung die Winkel der Parallelen nach folgendem Gesetze summirt werden.

Bezeichnen 1; 3; 5; .. die gleichstimmigen und 2; 4; 6; .. die ungleichstimmigen Parallelen, so ist die Summe aller innern Winkel

1) im $(2n)$eck

$$=(1,2)+(2,3)+(3,4)+\ldots+(2n-1,2n)+(2n,1)$$

2) im $(2n+1)$eck

$$=(1,2)+(2,3)+(3,4)+\ldots+(2n,2n+1)+(2n+1,1')$$

wenn im letztern Falle $1'$ die Rückverlängerung der Parallelen 1 bezeichnet. — Im ersten Falle ist demnach jene Winkelsumme immer ein gerades, im zweiten ein ungerades Vielfaches von 2 rechten Winkeln.

3. Diese Herleitungsweise der Summe der innern Vieleckswinkel hat, abgesehen von der Uebereinstimmung mit der für die äussern Winkel, vor der gewöhnlichen den erheblichen Vorzug, dass sie sich ganz gleichmässig auf alle Vielecke mit beliebig vielen convexen Winkeln anwenden und dass sie die eigentliche Bedeutung der Polygonwinkel deutlicher erkennen lässt.

Es sei mir erlaubt, aus dem Obigen noch einige Folgerungen

zu ziehen, welche eine Ergänzung dessen bilden, was ich in der Abhandlung über die symmetrischen Kreisvielecke von ungerader Seitenzahl, Gotha 1840. über die verschiedenen Winkelsummen der Vielecke angedeutet hatte.

4. Bei unveränderter Drehungsrichtung ist in einem einfachen ebenen Vielecke die Summe der Winkel je zweier aufeinander folgender Seiten

	für $(2n+1)$ Scheitel;	für $(2n)$ Scheitel
entweder	$1 . 2R$,	$2 . 2R$,
oder	$3 . 2R$,	$4 . 2R$,
oder	$5 . 2R$,	$6 . 2R$,
.	. .	. .
.	. .	. .
oder	$(4n+1) . 2R$.	$(4n-2) . 2R$.

Da aber bei jedem $m$eck die eine oder die andere Drehungsrichtung gewählt werden kann, so giebt es im Allgemeinen für dasselbe zwei Summen der Winkel je zweier anstossender Seiten, welche einander zu $m . 4R$ ergänzen. Beschränkt man sich daher, wenn beide Summen ungleich sind, auf die jedesmalige kleinere, so erhält man bloss nachstehende mögliche Werthe:

für das $(2n+1)$eck;	für das $(2n)$eck
$1 . 2R$;	$2 . 2R$,
$3 . 2R$,	$4 . 2R$,
. .	. .
. .	. .
$(2n+1) . 2R$,	$2n . 2R$,

wo die höchsten Werthe Vielecken angehören, deren Winkelsumme bei beiden Drehungsrichtungen gleich gross ist.

5. Aus der in (2) angegebenen Construction ergiebt sich sogleich, wie umgekehrt auch Vielecke von gegebener Seitenzahl und Seitenrichtung construirt werden können, welche eine vorgeschriebene Winkelsumme, wie die in (4) angegebenen, haben.

Zieht man nämlich von irgend einem Punkte aus in einer Ebene m Strahlen in beliebigen Richtungen, und schreibt an jeden derselben eine der m ersten natürlichen Zahlen, so hängt bei geradzahligen Vielecken die Summe der Winkel von der Zahl der Nichtfolgen ab, welche sich ergeben, wenn man in der gewählten Drehungsrichtung vom Strahle 1 an fortgehend sämmtliche Strahlen so abliest, wie sie, ohne Rücksicht auf die Bezeichnung, der Reihe nach auf einander folgen. Enthalten alsdann die zugehörigen Zahlen a Nichtfolgen, so ist die Summe der Winkel jedes $(2n)$ecks, dessen 1ste, 3te, 5te, . . und 2te, 4te, 6te, . . Seite den Strahlen 1, 3, 5, . . gleichstimmig und den Strahlen 2, 4, 6, . . ungleichstimmig parallel ist, $=(1+a) . 4R$, indem dann a Umläufe gemacht werden müssen, bis man wieder zu dem ersten Strahle gelangt, von dem man ausgegangen war. So enthält jedes zu den

1 2 45 3; 1 3 25 4;
1 2 54 3; 1 3 52 4;
1 2 35 4; 1 3 24 5;
1 2 53 4; 1 3 42 5;
1 2 34 5; 1 4 23 5;
1 2 43 5; 1 4 32 5,

welches die 12 verschiedenen Fünfecke sind, die zu jenen Scheiteln gehören.

8. Die auf solche Weise gebildeten Anordnungen der Elemente 2, 3, . ., m, worin keine zwei vorkommen, von denen die eine die Umkehrung der andern ist, verdienen wegen des häufigen Gebrauchs, der sich in der Geometrie davon machen lässt, besondere Beachtung.

9. Aus (7.) ergiebt sich in Verbindung mit dem Vorhergehenden, dass die verschiedenen zu denselben Scheiteln gehörigen Vielecke sich nach den kleinsten Summen ihrer Winkel klassificiren lassen, was man bisher unterlassen zu haben scheint.

10. Bei der Richtung, welche die Geometrie in der neuern Zeit genommen, dürfte die Aufnahme des in (2.) gegebenen Beweises in die Elemente nicht unzweckmässig sein, indem der Anfänger dann frühzeitig mit den Vielecken in ihrer allgemeinern Bedeutung bekannt gemacht werden kann.

IX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

(Fortsetzung.)

4. Cubatur des Ellipsoids, Hyperboloids mit 2 gleichen Axen.

Die Gleichung des um die grosse Axe rotirenden Kegelschnitts sei $y^2 = px + qx^2$, die Abscisse x werde in n gleiche Theile getheilt und durch die Endpunkte der Ordinaten werden Parallelen zur grossen Axe gezogen, dann entstehen durch Umdrehung des Kegelschnitts Cylinder, deren Gesammt-Cubikinhalt durch die Summation der Quadratzahlen und der natürlichen Zahlen gefunden wird $= x\pi\left[\frac{px}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+qx^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right]$.

Indem man das Ellipsoid mit 3 ungleichen Axen durch Ebenen, die zu zwei Axen parallel gezogen werden, in gleich weit von einander abstehende elliptische Cylinder zerfällt, kann man durch dasselbe Hülfsmittel ohne die geringste Schwierigkeit den Gesammt-Cubikinhalt der elliptischen Cylinder erhalten. Sind die Axen b und c, zu welchen die Ebenen parallel gelegt werden, und wird die auf a genommene Abscisse x vom Mittelpunkte gezählt in n gleiche Theile getheilt, so ist der Cubikinhalt der elliptischen Cylinder $= x\pi cb\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$, woraus der Cubikinhalt des halben Ellipsoids $\frac{2}{3}abc \,.\, \pi$ folgt.

5.

Der bekannte Ausdruck für den Radius des Krümmungskreises der Kegelschnitte durch die Normale stand mir zu isolirt, ich suchte deshalb einen Ausdruck für den Radius des durch 3 Punkte eines Kegelschnitts gelegten Kreises, und fand, dass jener Radius gleich ist dem Produkte dreier Normalen auf die 3 Sehnen des Kegelschnitts, dividirt durch das Quadrat des halben Parameters. Jede dieser Normalen wird auf folgende Art bestimmt: Aus dem Mittelpunkte wird ein Radius Vektor durch den Mittelpunkt der Kegelschnittssehne gelegt, und die oben bezeichnete Normale auf diese Sehne geht von dem Endpunkte des Radius Vektor auf der Curve bis zum Durchschnitte mit der grossen Axe. Fallen die 3 Punkte des Kegelschnitts zusammen, so verwandeln sich die ursprünglich ungleichen Normalen in 3 gleiche Linien.

6.

Wenn ein Punkt sich auf der Peripherie einer Ellipse bewegt, während der anziehende Punkt in einem Brennpunkte derselben steht, so ist die anziehende Kraft dem Quadrate der umgekehrten Entfernung des anziehenden von dem angezogenen Punkte proportional.

Dieser bekannte Satz lässt sich ohne Hülfe der höhern Rechnungen beweisen. Die Kraft, mit welcher der Punkt vom Centrum der Anziehung sich zu entfernen strebt, ist $= \frac{v^2}{R}$, wenn v die Geschwindigkeit und R den Krümmungshalbmesser für den Ort des bewegten Punkte bezeichnet. Ist F die Kraft, mit welcher dieser Punkt in der Richtung des Radius Vektor r angezogen wird, so ist die in die Richtung der Normale n fallende Kraft $F \cos(t, r)$, wenn t die Senkrechte vom Brennpunkte auf die Tangente bezeichnet. Da nun die genannte Kraft gerade so gross sein muss, als die Centrifugalkraft $\frac{v^2}{R}$, so ist $F = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{r}{t}$. Ist die Geschwindigkeit im nächsten Scheitelpunkte 1, die Excentrizität e, so ist $a(1-e) = vt$, folglich $F = \frac{a^2 \cdot (1-e)^2 \cdot r}{Rt^3}$. Da aber, wie leicht zu beweisen, $\frac{nt}{r} = \frac{b^2}{a}$, und $R = \frac{n^3 \cdot a^2}{b^4}$, so ist $F = \frac{(1-e^2)a^2}{b^2 \cdot r^2}$.

Bewegt sich der Punkt auf der Peripherie der Ellipse, während der anziehende Punkt im Mittelpunkte derselben steht, so ist F der Entfernung direkt proportional.

wusst wird, z. B. dass sich alle diese Curven in 2 Punkten begegnen, dass sie je nach dem höhern Grade bis zum Punkte $\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$ immer näher an die Abscissenaxe und an die Ordinate 1 treten u. s. w.

10. Veranschaulichende Darstellung der Primzahlen.

Ein grosses gleichseitiges Dreieck wird in 10000 kongruente gleichseitige Dreiecke zertheilt und in jedes Dreiecksfeld eine der natürlichen Zahlen so geschrieben, dass die Zahl 1 in die Spitze, 2 an den Anfang der zweiten Horizontalreihe, 4 an das Ende derselben, 5 an den Anfang der dritten Horizontalreihe, 9 an das Ende derselben kommt, wie denn überhaupt der ganze rechte Saum des Dreiecks von den Quadraten der natürlichen Zahlen eingenommen, in jeder Horizontalreihe aber von der linken nach der rechten Hand gezählt wird. Giebt man nun den Feldern der Primzahlen eine andere Farbe, so gewahrt man bei geringer Aufmerksamkeit, dass im Allgemeinen die Primzahlen in gewissen parallelen fast gleichweit von einander entfernten Richtungen dichter beisammen liegen, als in andern Richtungen. Die Zahlen von der Form $41+n(n-1)$ stellen einen Stab mit geschlossenem sechseckigem Sterne dar, dem einzigen, der unter den 10000 Dreiecken vorkommt.

11.

Einfache Bestimmung des Brechungsverhältnisses in einem dreiseitigen Prisma durch den Neigungswinkel ψ zweier Seiten-Ebenen des Prismas und durch die Winkel, welche der einfallende und der austretende Strahl an jeder Stelle mit dem Einfallslothe bilden.

Der Strahl treffe in A das Prisma, und bilde mit dem Einfallslothe den Winkel a, der gebrochene Strahl trete in B aus dem Prisma und bilde mit dem Einfallslothe daselbst den Winkel b, die beiden Lothe, welche die Winkel α und β im Innern des Prismas mit dem Strahle AB einschliessen, schneiden sich in C, so hat man in dem Dreiecke ABC

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \,.\, CB \,.\, \cos\psi$$
$$= AB^2\left[\frac{AC^2}{AB^2} + \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 + \frac{2AC}{AB} \cdot \frac{CB}{AB}\cos\psi\right]$$

folglich $1 = \sin\beta^2 + \sin\alpha^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\psi$

$$= \frac{\sin b^2}{n^2\sin\psi^2} + \frac{\sin a^2}{n^2\sin\psi^2} + \frac{2\sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos\psi}{n^2\sin\psi^2}$$

und $n\sin\psi = \sqrt{\sin a^2 + \sin b^2 + 2\sin a \,.\, \sin b\cos\psi}$ *).

---

*) Siehe Seebeck's: Observationes de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis. Berolini 1830.

(Der Schluss folgt im nächsten Hefte.)

X.

Lehrsatz, die Ecken der Pyramiden betreffend.

Von dem

Herrn Director J. H. T. Müller

am Realgymnasium zu Gotha.

Da die Eigenschaften der Polyederecken bisher noch wenig untersucht worden sind, so wird vielleicht einzelnen Mathematikern die Mittheilung eines, wie ich glaube, neuen und an Folgerungen ziemlich reichen Lehrsatzes, die Ecken der Pyramiden betreffend, nicht unangenehm sein. Sollte ich mich hierin nicht täuschen, so würde ich später noch eine Reihe damit verwandter Sätze für andere Polyeder mittheilen.

1. Ich lege, der grössern Deutlichkeit wegen, statt einer $n$seitigen Pyramide die beliebige fünfseitige $OABCDE$ (M. s. Fig. 2 a und b auf der schon dem ersten Hefte beigegebenen Taf. I.) bei meiner Betrachtung zu Grunde und nehme auch fürs Erste an, dass die fünfkantige Basis $ABCDE$ lauter concave Winkel enthält. Jene Beschränkung ist ohne Einfluss auf die Allgemeingültigkeit des Lehrsatzes und diese wird später aufgehoben werden.

2. Um die Ecken unserer Pyramide zu vereinigen, verfahre ich wie bei der Summirung der Winkel eines ebenen geradlinigen Vielecks in dem Aufsatze Nr. VIII. und ziehe aus dem Mittelpunkte M irgend einer Kugel

1) mit den Seitenkanten OA, OB, OC, OD, OE die ungleichstimmig parallelen Radien, welche der Kugelfläche bezüglich in den Punkten α', β', γ', δ', ε' begegnen und dort die Spitzen eines sphärischen Fünfecks $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ bilden, welche das Maass der Scheitelecke von O, mithin auch der ursprünglichen Ecke O in der gegebenen Pyramide ist;

2) aus demselben Punkte M mit den Grundkanten BA, CB, DC, ED, AE die gleichstimmig parallelen Radien, die die Kugelfläche bezüglich in den Punkten a, b, c, d, e und rückwärts verlängert in a', b', c', d', e' treffen, und sämmtlich in dem mit der Basis der Pyramide parallelen Hauptkreise der Kugel liegen.

3. Da Ma', Me, $M\alpha'$ mit AB, AE, AO gleichstimmig parallel sind, so ist das sphärische Dreieck

$\alpha'\alpha'e$ das Maass der Grundecke A der gegebenen Pyramide,
und ebenso $b'\beta'a$ - - - - B - - -
$c'\gamma'b$ - - - - C - - -
$d'\delta'c$ - - - - D - - -
$e'\varepsilon'd$ - - - - E - - -

Ausserdem entstehen noch die sphärischen Vierecke

$$\alpha' e b'\beta'$$
$$\beta' a c'\gamma'$$
$$\gamma' b d'\delta'$$
$$\delta' c e'\varepsilon'$$
$$\varepsilon' d a'\alpha',$$

bei denen, was ihren Inhalt betrifft, zu unterscheiden ist, ob die zwischen einem griechischen und lateinischen Buchstaben liegenden Seiten einander verlängert oder unverlängert schneiden, welches statt findet, je nachdem in der Drehungsrichtung a, b, c, d, e die untern Grundlinien derselben, nämlich eb', ac', bd', ce', da', Folgen oder Nichtfolgen bilden. Im letztern Falle nämlich giebt der Unterschied zwischen dem obern und untern der beiden entstandenen Dreiecke den Inhalt des jedesmaligen sphärischen Vierecks.

4. Mit Rücksicht hierauf ist

$$\begin{aligned} \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' + a'\alpha' e + \alpha' e b'\beta' &= \text{der Halbkugelfläche,} \\ &+ b'\beta' a + \beta' a c'\gamma' \\ &+ c'\gamma' b + \gamma' b d'\delta' \\ &+ d'\delta' c + \delta' c e'\varepsilon' \\ &+ e'\varepsilon' d + \varepsilon' d a'\alpha' \end{aligned}$$

die das Maass von 4 rechten Ecken ist, welche ich mit $4R'$ bezeichne.

5. Weil ferner z. B. OA, OB und AB in einer Ebene liegen, so liegen auch die Endpunkte α', β', a und a' der damit parallelen Radien in einer und derselben Ebene, und es ist das sphärische Zweieck $a'\alpha'\beta'ad'ea'$ das Maass des Grundkeils AB. Bezeichnen wir nun die die Grundkeile der Pyramide, nämlich AB, BC, CD, DE, EA messenden Zweiecke mit (a), (b), (c), (d), (e), so erhalten wir die neuen Gleichungen

$$(a) = a'\alpha' e + \alpha' e b'\beta' + b'\beta' a;$$
$$(b) = b'\beta' a + \beta' a c'\gamma' + c'\gamma' b;$$
$$(c) = c'\gamma' b + \gamma' b d'\delta' + d'\delta' c;$$
$$(d) = d'\delta' c + \delta' c e'\varepsilon' + e'\varepsilon' d;$$
$$(e) = e'\varepsilon' d + \varepsilon' d a'\alpha' + a'\alpha' e.$$

6. Addirt man die in (5) erhaltenen Gleichungen und sub-

trahirt von der dadurch hervorgebrachten die in (4) erhaltene Gleichung, so ist für K als Halbkugelfläche:

$$(a)+(b)+(c)+(d)+(e)-K=a'\alpha'e+b'\beta'a+c'\gamma'b$$
$$+d'\delta'c+e'\varepsilon'd-\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'.$$

Aus dieser Gleichung aber ergiebt sich, wenn man von der Kugelfläche wieder zu den Ecken zurückkehrt und zugleich erwägt, dass $(a)-a'\alpha'e$ das Maass derjenigen Ecke, welche AO, AE und die Verlängerung von BA über A hinaus zu Kanten hat, also die Aussenecke von A ist, die ich mit A' bezeichne, dass

$$A'+B'+C'+D'+E'+O=4R'.$$

7. Da die ganze Herleitungsweise zeigt, dass die Beziehungen für jede mehrseitige Pyramide sich nicht ändern, so ist allgemein für jede Pyramide mit hohlwinkliger Grundfläche

$$A'+B'+C'+\ldots+O=4R', \text{ d. i.}$$

„In jeder gewöhnlichen Pyramide ist die Summe „aller nach einerlei Richtung genommenen Aus„senecken über der Grundfläche, vermehrt um die „Ecke an der Spitze, so gross als vier rechte „Ecken;“

oder was dasselbe ist,

„die Summe aller Aussenecken gleich der Neben„ecke der Ecke an der Spitze.“

8. Diess ist vielleicht der erste Lehrsatz, der bei Polyedern mit nicht parallelen Flächen, einen constanten Werth für eine Summe von Ecken nachweist, welche von der Zahl und Lage der Seiten völlig unabhängig ist.

Auch ist die Analogie dieses Satzes mit dem bekannten planimetrischen zu beachten, dem zufolge

in jedem hohlwinkligen ebenen Vielecke die Summe aller Aussenwinkel vier rechte Winkel beträgt.

9. Bewegt sich die Spitze O der Pyramide nach der Grundfläche hin, so behält der Satz auch dann noch seine Gültigkeit, wenn O in die Ebene der Grundfläche selbst fällt, indem dann die Aussenkeile sämmtlich zu Null werden, während die Ecke O in eine flache Ecke übergeht, die $4R'$ gleich ist.

Setzt die Spitze O ihre Bewegung noch weiter fort, d. h. tritt sie unter die Grundfläche, so wird, wie man sich sogleich überzeugt, die Ecke an der Spitze convex, also grösser als $4R'$; dagegen werden dann die Aussenecken an der Grundfläche, Alles auf die ursprüngliche Figur bezogen, negativ. Auch dann ist noch

die algebraische Summe der Aussenecken und der Ecke an der Spitze so gross als vier rechte Ecken.

Der letztere Fall kommt bei der Betrachtung der allgemeinen Polyeder in Anwendung.

Wird der Abstand der Spitze O von der Grundfläche unendlich gross, werden also die Seitenkanten der Pyramide einander parallel, und geht die Ecke O in Null über, so ist auch noch

in dem halbbegrenzten prismatischen Raume die Summe aller einseitswendigen Aussenecken gleich der Summe von vier rechten Ecken.

10. Aus dem Beweise von (7) folgt ferner unmittelbar, dass in jeder Pyramide

die Summe der nach einer Richtung hin genommenen Aussenecken an der Grundfläche gleich ist der Summe der nach der entgegengesetzten hin genommenen.

11. Auch ergiebt sich sofort,

dass wenn in zwei Pyramiden von gleicher oder ungleicher Seitenzahl die Summen der einseitswendigen Aussenecken an der Grundfläche einander gleich sind, auch die beiden Ecken an der Spitze einander gleich sein werden.

Der obige Lehrsatz bietet demnach auch ein Hülfsmittel dar, die Gleichheit zweier der Gestalt nach durchaus verschiedenen Ecken zu erweisen.

12. Umgekehrt ist, wenn man durch eine Ecke beliebig viele Ebenen legt, welche keiner Kante parallel sind und nicht durch den Scheitel gehen,

an jeder solchen Ebene die Summe aller einseitswendigen nach der Spitze zu liegenden Aussenecken constant und der Ergänzung der gegebenen Ecke zu vier rechten Ecken gleich.

Auch lässt sich dieser Satz auf gleichgrosse Ecken ausdehnen.

13. Enthält endlich die Grundfläche der Pyramide convexe Winkel, so lässt sich eben so leicht darthun,

dass die Summe aller einseitswendigen Aussenecken vermehrt um die Ecke an der Spitze sovielmal vier rechte Ecken beträgt, als in der Summe der Aussenwinkel der Grundfläche vier rechte Winkel enthalten sind.

Erst in dieser Gestalt hat der Lehrsatz die erforderliche Allgemeinheit, in welcher er sich auf Polyeder mit convexen Ecken anwenden lässt.

14. Mit Uebergehung aller weitern Folgen, welche sich aus dem oben erwiesenen Lehrsatze ziehen lassen, erlaube ich mir noch schliesslich einige ganz leichte Sätze, die Ecken und Keile der Prismen betreffend mitzutheilen, die, wenn es nicht bereits geschehen ist, in die Elemente der Stereometrie könnten aufgenommen werden.

15. Im $n$seitigen Prisma ist

1) die Summe aller Seitenkeile das $(n-2)$fache des gestreckten Keils.
2) Die Summe aller Grundkeile das $n$fache des gestreckten Keils.

Hieraus folgt, dass

3) im Parallelepipedon die Summe aller Keile das 3fache von vier rechten Keilen ist.

16. Eben so ist im $n$seitigen Prisma die

Summe aller Ecken gleich der Summe aller Seitenkeile oder $(n-2)$mal so gross als die flache Ecke.

Demnach haben alle Parallelepipeda eine gleichgrosse Eckensumme, welche $8R'$ oder eine volle Ecke beträgt.

XI.

Combinatorische Lösung der Euler-Pfaff'schen Aufgabe in Nr. XXVII. des ersten Theils.

Von dem

Herrn Professor Dr. Tellkampf

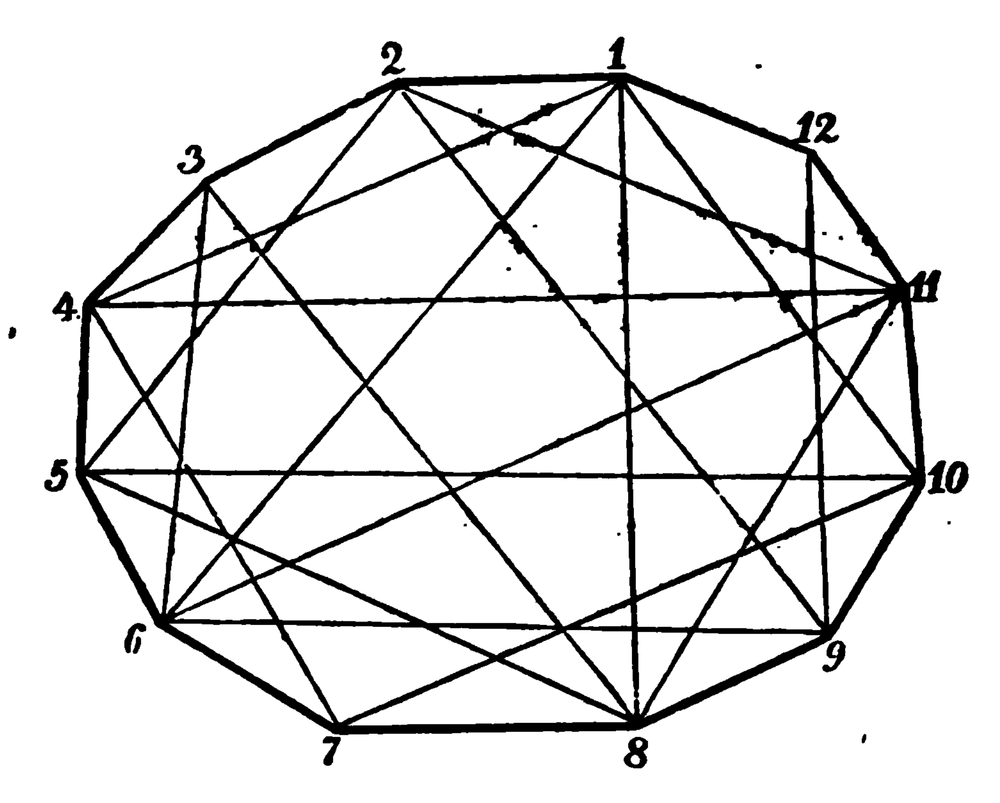
in Hannover.

Die nach dem Vorgange von Euler, welcher seine Forderung auf die Zerlegung in Dreiecke beschränkt hatte, von J. F. Pfaff gestellte allgemeinere Aufgabe lautet a. a. O. folgendergestalt:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein $n$eck durch Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt.

Da der Gegenstand der Betrachtung offenbar einen combinatorischen Charakter hat, indem es sich um alle denkbaren Umstellungen der Diagonalen handelt, durch welche die Gesammtfigur in die verlangten Partialfiguren zerlegt werden könne, so erscheint es angemessen, die Eckpunkte des gegebenen $n$ecks durch die fortlaufende Zahlenreihe 1, 2, 3 .... n zu bezeichnen und die von diesen Punkten auslaufenden Diagonalen (als die eigentlichen Elemente der Zusammenstellungen) ebenfalls beziehungsweise mit den Zahlen 1, 2, 3 .... n anzudeuten, wobei indessen Wiederholbarkeit derselben bedungen werden muss, um z. B. durch die Combinationsform 1 . 1 . 1 . 1 vier verschiedene aber sämmtlich vom Eckpunkte 1 ausgehende Diagonalen auszudrücken. Unter dieser Voraussetzung braucht man, um irgend eine Combinationsform von q Elementen aus den Zahlen 1, 2, 3 ... n als Diagonalenstellung in der gegebenen Figur nachzuweisen, nur von jedem der bezeichneten Eckpunkte zu dem um $(m-1)$ weiter gezählten eine Diagonale zu ziehen, indem man zunächst (um dem Schneiden der Diagonalen zu begegnen) mit denjenigen Punkten beginnt, auf welche mindestens $(m-2)$ nicht in der Complexion angedeutete folgen, und dann mit dem übrig bleibenden Theile der Figur dieses Verfahren fortsetzt. Zu noch bestimmterer Bezeichnung der Diagonalenstellung deutet man am zweckmässigsten ihre Reihenfolge durch die der Elemente an, so dass das erste, zweite, dritte u. s. f. zugleich die erste, zweite, dritte .... Diagonale bezeichnet, was freilich nicht selten eine Umstellung der Elemente einer gegebenen Combinationsform nöthig machen wird, wobei dann natürlich auch niedrigere Elemente auf höhere folgen dürfen.

Wählen wir zu völliger Verdeutlichung dieser Darstellungsweise irgend eine bestimmte Figur, etwa wie nachstehend ein Zwölfeck.



Um dasselbe auf alle mögliche Arten in Vierecke zu zerlegen, welches durch 4 Diagonalen geschieht, so wird man diese zunächst von dem Eckpunkte 1 nach den Punkten 4, 6, 8, 10 ziehen und durch die Combinationsform 1 . 1 . 1 . 1 darstellen können. Wollte man die Endpunkte dieser vier Linien ebenfalls bemerklich machen, so dürfte man nur jedem Elemente 1 die Zahl der Ecke anhängen, welche den Endpunkt bilden soll; folglich wäre näher bestimmt die Combinationsform $1 . 1 . 1 . 1 = 1_4 . 1_6 . 1_8 . 1_{10}$, und es lässt sich nach dem oben Gesagten aus der unmittelbaren Betrachtung der Figur leicht entnehmen, wie man jeder andern Complexion aus vier der gegebenen Elemente 1, 2, 3 . . . . 12 in gleicher Weise ihre bestimmte Deutung zu geben im Stande ist. So findet man z. B. leicht die Diagonalenstellungen für die Formen:

$$1)\ 1 . 1 . 1 . 1 = 1_4 . 1_6 . 1_8 . 1_{10}$$
$$2)\ 1 . 1 . 1 . 2 = 2_5 . 1_6 . 1_8 . 1_{10}$$
$$3)\ 1 . 1 . 1 . 3 = 3_6 . 1_6 . 1_8 . 1_{10},$$

indem die erste Diagonale zu den Punkten 2 und 3, und also in zwei andere Lagen übergeht, während die drei übrigen unverändert bleiben. Dagegen fordern die Formen:

$$4)\ 1 . 1 . 1 . 4 = 1_4 . 4_7 . 1_8 . 1_{10}$$
$$5)\ 1 . 1 . 1 . 5 = 1_4 . 5_8 . 1_8 . 1_{10}$$
$$6)\ 1 . 1 . 1 . 6 = 1_4 . 1_6 . 6_9 . 1_{10}$$
$$7)\ 1 . 1 . 1 . 7 = 1_4 . 1_6 . 7_{10} . 1_{10}$$

eine Vertauschung der zweiten oder dritten aus dem Punkte 1 gezogenen Diagonale gegen eine andere, die von einem der Punkte 4,5 oder 6,7 ausgeht. Beispielsweise mögen endlich noch die Complexionen

$$8)\ 1 . 4 . 7 . 10 = 1_4 . 4_7 . 7_{10} . 10_1$$
$$9)\ 1 . 2 . 3 . 4 = 1_{10} . 2_9 . 3_8 . 4_7$$

$$10)\ 2.4.6.8 = 2_{11}.4_{11}.6_{11}.8_{11}$$

mit der Figur verglichen werden, um die Bestimmtheit zu erkennen, welche in der hier gewählten arithmetischen Andeutung der verschiedenen Diagonalenstellungen liegt.

So unzweifelhaft aber auch die geometrische Deutung ist, die man nach dem Vorhergehenden einer jeden Complexion zu geben vermag, sind die verschiedenen Complexionen doch weit entfernt, eben so viele verschiedene Diagonalenstellungen auszudrücken. Schon das letzte der obigen Beispiele zeigt augenfällig, dass für ein in Vierecke zu zerlegendes Zwölfeck die Form $2.4.6.8 = 2_{11}.4_{11}.6_{11}.8_{11}$ gleichbedeutend mit der Complexion $11.11.11.11 = 11_2.11_4.11_6.11_8$ ist. Noch bestimmter wird man die Mannigfaltigkeit von Combinationsformen durchaus gleicher Bedeutung aus folgenden Beispielen abnehmen können:

$$1.\ \left\{\begin{aligned} 1.1.1.1 &= 1_4.1_6.1_8.1_{10} \\ 1.1.1.10 &= 1_4.1_6.1_8.10_1 \\ 1.1.8.10 &= 1_4.1_6.8_1.10_1 \\ 1.6.8.10 &= 1_4.6_1.8_1.10_1 \\ 4.6.8.10 &= 4_1.6_1.8_1.10_1 \end{aligned}\right.$$

$$2.\ \left\{\begin{aligned} 1.2.3.4 &= 1_{10}.2_9.3_8.4_7 \\ 1.2.3.7 &= 1_{10}.2_9.3_8.7_4 \\ 1.2.7.8 &= 1_{10}.2_9.8_3.7_4 \\ 1.7.8.9 &= 1_{10}.9_2.8_3.7_4 \\ 7.8.9.10 &= 10_1.9_2.8_3.7_4 \end{aligned}\right.$$

$$3.\ \left\{\begin{aligned} 1.3.5.5 &= 1_{10}.3_{10}.5_{10}.5_8 \\ 1.3.5.8 &= 1_{10}.3_{10}.5_{10}.8_5 \\ 1.3.8.10 &= 1_{10}.3_{10}.10_5.8_5 \\ 1.8.10.10 &= 1_{10}.10_3.10_5.8_5 \\ 8.10.10.10 &= 10_1.10_3.10_5.8_5 \end{aligned}\right.$$

$$4.\ \left\{\begin{aligned} 1.2.11.11 &= 2_5.1_6.11_6.11_8 \\ 1.2.8.11 &= 2_5.1_6.11_6.8_{11} \\ 1.2.6.8 &= 2_5.1_6.6_{11}.8_{11} \\ 2.6.6.8 &= 2_8.6_1.6_{11}.8_{11} \\ 5.6.6.8 &= 5_2.6_1.6_{11}.8_{11} \end{aligned}\right.$$

Bei näherer Betrachtung der vorstehenden vier Diagonalenstellungen nimmt man ohne Mühe wahr, dass die Umgestaltung ihrer Ausdrücke allmählig fortschreitet und zwar von der letzten Diagonale ausgeht. Denn zunächst darf man sich diese umgewendet (oder von ihrem Endpunkte aus gezogen) und demgemäss anders bezeichnet vorstellen, ohne dass dadurch die Bedeutung der Complexion im Mindesten geändert wird. Das Nämliche gilt dann aber auch von der vorletzten Diagonale u. s. f. bis zur ersten hin, so dass hier jede beliebige Complexion vier Umformungen gestat-

tet, die mit ihr durchaus dasselbe bezeichnen. — Sei nun die allgemeine Andeutung einer beliebigen Combinationsform

$$a\,.\,b\,....\,c\,.\,d = a_\alpha\,.\,b_\beta\,....\,c_\gamma\,.\,d_\delta,$$

worin α, β, γ, δ die respectiven Endpunkte der aus den Ecken a, b, c, d gezogenen Diagonalen andeuten, so bleibt die Bedeutung jener Complexion die nämliche in den Formen

$$a_\alpha\,.\,b_\beta\,...\,c_\gamma\,.\,\delta_d = a_\alpha\,.\,b_\beta\,...\,\gamma_c\,.\,\delta_d = a_\alpha\,.\,\beta_b\,...\,\gamma_c\,.\,\delta_d$$
$$= \alpha_a\,.\,\beta_b\,...\,\gamma_c\,.\,\delta_d;$$

denn es wird zunächst die letzte Diagonale eben so bestimmt durch δ als durch d bezeichnet, da bei unveränderter Andeutung der vorhergehenden über die Lage der äussersten Theilungslinie in beiden Fällen kein Zweifel bleiben kann; — und da das Nämliche aus gleichen Gründen von der vorletzten Diagonale behauptet werden darf, sofern man nur in den Andeutungen aller übrigen nichts ändert, so lässt sich die Umsetzung der Elemente allmählig bis zum ersten ausdehnen. Die gegebene Complexion $a\,.\,b\,....\,c\,.\,d$ wird also, wenn sie überhaupt q Elemente enthält, auch q Umformungen zulassen, ohne ihre Bedeutung zu ändern; oder mit andern Worten: es werden unter sämmtlichen Complexionen $(q+1)$ von dieser übereinstimmenden geometrischen Bedeutung enthalten sein.

Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche ein gegebenes $n$eck sich durch q Diagonalen in lauter $m$ecke zerlegen lässt, ist nunmehr ohne alle Schwierigkeit bestimmbar, da man weiss, dass die überhaupt mögliche Menge von Combinationsformen zu q aus n wiederholbaren Elementen durch

$$\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,......\,(n+q-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,...........\,q}$$

ausgedrückt wird, worin nach dem Vorhergehenden die arithmetische Darstellung jeder Diagonalenstellung $(q+1)$mal enthalten ist, so dass man, um die wirklich verschiedenen Diagonalenstellungen zu erhalten, noch mit $(q+1)$ dividiren muss. Bezeichnen wir daher die gesuchte Anzahl für ein $n$eck mit q Diagonalen durch $A^n{}_q$, so erhalten wir den allgemeinen Ausdruck

$$A^n{}_q = \frac{1}{q+1}\cdot\frac{n(n+1)\,(n+2)\,.....\,(n+q-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.......\,q};$$

und vermöge dieser independenten Formel lässt sich eine Tafel, wie die von Nic. Fuss gegebene (s. Pag. 198 a. a. O.) leicht bis zu beliebiger Weite aufstellen, indem man nur aus derjenigen der Figurirten Zahlen die entsprechenden Werthe zu nehmen und beziehungsweise durch die ganzen Zahlen $1, 2, 3\,.... = q+1$ zu dividiren braucht.

Auf den ersten Blick mag es auffallend erscheinen, in vorstehendem allgemeinen Ausdrucke unter den bestimmenden Grössen die Zahl m zu vermissen, welche in den a. a. O. mitgetheilten recurrirenden Formeln, so wie auch in der daraus durch Induction geschlossenen independenten auftritt. Man erkennt aber leicht, dass bei der Abhängigkeit, in welcher die Grössen n, m und q zu einander stehn, ausgedrückt durch die Gleichung

$$n=(q+1)\,m-2q,$$

nur eine der beiden Zahlen n, m überhaupt in die Formel einzugehen braucht; wie sich denn auch, wenn man diesen Werth von n und zugleich $i-1$ statt q in den obigen Ausdruck substituirt, die Umgestaltung desselben in die von dem Herrn Herausgeber (S. 199) hypothetisch aufgestellte allgemeine Form

$$A_i=\frac{(m-1)\,(im-i-1)\,(im-i-2)\,(im-i-3)\ldots\ldots(im-(2i-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(i-1)}$$

augenblicklich ergiebt.

Wieviel zweckmässiger es aber ist, bei der Behandlung des hier besprochenen Problems die Anzahl n statt m in die Betrachtung zu ziehen, giebt sich am augenfälligsten zu erkennen, wenn man die Aufgabe zu folgender noch allgemeineren erweitert:

Die Anzahl der verschiedenen Arten zu bestimmen, auf welche sich ein $n$eck durch q Diagonalen in $(q+1)$ Figuren zerlegen lässt, unter denen a Dreiecke, b Vierecke, c Fünfecke u. s. f. enthalten sein mögen. (Bedingungsgleichungen also: $q+1=a+b+c+\ldots$, wo a, b, $c\ldots$ irgend einen Werth der Zahlenreihe 0, 1, 2, 3 .... haben können; und $n=3a+4b+5c\ldots-2q$).

Man überzeugt sich nämlich leicht durch nähere Betrachtung irgend eines beliebigen Polygons, dass die oben für den Specialfall gleichartiger Theilfiguren geführte Untersuchung hier auf völlig gleiche Weise ihre Anwendung findet, nur dass durch jede beliebige Complexion mehr als eine Diagonalenstellung bezeichnet wird. Wäre z. B. ein Zwölfeck durch 4 Diagonalen in 2 Dreiecke, 2 Vierecke und 1 Sechseck zu zerlegen, so würde die Form 1 . 1 . 1 . 1 hier die ganz verschiedenen Diagonalenstellungen

$$1_3.1_4.1_6.1_8;\ 1_3.1_4.1_6.1_{10};\ 1_3.1_4.1_8.1_{10};\ 1_3.1_5.1_6.1_8;\ \text{u. s. w.}$$

andeuten, deren Menge sich dadurch, dass man hier fünf auf einander folgende Figuren, unter denen zwei Paare gleichartiger sind, auf alle mögliche Weise unter einander versetzt denkt, sogleich als die Permutationszahl $\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2}=30$ zu erkennen giebt. Sind der Theilfiguren allgemein $q+1$, und darunter a der einen, b der zweiten, c der dritten Art u. s. f., so erhält man aus den nämlichen Gründen statt der einen Diagonalenstellung, welche irgend eine beliebige Complexion bei der Zerlegung in lauter gleichartige Figuren repräsentirte, ihrer vielmehr eine Anzahl $=\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots q\,.\,(q+1)}{(1\,.\,2\,..\,a)\,(1\,.\,2\,..\,b)\,(1\,.\,2\,..\,c)}$. Durch diese Zahl wird demnach der obige Ausdruck von $A^n{}_q$ noch zu multipliciren sein, sofern er auf die hier verallgemeinerte Aufgabe Anwendung finden soll, so dass die verlangte Anzahl aller möglichen Zerlegungen eines $n$ecks durch q Diagonalen in a Dreiecke, b Vierecke, u. s. w. dargestellt wird durch die allgemeine Formel:

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots q\,.\,(q+1)}{(1\,.\,2\,..\,a)\,(1\,.\,2\,..\,b)\,(1\,.\,2\,..\,c)}\cdot\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots\ldots(n+q-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots q\,.\,(q+1)}$$

$$=\frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots\ldots(n+q-1)}{(1\,.\,2\,.\,3\,..\,a)\,(1\,.\,2\,.\,3\,..\,b)\,(1\,.\,2\,.\,3\,..\,c)},$$

ein Ausdruck, der sofort wieder in den obigen Werth von A^n_q übergeht, sobald man zu der speciellen Annahme durchaus gleichartiger Figuren schreitet, in welchem Falle die Zahlen $a, b, c \ldots$ sich offenbar auf eine einzige, und zwar auf $(q+1)$ reduciren.

XII.

Von der numerischen Auflösung der Gleichung $A=(1+x)^m\ (1+bx)$, wenn x ein kleiner Bruch ist.

Von dem

Herrn Doctor Rädell

zu Berlin.

Bezeichnet x die jährliche Zinse eines Thalers, so wird aus dem verzinsten Kapitale K am Ende des ersten Jahres $K(1+x)$, am Ende des zweiten Jahres $K(1+x)^2$, am Ende des dritten Jahres $K(1+x)^3$ u. s. w., im Allgemeinen am Ende des $m$ten Jahres $K(1+x)^m$, wenn man nämlich voraussetzt, dass die Zinsen eines jeden Jahres am Ende desselben zum Kapitale geschlagen und in den folgenden Jahren mit dem Kapitale verzinst werden.

Nennt man also den auf diese Weise in m Jahren aus dem Kapitale K hervorgegangenen Werth desselben $\overset{x}{K}_m$, so erhält man die Gleichung

$$(1)\qquad \overset{x}{K}_m = K(1+x)^m,$$

so dass $\overset{x}{K}_m$ mit m und x zugleich wächst.

Die eben geschriebene Gleichung gilt aber nur so lange, als m eine ganze Zahl ist. In der That, wird $m'=m+\frac{p}{q}$ statt m gesetzt, wo $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch ist, so erhält man für den durch Zins und Zinseszins angewachsenen Werth des Kapitals am Ende der ersten m Jahre wiederum $K(1+x)^m$. Soll dieses Kapital nun noch $\frac{p}{q}$ Jahre verzinst werden, so betragen die Zinsen während

dieser Zeit $K(1+x)^m \cdot \frac{p}{q} x$, also Kapital und Zinsen für diesen Fall

$$(2) \qquad \overset{x}{K}_{m'} = K(1+x)^m \left\{1 + \frac{p}{q} x\right\}$$

während man nach der Gleichung (1) hierfür

$$K'_{m'} = K(1+x)^{m+\frac{p}{q}}$$

erhalten hätte.

Um den letztern Ausdruck mit dem richtigen zu vergleichen, hat man dafür $K(1+x)^m \cdot (1+x)^{\frac{p}{q}}$ zu setzen und den letztern Faktor nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln. Hierdurch ergiebt sich

$$K'_{m'} = \overset{x}{K}_m \left\{1 + \frac{p}{q} x + \frac{p(p-q)}{2q^2} x^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{6q^3} x^3 + \ldots\right\}$$

oder, da $\overset{x}{K}_m (1 + \frac{p}{q} x) = \overset{x}{K}_{m'}$ ist,

$$\frac{\overset{x}{K}_{m'} - K'_{m'}}{\overset{x}{K}_m} = \frac{p(q-p)}{2q^2} x^2 - \frac{p(q-p)(2q-p)}{6q^3} x^3 + \ldots\ldots$$

Da nun x seiner Bedeutung nach ein kleiner Bruch ist, so wird, bei der Beschaffenheit der Coefficienten der einzelnen Glieder, das Vorzeichen der ganzen Reihe mit dem des ersten Gliedes übereinstimmen, und folglich, wegen $q > p$, positiv sein; so dass die Gleichung (1), auf den Fall angewandt, wo m eine gebrochene Zahl ist, einen Werth liefern würde, der zwar zu klein wäre, aber verhältnissmässig doch wenig von der Wahrheit abweichen würde, weil diese Abweichung kleiner ist als $\frac{1}{2}x^2$.

Wird nun die Aufgabe gestellt, dass man aus dem gegebenen Werthe eines Kapitals K, aus dem künftigen Werthe desselben $\overset{x}{K}_{m'}$ und aus der Dauer der Verzinsung $m' = m + \frac{p}{q}$ die jährlichen Zinsen eines Thalers finden soll, so hat man die Gleichung (2), oder wenn man durch K dividirt und $\frac{\overset{x}{K}_{m'}}{K} = A$ und $\frac{p}{q} = b$ setzt, die Gleichung

$$(3) \qquad A = (1+x)^m (1+bx)$$

nach x aufzulösen.

Im vorliegenden besondern Falle ist $b < 1$. Bevor aber zur Auflösung dieser Gleichung geschritten wird, soll noch folgende Aufgabe gleichfalls aus der Zinseszinsrechnung mitgetheilt werden, die auch von obiger Gleichung resultirt, in welcher aber b jeden beliebigen Werth erhalten kann:

Es wird sofort das Kapital d und dann am Ende jedes Jahres die Rente c während m Jahren zum Zinsfusse $1+x$ verzinslich angelegt und aufgespart, und von der hieraus erwachsenden Summe nun zu dem nämlichen Zinsfusse die immerwährende Rente a be-

zogen, wie gross ist der Zinsfuss? Der Werth des sofort angelegten Kapitals d ist nach m Jahren $d(1+x)^m$ und die Werthe der successive hinzukommenden Renten c betragen am Ende jener m Jahre respective $c(1+x)^{m-1}$, $c(1+x)^{m-2}$, $c(1+x)^{m-3}$ u. s. w., jenachdem die Rente am Ende des 1sten, 2ten, 3ten Jahres u. s. w. hinzugekommen ist. Demnach beträgt der künftige Werth sämmtlicher Ersparnisse mit Zinsen und Zinseszinsen:

$$d(1+x)^m + c\{(1+x)^{m-1} + (1+x)^{m-2} + (1+x)^{m-3} + \ldots + 1\}$$
$$= d(1+x)^m + c \, . \, \frac{(1+x)^m - 1}{x}$$

Da man nun aus dem Kapitale die jährlichen Zinsen erhält, wenn man dasselbe mit x multiplicirt, und diese Zinsen gleich a sein sollen, so ergiebt sich die Gleichung

$$dx(1+x)^m + c\{(1+x)^m - 1\} = a$$

d. h.

$$(1+x)^m \; (c+dx) = a + c$$

oder wenn man durch c dividirt und wiederum $\frac{a+c}{c} = A$ und $\frac{d}{c} = b$ setzt,

$$(1+x)^m \; (1+bx) = A$$

wie vorher.

Was nun die Auflösung dieser Gleichung nach x betrifft, so sieht man sogleich, dass diese letztere vom $(m+1)$sten Grade ist, und also im Allgemeinen auf algebraischem Wege nicht aufgelöst werden kann. Man hat sich also damit zu begnügen, für den Fall, dass A und b in bestimmten Zahlen gegeben sind, 1stens einen ersten Näherungswerth und 2tens aus demselben einen solchen Werth für x zu finden, der für jeden praktischen Bedarf als hinreichend genau gelten kann, wobei jedoch nicht zu vergessen ist, dass x selbst nur wenige Hundertel beträgt, also die Annäherung noch viel weiter gehen muss.

Ist nun $b < 1$, oder allgemein: ist m gegen b so gross, dass $m+b$ als verhältnissmässig wenig verschieden von b angesehen werden kann, so folgt aus der vorhergehenden Auseinandersetzung, dass man nahe genug $(1+x)^m \; (1+bx) = (1+x)^{m+b}$ setzen kann, so dass man aus der Gleichung

$$(1+x_1)^{m+b} = A$$

$$(4) \qquad x_1 = -1 + \sqrt[m+b]{A}$$

als einen ersten Näherungswerth für x erhält, der um so genauer ist, jemehr m das b an Grösse übertrifft.

Findet das oben angegebene Verhältniss zwischen m und b nicht statt, so dass also m keine grosse Zahl ist, so setze man näherungsweise

$$(1+x)^m = \frac{1+\alpha x}{1+\beta x}$$

und bestimme α und β dergestalt, dass dieser Gleichung so viel als

möglich Genüge geleistet werde. Entwickelt man beide Ausdrücke nach steigenden Potenzen von x, so erhält man

$$1+mx+\frac{m^2-m}{2}x^2+\ldots=1+(\alpha-\beta)\,x-\beta\,(\alpha-\beta)\,x^2+\ldots.$$

Man wird also den angenommenen Quotienten der Potenz $(1+x)^m$ am meisten annähern, wenn man

$$\alpha-\beta=m \text{ und } -\beta(\alpha-\beta)=\frac{m^2-m}{2}$$

setzt, weil sich dadurch beide Ausdrücke nur in der dritten und den höhern Potenzen der sehr kleinen Quantität x von einander unterscheiden.

Dividirt man aber die zweite der so eben gefundenen beiden Bedingungsgleichungen durch die erste, so erhält man $\beta=-\frac{m-1}{2}$, also $\alpha=m+\beta=\frac{m+1}{2}$ und

$$(5)\qquad (1+x)^m=\frac{2+(m+1)x}{2-(m-1)x}.$$

Sucht man daher aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{2+(m+1)x_1}{2-(m-1)x_1}\,(1+bx_1)=A$$

den positiven Werth von x_1, so wird derselbe gleichfalls als ein Näherungswerth von x angesehen werden können.

Um aus dem auf die eine oder die andere Art, je nach dem verschiedenen zwischen m und b stattfindenden Verhältnisse, gefundenen Näherungswerthe x_1 sogleich einen recht genauen Werth für x zu finden, setze man $x=x_1+\Delta x_1$, wo Δx_1 positiv oder negativ aber nur noch eine sehr kleine Correktion von x_1 ist. Substituirt man dies in die Gleichung (3), so bleibt noch die Gleichung

$$A=(1+x_1+\Delta x_1)^m\ \{1+b(x_1+\Delta x_1)\}$$

nach Δx_1 aufzulösen. Werden auf beiden Seiten die Logarithmen genommen, so erhält man

$$\log A=m\log(1+x_1+\Delta x_1)+\log\{1+b(x_1+\Delta x_1)\}$$
$$=m\log(1+x_1)+\log(1+bx_1)+m\log\left(1+\frac{\Delta x_1}{1+x_1}\right)$$
$$+\log\left(1+\frac{b\Delta x_1}{1+bx_1}\right)$$

oder, wenn man

$$(6)\qquad m\log(1+x_1)+\log(1+bx_1)=\log A_1$$

setzt,

$$\log A-\log A_1=m\log\left(1+\frac{\Delta x_1}{1+x_1}\right)+\log\left(1+\frac{b\Delta x_1}{1+bx_1}\right).$$

Hierfür kann man aber, wie aus der Analysis oder auch schon aus dem blossen Aufschlagen der Logarithmen mehrziffriger Zahlen in den Tabellen bekannt ist,

$$\log A-\log A_1=(md+bd')\,\Delta x_1$$

setzen, wo d und d' die sogenannten herrschenden Differenzen respektive von $\log(1+x_1)$ und $\log(1+bx_1)$ sind, so dass man also

$$\Delta x_1 = \frac{\log A - \log A_1}{md + bd'},$$

und folglich

$$(7) \qquad x = x_1 + \frac{\log A - \log A_1}{md + bd'}$$

erhält, wo sich der Werth von x_1 entweder aus der Gleichung (4) oder aus (5) und der von $\log A_1$ aus der Gleichung (6) ergiebt.

Was die Näherung betrifft, die man vermittelst dieser Methode erreicht, so sieht man, dass sie bis auf doppelt so viele Decimalstellen gehen wird, als x_1 genau ist, weil die Differenzen d und d' selbst so weit genau sind.

Um das Ganze durch ein Beispiel zu erläutern, setze man

$$\overset{x}{K}_{m'} = 203.3889, \quad K = 150, \quad m = 6 \text{ und } b = \frac{5}{9}.$$

Alsdann findet man x_1 aus der Gleichung (4):

$$\begin{array}{rl}
\log \overset{x}{K}_{m'} & = 2.3083272 \\
-\log K & = 2.1760913 \\
\hline
\log A & = 0.1322359 \\
& \times \frac{9}{59} \\
\hline
\log(1+x_1) & = 0.0201716 \quad \ldots d = 0.415 \\
\hline
x_1 & = 0.0475424
\end{array}$$

Ferner:

$$\begin{array}{rl}
m \log(1+x_1) & = 0.1210296 \\
+ \quad \log(1+bx_1) & = \left.\begin{array}{r} 0.0113166 \\ 53 \end{array}\right\} \ldots d' = 0.424 \\
\hline
\log A_1 & = 0.1323515 \\
\hline
\log A - \log A_1 & = -0.0001156 \\
md + bd' & = 2.726 \\
\hline
\Delta x_1 & = -0.0000424
\end{array}$$

folglich $x = 0.0475$, welches in diesem Falle der genaue Werth ist.

XIII.

Ueber die Loxodromen auf dem gemeinen Cylinder und Kegel.

Von dem

Herrn Dr. E. W. Grebe

ordentlichem Hauptlehrer am Gymnasium zu Cassel.

Mit dem Namen Loxodrome belegen wir eine Curve auf einer durch Umdrehung erzeugten Fläche, welche mit allen Linien, in denen die Fläche von einer durch ihre Axe gelegten Ebene durchschnitten wird, einen constanten Winkel bildet. Die Loxodrome auf der Rotationsfläche, deren Erzeugende eine Gerade ist, bietet sehr interessante Eigenschaften dar, wesshalb wir die wichtigsten hier, doch nur in der Form von Resultaten, mittheilen wollen. Die Formeln, welche speciell der Cylinderloxodrome angehören, und die, welche lediglich auf die Kegelloxodrome bezogen werden sollen, werden wir dadurch kenntlich machen, dass wir den Nummern der ersteren den Buchstaben a, und denen der letzteren den Buchstaben b beifügen.

Die Umdrehung der geraden Linie

$$1.\quad v = r - \cot\varepsilon . x$$

um die Axe der x erzeugt die Rotationsfläche

$$2.\quad y^2 + z^2 = (r - \cot\varepsilon . x)^2$$

ε denken wir uns stets grösser als 0, aber nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ haben wir eine cylindrische, sonst eine conische Fläche. r ist der Halbmesser der Grundebene. Das Coordinatensystem ist rechtwinklig. Eine Loxodrome, welche mit der erzeugenden Geraden stets den Winkel φ bildet, hat ausser 2. noch die Gleichung

$$3.\quad \text{arc tang}\,\frac{y}{z} = \text{tang}\,\varphi\,\sec\varepsilon\,\log\frac{r}{r - \cot\varepsilon . x},$$

die für sich betrachtet einer windschiefen Fläche zwischen der Loxodrome und ihrer Axe zukommt, welche wir Wendelfläche nennen wollen.

Aus 3. ergibt sich

$$3.^a\quad \text{arc tang}\,\frac{y}{z} = \text{tang}\,\varphi . \frac{x}{r}.$$

Auch lassen sich die Gleichungen unserer Curve folgendermassen darstellen:

$$4.\ \begin{cases} y = v \sin (\tang \varphi \sec \varepsilon \log \ldots \\ z = v \cos (\tang \varphi \sec \varepsilon \log \ldots \end{cases}$$

$$4.^a\ \begin{cases} y = r \sin (\tang \varphi \ldots \\ z = r \cos (\tang \varphi \ldots \end{cases}$$

Den Winkel φ denken wir uns stets zwi... $\frac{1}{2}\pi$. Einen Unterschied zwischen recht... Loxodrome zu machen, ist nicht erforder... Richtungen der Axen der y und z immer ... wählen können. Von Differenzialformeln ...

$$5.\ \frac{dy}{dx} = \frac{-\cot \varepsilon . y + \tang \varphi \ldots}{v}$$

$$6.\ \frac{dz}{dx} = \frac{-\tang \varphi \operatorname{cosec} \varepsilon . y \ldots}{v}$$

$$7.\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\tang \varphi \operatorname{cosec} \varepsilon \ldots}{v} \ldots$$

$$8.\ \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\tang \varphi \ldots}{v}$$

$$9.\ \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} = \sec \varphi^2$$

$$10.\ \frac{d^2y^2}{dx^4} + \frac{d^2z^2}{dx^4} = \frac{\tang \varphi^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2}{v^2}$$

$$11.\ \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\tang \varphi \cos \ldots}{v}$$

Bezeichnet s den zu der Abscisse x g... drome, so ist

$$12.\ s = \sec \varphi \cos \ldots$$

$$12.^a\ s = \sec \varphi . x$$

und wenn wir auf dem Kegel die Länge der Loxodro... Grundebene bis zur Spitze ξ nennen

$$12.^b\ \xi = r \sec \varphi \sec \varepsilon$$

Der Bogen der Loxodrome ist also stets seiner Pr... die Abscissenaxe proportional, welche Eigenschaft kei... ebenen Curve zukommt.

Für den Krümmungshalbmesser R haben wir

$$13.\ R = \frac{v}{\sin \varphi \sqrt{(1 - \cos \varphi^2 \sin \varepsilon^2)}}$$

$$13.^a\ R = r \operatorname{cosec} \varphi^2$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$4.\quad \begin{cases} y = v \sin\left(\tan\varphi \sec\varepsilon \log \dfrac{r}{r - \cot\varepsilon . x}\right) \\ z = v \cos\left(\tan\varphi \sec\varepsilon \log \dfrac{r}{r - \cot\varepsilon . x}\right) \end{cases}$$

$$4.^{a.}\quad \begin{cases} y = r \sin\left(\tan\varphi . \dfrac{x}{r}\right) \\ z = r \cos\left(\tan\varphi . \dfrac{x}{r}\right) \end{cases}$$

Den Winkel φ denken wir uns stets zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Einen Unterschied zwischen rechts und links gewundener Loxodrome zu machen, ist nicht erforderlich, da wir die positiven Richtungen der Axen der y und z immer der Windung angemessen wählen können. Von Differenzialformeln bemerken wir folgende:

$$5.\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\cot\varepsilon . y + \tan\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon . z}{v}$$

$$6.\quad \frac{dz}{dx} = \frac{-\tan\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon . y - \cot\varepsilon . z}{v}$$

$$7.\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\tan\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon}{v} . \frac{dz}{dx}$$

$$8.\quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\tan\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon}{v} . \frac{dy}{dx}$$

$$9.\quad \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} = \sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1$$

$$10.\quad \frac{d^2y^2}{dx^4} + \frac{d^2z^2}{dx^4} = \frac{\tan\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2}{v^2} (\sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1)$$

$$11.\quad \frac{d^2y}{dx^2} . \frac{dz}{dx} - \frac{d^2z}{dx^2} . \frac{dy}{dx} = \frac{\tan\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon}{v} (\sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1)$$

Bezeichnet s den zu der Abscisse x gehörigen Bogen der Loxodrome, so ist

$$12.\quad s = \sec\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon . x$$

$$12.^{a.}\quad s = \sec\varphi . x$$

und wenn wir auf dem Kegel die Länge der Loxodrome von der Grundebene bis zur Spitze ξ nennen

$$12.^{b.}\quad \xi = r \sec\varphi \sec\varepsilon$$

Der Bogen der Loxodrome ist also stets seiner Projection auf die Abscissenaxe proportional, welche Eigenschaft keiner einzigen ebenen Curve zukommt.

Für den Krümmungshalbmesser R haben wir

$$13.\quad R = \frac{v}{\sin\varphi \sqrt{(1 - \cos\varphi^2 \sin\varepsilon^2)}}$$

$$13.^{a.}\quad R = r \operatorname{cosec}\varphi^2$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$14.\quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y + \dfrac{v \cot\varphi \sin\varepsilon}{1 - \cos\varphi^2 \sin\varepsilon^2} \cdot \dfrac{dz}{dx} \\ z' = z - \dfrac{v \cot\varphi \sin\varepsilon}{1 - \cos\varphi^2 \sin\varepsilon^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} \end{cases}$$

und es folgt somit, dass der Krümmungshalbmesser in einer auf der Axe senkrechten Ebene liegt, was, wenn auch nicht bei der Cylinder-, doch bei der Kegelloxodrome auffallen kann.

Für die Entfernung v' des Krümmungsmittelpunktes von der Axe findet sich

$$15.\quad v' = v\sqrt{\frac{\cos\varepsilon^2 + \cot\varphi^2}{\cos\varepsilon^2 + \operatorname{tang}\varphi^2}}.$$

Demnach liegen alle Krümmungsmittelpunkte in einer neuen Loxodrome, und wenn für diese φ' und ε' das bedeutet, was φ und ε für die ursprüngliche, so ergeben sich die Beziehungen

$$16.\quad v' \operatorname{tang}\varepsilon' = v \operatorname{tang}\varepsilon$$

$$17.\quad \operatorname{tang}\varphi' : \operatorname{tang}\varphi = \cos\varepsilon' : \cos\varepsilon.$$

Insbesondere liegen die Krümmungsmittelpunkte einer Cylinderloxodrome in einer andern Cylinderloxodrome, deren Krümmungsmittelpunkte wieder in der ersten liegen, und es ist

$$17.^{a}\quad \varphi + \varphi' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Bedeutet Q den Krümmungshalbmesser einer Loxodrome auf derselben Cylinder- oder Kegelfläche, deren Ansteigungswinkel den der ursprünglichen zu einem rechten ergänzt, so erhält man

$$18.\quad Q = \frac{v}{\cos\varphi \sqrt{(1 - \sin\varphi^2 \sin\varepsilon^2)}}.$$

Die Entfernung w' der Krümmungsmittelpunkte der letzteren von der Axe ist dann

$$19.\quad w' = v\sqrt{\frac{\cos\varepsilon^2 + \operatorname{tang}\varphi^2}{\cos\varepsilon^2 + \cot\varphi^2}}$$

und es folgt

$$20.\quad v'w' = v^2$$

$$21.\quad v' : w' = R^2 : Q^2.$$

Seien x', y', z' die veränderlichen Coordinaten einer Linie oder Fläche, deren Gleichung angegeben werden soll, so erhält man als Gleichung der Krümmungsebene

$$22.\quad (x' - x)(\sec\varphi^2 \operatorname{cosec}\varepsilon^2 - 1) - (y' - y)\frac{dy}{dx} - (z' - z)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$23.\quad (x' - x) + (y' - y)\frac{dy}{dx} + (z' - z)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Für die Krümmungsaxe gilt

$$24. \begin{cases} y' - y = \dfrac{-\cot \varepsilon . y - \cot \varphi \operatorname{cosec} \varepsilon . z}{r} (x' - x) \\ z' - z = \dfrac{\cot \varphi \operatorname{cosec} \varepsilon . y - \cot \varepsilon . z}{r} (x' - x); \end{cases}$$

für die Tangente

$$25. \begin{cases} y' - y = (x' - x) \dfrac{dy}{dx} \\ z' - z = (x' - x) \dfrac{dz}{dx}; \end{cases}$$

für den Krümmungshalbmesser

$$26. \begin{cases} x' = x \\ y' \dfrac{dy}{dx} + z' \dfrac{dz}{dx} + \cot \varepsilon . r = 0. \end{cases}$$

Neigt sich die Krümmungsaxe gegen eine auf der Umdrehungsaxe senkrechte Ebene unter dem Winkel m, die Tangente unter dem Winkel n, so ist

$$27. \quad \sin m = \sqrt{(1 - \cos \varphi^2 \sin \varepsilon^2)}$$

$$28. \quad \sin n = \cos \varphi \sin \varepsilon$$

Der Neigungswinkel der Krümmungsebene gegen jene Ebene ist alsdann $\frac{1}{2}\pi - m$, und der Neigungswinkel der Normalebene $\frac{1}{2}\pi - n$.

Legt man durch die Kegelspitze eine auf der Axe senkrechte Ebene, so ist der Bogen der Loxodrome von irgend einem Punkte bis zur Kegelspitze gleich der Tangente an diesem Punkt von dem Berührungspunkt an bis zu jener Ebene. Der Endpunkt der Tangente hat die Coordinaten

$$29.^{b.} \begin{cases} x' = r \tan \varepsilon \\ y' = \tan \varphi \sec \varepsilon . z \\ z' = - \tan \varphi \sec \varepsilon . y \end{cases}$$

und sein Abstand t von der Kegelspitze ist

$$30.^{b.} \quad t = \tan \varphi \sec \varepsilon . v.$$

Verlängert man die Krümmungsaxen bis sie dieselbe Ebene treffen, so sind die Coordinaten eines Durchschnittspunktes

$$31.^{b.} \begin{cases} x' = r \tan \varepsilon \\ y' = - \cot \varphi \sec \varepsilon . z \\ z' = \cot \varphi \sec \varepsilon . y \end{cases}$$

und für die Entfernung w eines solchen von der Kegelspitze hat man

$$32.^{b.} \quad w = \cot \varphi \sec \varepsilon . v$$

wo dann

$$33.^{b.} \quad tw = \sec \varepsilon^2 . v^2.$$

Die Kegelloxodrome steht in vielfachen Beziehungen zur logarithmischen Spirale. Wir führen die wichtigsten derselben auf, und geben bei jeder logarithmischen Spirale deren Elemente an, mitun-

lich den Leitstrahl l der Spirale, der durch einen gewissen Punkt der Loxodrome bedingt ist, und den constanten Winkel ψ, welchen die Spirale mit den Leitstrahlen bildet.

1. Wenn der Kegelmantel in eine Ebene ausgebreitet wird, so erscheint die Loxodrome als logarithmische Spirale, für welche

$$34.^{b.} \begin{cases} l = \sec \varepsilon . v \\ \psi = \varphi \end{cases}$$

2. Die Projection der Kegelloxodrome auf die Grundebene des Kegels ist eine logarithmische Spirale, bei der

$$35.^{b.} \begin{cases} l = v \\ \tang \psi = \tang \varphi \sec \varepsilon \end{cases}$$

3. Der Durchschnitt der Tangenten mit einer durch die Kegelspitze gelegten Horizontalebene, oder der Ort der Punkte, deren Coordinaten in 29.$^{b.}$ bestimmt wurden, ist ebenfalls eine logarithmische Spirale. Für diese ist

$$36.^{b.} \begin{cases} l = \tang \varphi \sec \varepsilon . v \\ \tang \psi = \tang \varphi \sec \varepsilon \end{cases}$$

4. Breitet man die abwickelbare Fläche, in welcher sämmtliche Tangenten liegen, oberhalb oder unterhalb der Knotenfurche, in eine Ebene aus, so wird aus der Knotenfurche eine logarithmische Spirale mit

$$37.^{b.} \begin{cases} l = \dfrac{v}{\sqrt{(\cos \varepsilon^2 + \sin \varepsilon^2 \sin \varphi^4)}} \\ \tang \psi = \tang \varphi \sec \varepsilon \sqrt{(1 - \sec \varepsilon^2 \cos \varphi^2)}. \end{cases}$$

5. Wählt man hierbei das Stück oberhalb der Knotenfurche, so wird aus der unter Nr. 3. aufgeführten logarithmischen Spirale eine andere, welcher die unter Nr. 4. genannten Elemente gleichfalls zukommen.

Die Nummern 2. 3. 4. 5. wiederholen sich für die Kegelloxodrome, in welcher die Krümmungsmittelpunkte der ursprünglichen liegen, und die Elemente der so entstehenden logarithmischen Spiralen lassen sich nach den Formeln 15. 16. 17 bestimmen.

Ferner kehren auch die Nummer 2. 3. 4. 5. noch einmal für die Kegelloxodrome wieder, deren Tangenten die Krümmungsaxen der ursprünglichen sind. Allgemein nämlich ist die Knotenfurche der abwickelbaren Fläche, in welcher sämmtliche Krümmungsaxen der Loxodrome liegen, wieder eine Loxodrome, für welche

$$38. \quad \tang \varepsilon'' = \tang \varepsilon (\sec \varphi^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2 - 1)$$

$$39. \quad \tang \varphi'' : \tang \varphi = \cos \varepsilon'' : \cos \varepsilon$$

Die Coordinaten des Punktes, welcher einem Punkte der ursprünglichen entspricht, sind

$$40. \begin{cases} x' = x - \operatorname{cosec} \varphi^2 \cot \varepsilon . v \\ y' = - y \cot \varphi^2 \\ z' = - z \cot \varphi^2 \end{cases}$$

Bei dem Cylinder fällt diese Loxodrome mit der, in welcher die

Krümmungsmittelpunkte liegen, zusammen, für den Kegel aber ist sie von derselben verschieden.

Zum Beschluss geben wir noch die Quadratur der Wendelfläche W. Es ist

$$(11\,a.)\qquad W = (\sin\varphi + \cot\varphi \log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi))\,\frac{rx}{2};$$

allgemein aber, wenn man setzt

$$\operatorname{tang}\chi = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{cosec}\varepsilon:$$

$$(11.)\qquad W = (\sin\chi + \cot\chi \log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi))\,(\tfrac{1}{2}rx - \tfrac{1}{4}\cot\varepsilon . x^2);$$

und mithin für $x = r \operatorname{tang}\varepsilon$

$$(11\,b.)\qquad W = (\sin\chi + \cot\chi \log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi))\,\frac{r^2 \operatorname{tang}\varepsilon}{2}.$$

XIV.

Trigonometrische Relationen zwischen den Seiten und Winkeln zweier beliebiger ebener oder sphärischer Dreiecke.

Von dem

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

Fast alle Lehr- und Handbücher der Trigonometrie enthalten mehr oder minder ausführlich die Relationen zwischen den sechs *Bestandtheilen* e i n e s *Dreiecks*; aber kein einziges derselben hat, *so viel mir bekannt ist*, die entsprechenden Formeln für die Seiten und *Winkel* z w e i e r *Dreiecke* untersucht, obschon die Kenntniss derselben bei der Betrachtung der zusammengesetzteren Gebilde der Planimetrie und Stereometrie von sehr wesentlichem Nutzen ist, und eine grosse Masse Arbeit erspart. Diese Lücke theilweise auszufüllen und überhaupt diejenigen allgemeinen Theoreme zusammenzustellen, die bei trigonometrischen Untersuchungen Vortheile gewähren, ist der Zweck der nachfolgenden Zeilen.

§. 1.

Bezeichnen abc die drei Seiten und ABC die ihnen beziehungsweise gegenüberliegenden Winkel eines geradlinigen Dreieckes, Δ den Flächeninhalt desselben, und sind $a_1 b_1 c_1$ $A_1 B_1 C_1$ und Δ_1 die nämlichen Dinge für irgend ein ganz beliebiges zweites ebenes Dreieck, so ist bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{ll} c\cos B = a - b\cos C, & c_1 \cos B_1 = a_1 - b_1 \cos C_1 \\ b\cos C = a - c\cos B, & b_1 \cos C_1 = a_1 - c_1 \cos B_1 \end{array}\right\} 1.$$

u. s. w. Durch Multiplication zweier neben einander stehender Gleichungen, z. B. der beiden obersten, ergiebt sich:

$$cc_1 \cos B \cos B_1 = aa_1 - a_1 b \cos C - ab_1 \cos C_1 + bb_1 \cos C \cos C_1$$

oder

$$2aa_1cc_1 \cos B \cos B_1 = 2a^2a_1{}^2 - 2a_1{}^2ab \cos C - 2a^2a_1b_1 \cos C_1$$
$$+ 2aa_1bb_1 \cos C \cos C_1.$$

Nun ist aber $2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$ und $2a_1b_1 \cos C_1 = a_1{}^2 + b_1{}^2 - c_1{}^2$; werden daher diese Werthe substituirt und dann aufgehoben, was sich aufheben lässt, so ergiebt sich:

$$c^2a_1{}^2 + c_1{}^2a^2 - 2aa_1cc_1 \cos B \cos B_1 = a^2b_1{}^2 + a_1{}^2b^2$$
$$- 2aa_1bb_1 \cos C \cos C_1.$$

Es ist aber ferner;

$$2\Delta = ac \sin B = ab \sin C$$
$$2\Delta_1 = a_1c_1 \sin B_1 = a_1b_1 \sin C_1$$

folglich auch:

$$\pm 2aa_1cc_1 \sin B \sin B_1 = 2aba_1b_1 \sin C \sin C_1$$

und dieses zu der oben gefundenen Gleichung hinzugefügt, giebt endlich:

$$a^2c_1{}^2 + a_1{}^2c^2 - 2aa_1cc_1 \cos(B \pm B_1)$$
$$= a^2b_1{}^2 + a_1{}^2b^2 - 2aa_1bb_1 \cos(C \pm C_1).$$

Dieser Ausdruck ist dadurch bemerkenswerth, dass er die Form der Grundgleichung für ein geradliniges Dreieck hat, nur mit dem Unterschiede, dass statt der in der letzteren vorkommenden Dreiecksseiten hier die Produkte aus zwei Seiten von beiden Dreiecken eintreten. Das Gesetz, nach dem sich die Gleichung bildet, ist leicht zu übersehen, lässt sich jedoch nur unbequem in Worte fassen. Macht man nun das System durch gehörige Vertauschung der Buchstaben vollständig, so bekommt man:

$$
\left.\begin{aligned}
a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - 2aa_1bb_1 \cos(C \pm C_1) &= a^2c_1^2 + b_1^2c^2 - 2ab_1cc_1 \cos(B \pm A_1) \\
&= b^2c_1^2 + a_1^2c^2 - 2a_1bcc_1 \cos(A \pm B_1) \\
a^2a_1^2 + c^2c_1^2 - 2aa_1cc_1 \cos(B \pm B_1) &= a^2b_1^2 + c_1^2b^2 - 2abb_1c_1 \cos(C \pm A_1) \\
&= b^2a_1^2 + b_1^2c^2 - 2a_1bb_1c \cos(A \pm C_1) \\
b^2b_1^2 + c^2c_1^2 - 2bb_1cc_1 \cos(A \pm A_1) &= b^2a_1^2 + c_1^2a^2 - 2aa_1bc_1 \cos(C \pm B_1) \\
&= a^2b_1^2 + a_1^2c^2 - 2aa_1b_1c \cos(B \pm C_1) \\
a^2b_1^2 + a_1^2b^2 - 2aa_1bb_1 \cos(C \pm C_1) &= a^2c_1^2 + a_1^2c^2 - 2aa_1cc_1 \cos(B \pm B_1) \\
&= b^2c_1^2 + b_1^2c^2 - 2bb_1cc_1 \cos(A \pm A_1) \\
a^2a_1^2 + b^2c_1^2 - 2aa_1bc_1 \cos(C \pm B_1) &= b^2b_1^2 + a_1^2c^2 - 2a_1bb_1c \cos(A \pm C_1) \\
&= c^2c_1^2 + a^2b_1^2 - 2ab_1cc_1 \cos(B \pm A_1) \\
a^2a_1^2 + b_1^2c^2 - 2aa_1b_1c \cos(B \pm C_1) &= b^2b_1^2 + a^2c_1^2 - 2abb_1c_1 \cos(C \pm A_1) \\
&= c^2c_1^2 + a_1^2b^2 - 2a_1bb_1c \cos(A \pm B_1)
\end{aligned}\right\} \quad 2.
$$

Diese sechs Gleichungen enthalten in der That alles, was sich n über die gegenseitigen Beziehungen irgend zweier Dreiecke sag lässt, namentlich alle Sätze über die Congruenz und Aehnlichk dieser Figuren. Dass die Dreiecke dabei ganz willkührlich si und nicht einmal in einerlei Ebene zu liegen brauchen, verste sich von selbst.

§. 2.

Aus den im vorigen Paragraphen gebrauchten Grundgleichu gen (1) ergiebt sich sofort auch:

$$1 = \frac{b \cos C + c \cos B}{a} = \frac{b_1 \cos C_1 + c_1 \cos B_1}{a_1}.$$

Wird nun diese Gleichung einmal mit $c \sin B = b \sin C$, das andere Mal mit $c_1 \sin B_1 = b_1 \sin C_1$ multiplicirt, so findet man

$$\left.\begin{aligned}
2\Delta \cdot \frac{a_1}{a} &= bc_1 \sin C \cos B_1 + b_1 c \sin B \cos C_1 \\
&= bb_1 \sin C \cos C_1 + cc_1 \sin B \cos B_1 \\
2\Delta_1 \cdot \frac{a}{a_1} &= bc_1 \cos C \sin B_1 + b_1 c \cos B \sin C_1 \\
&= bb_1 \cos C \sin C_1 + cc_1 \cos B \sin B_1 \\
\frac{2\Delta a_1^2 \pm 2\Delta_1 a^2}{aa_1} &= bc_1 \sin (C \pm B_1) + b_1 c \sin (B \pm C_1) \\
&= bb_1 \sin (C \pm C_1) + cc_1 \sin (B \pm B_1)
\end{aligned}\right\} 3.$$

Ferner wird

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = a \cos B - b \cos A \text{ und } \frac{a_1^2 - b_1^2}{b_1^2} = a_1 \cos B_1 - b_1 \cos A_1;$$

dies auf dieselbe Weise behandelt, wie die vorhergehenden Gleichungen, giebt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\Delta(a_1^2 - b_1^2) \pm 2\Delta_1(a^2 - b^2)}{cc_1} &= a_1 b \sin (A \mp B_1) - ab_1 \sin (B \mp A_1) \\
&= aa_1 \sin (B \pm B_1) - bb_1 \sin (A \pm A_1)
\end{aligned}\right\} 4.$$

wonach sich die analogen Ausdrücke unmittelbar bilden lassen.

§. 3.

Ist irgend eine Gleichung von der Form $u^2 + v^2 - 2uv \cos Y = w^2 + x^2 - 2wx \cos Z$ gegeben, so lässt sie sich ganz auf dieselbe Weise umformen, wie die bekannte Formel der ebenen Trigonometrie. Denn man gebe ihr die Gestalt $u^2 + v^2 - w^2 - x^2 = 2uv \cos Y - 2wx \cos Z$ und addire und subtrahire successive auf beiden Seiten die Grösse $2uv + 2wx$, so erhält man durch Multiplication der beiderseitigen Resultate sogleich:

$$\left.\begin{aligned}
(u+v+w-x)\,(u+v-w+x)\,(u-v+w+x)\,(-u+v+w+x) \\
-8uvwx = \\
= 4[uv \sin Y \pm wx \sin Z]^2 + 8uvwx \cos (Y \pm Z).
\end{aligned}\right\} 5.$$

Wendet man dieses Theorem auf die Gleichungen Nr. 2. an, und macht aus (3) und (4) die nöthigen Substitutionen, so findet man, wenn zur Abkürzung $ac_1 + a_1 c + bc_1 + b_1 c = 2\alpha\beta$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi^2_{\alpha\beta} &= 16(\alpha\beta - b_1 c)\,(\alpha\beta - bc_1)\,(\alpha\beta - a_1 c)\,(\alpha\beta - ac_1) - 8aa_1 bb_1 c^2 c_1^2 \\
&= 16(\Delta c_1^2 \pm \Delta_1 c^2)^2 + 8aa_1 bb_1 c^2 c_1^2 \cos (C \pm C_1) \\
&= 16[\Delta(a_1^2 - b_1^2) \pm \Delta_1(a^2 - b^2)]^2 \\
&\quad + 8aa_1 bb_1 c^2 c_1^2 \cos [(A - B) \pm (A_1 - B_1)]
\end{aligned}\right\} 6.$$

§ 4.

Mit Hülfe dieser allgemeinen Theoreme kann nun eine ziemliche Zahl specieller Fälle entwickelt werden. Da das Dreieck $a_1b_1c_1$ ganz beliebig ist, so wollen wir zuvörderst $a_1=b_1=c_1$ setzen, und erhalten damit aus Nr. 2. sogleich:

$$a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ\pm C)=a^2+c^2-2ac\cos(60^\circ\pm B)$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos(60^\circ\pm A)$$

d. h. construirt man über den drei Seiten eines geradlinigen Dreieckes gleichseitige Dreiecke, so aber, dass dieselben entweder sämmtlich auf den äusseren oder inneren Seiten liegen, und verbindet dann jede Spitze des Urdreieckes mit der gegenüberliegenden Spitze des gleichseitigen Dreieckes über ihrer Gegenseite; so sind diese drei Verbindungslinien unter einander gleich.

Ist $a_1b_1c_1$ ferner ein rechtwinklich-gleichschenkliches Dreieck und $a_1=b_1$, so wird:

$$a^2+b^2\pm 2ab\sin C=2a^2+c^2-2ac\sqrt{2}\cos(45^\circ\pm B)$$
$$=2b^2+c^2-2bc\sqrt{2}\cos(45^\circ\pm A)$$
$$a^2+c^2\pm 2ac\sin B=2a^2+b^2-2ab\sqrt{2}\cos(45^\circ\pm C)$$
$$=b^2+2c^2-2bc\sqrt{2}\cos(45^\circ\pm A)$$
$$b^2+c^2\pm 2bc\sin A=a^2+2b^2-2ab\sqrt{2}\cos(45^\circ\pm C)$$
$$=a^2+2c^2-2ac\sqrt{2}\cos(45^\circ\pm B)$$

d. h. errichtet man über zwei Seiten eines geradlinigen Dreiecks rechtwinklich-gleichschenkliche Dreiecke, so dass beide zugleich entweder innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes fallen, und ihre rechten Winkel beide an dem Durchschnittspunkte jener beiden Seiten liegen; — und man verbindet nun die beiden anderen Spitzen des Urdreieckes mit den gegenüberliegenden Spitzen der über ihren Gegenseiten construirten Dreiecke; so sind diese beiden Verbindungslinien unter einander gleich.

Man setze ferner das Dreieck $a_1b_1c_1$ dem Dreiecke abc ähnlich, so wird $A_1=A$, $B_1=B$ und $C_1=C$, und man findet aus (2), wenn man immer nur die oberen Zeichen nimmt:

$$a^4+b^4-2a^2b^2\cos 2C=(a^2+b^2+2ab\cos C)c^2.$$

Nun ist aber bekanntlich $a^2+b^2+2ab\cos C$ gleich dem Quadrate der doppelten aus der Spitze C auf die Seite c gezogenen Schwerlinie; nennt man daher diese Schwerlinien $\alpha\,\beta\,\gamma$, je nachdem sie zur Seite $a\;b\;c$ gehören; so findet man:

$$a^4+b^4-2a^2b^2\cos 2C=4c^2\gamma^2$$
$$a^4+c^4-2a^2c^2\cos 2B=4b^2\beta^2$$
$$b^4+c^4-2b^2c^2\cos 2A=4a^2\alpha^2.$$

Auf diese Art könnte man nun fortfahren und noch andere Voraussetzungen über die Natur des Dreieckes $a_1b_1c_1$ machen; indessen lassen sich die meisten der dadurch erhaltenen Resultate eben so

cht unmittelbar ableiten, daher es an den angeführten Beispielen nügen mag.

§. 5.

Weit wichtiger sind dagegen die Resultate, die man erhält, nn man einzelne Stücke beider Dreiecke gleich setzt; denn die- Fall ist derjenige, der am meisten vorkommt und der, wenn die eiecke nicht in einerlei Ebene liegen, einer geschmeidigen Be- ndlung bisher am meisten widerstanden hat. Nimmt man zuvör- rst an, dass eine Seite beider Dreiecke gleich sei, und setzt mnach etwa $c = c_1$, so erhält man aus Nr. 2. sogleich:

$$\left.\begin{array}{l}
a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - 2aa_1bb_1 \cos(C \pm C_1) = c^2(a_1^2 + b^2 - 2a_1b \cos(A \pm B_1)) \\
\qquad = c^2(a^2 + b_1^2 - 2ab_1 \cos(B \pm A_1)) \\
a^2b_1^2 + a_1^2b^2 - 2aa_1bb_1 \cos(C \pm C_1) = c^2(a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos(B \pm B_1)) \\
\qquad = c^2(b^2 + b_1^2 - 2bb_1 \cos(A \pm A_1))
\end{array}\right\} 7.$$

Setzt man ferner:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{ab}^2 &= (a+a_1+b-b_1)(a+a_1-b+b_1)(a-a_1+b+b_1)\\ &\quad\times(-a+a_1+b+b_1)-8aa_1bb_1\\ &\text{so wird auch}\\ \varphi_{ab}^2 &= 16(\Delta\pm\Delta_1)^2+8aa_1bb_1\cos(C\pm C_1)\\ &= 16\left[\frac{\Delta(a_1^2-b_1^2)\pm\Delta_1(a^2-b^2)}{c^2}\right]^2\\ &\quad+8aa_1bb_1\cos((A-B)\pm(A_1-B_1))\end{aligned}\right\}8.$$

§. 6.

Sind dagegen zwei Seiten des einen Dreiecks einzeln genommen zweien Seiten des andern Dreiecks gleich, also z. B. $a=a_1$ und $b=b_1$, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}a^4+c^2c_1^2-2a^2cc_1\cos(B\pm B_1) &= b^2(a_1^2+c^2-2a_1c\cos(A\pm C_1))\\ &= b^2(a^2+c_1^2-2ac_1\cos(C\pm A_1))\\ b^4+c^2c_1^2-2b^2cc_1\cos(A\pm A_1) &= a^2(b_1^2+c^2-2b_1c\cos(B\pm C_1))\\ &= a^2(b^2+c_1^2-2bc_1\cos(C\pm B_1))\\ 4a^2b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(C\pm C_1) &= a^2(c^2+c_1^2-2cc_1\cos(B\pm B_1))\\ &= b^2(c^2+c_1^2-2cc_1\cos(A\pm A_1))\end{aligned}\right\}9.$$

$$\left.\begin{array}{l}
16a^2b^2c^2c_1^2 - (a^2-b^2)^2\,(c_1^2-c^2)^2 = 16(\Delta c_1^2 \pm \Delta_1 c^2)^2 + 8a^2b^2c^2c_1^2 \cos\,(C \pm C_1) \\
\qquad = 16(a^2-b^2)^2\,(\Delta \pm \Delta_1)^2 + 8a^2b^2c^2c_1^2 \cos((A-B) \pm (A_1-B_1)) \\
4a^2(c_1^2+c^2) - (c_1^2-c^2)^2 = 16(\Delta \pm \Delta_1)^2 + 8a^2cc_1 \cos\,(B \pm B_1) \\
4b^2(c_1^2+c^2) - (c_1^2-c^2)^2 = 16(\Delta \pm \Delta_1)^2 + 8b^2cc_1 \cos\,(A \pm A_1) \\
\frac{(a^2-b^2)\,(c_1^2+c^2)}{2cc_1} = a^2 \cos\,(B \pm B_1) - b^2 \cos\,(A \pm A_1)
\end{array}\right\} \; 10.$$

§. 7.

Ist in den beiden verglichenen Dreiecken ein Winkel gleich, also z. B. $C = C_1$, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}(aa_1-bb_1)^2&=a_1^2c^2+b^2c_1^2-2a_1bcc_1\cos(A-B_1)\\&=a^2c_1^2+b_1^2c^2-2ab_1cc_1\cos(B-A_1)\\(ab_1-a_1b)^2&=a^2c_1^2+a_1^2c^2-2aa_1cc_1\cos(B-B_1)\\&=b^2c_1^2+b_1^2c^2-2bb_1cc_1\cos(A-A_1)\end{aligned}\right\}\quad 11.$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{\alpha\beta}^2&=16(\Delta_1c^2-\Delta c_1^2)^2+8aa_1bb_1c^2c_1^2\\&=16[\Delta(a_1^2-b_1^2)-\Delta_1(a^2-b^2)]^2\\&\qquad\qquad+8aa_1bb_1c^2c_1^2\cos 2(B-B_1)\\\Phi_{\alpha\gamma}^2&=16(\Delta_1b^2-\Delta b_1^2)^2+8aa_1b^2b_1^2cc_1\cos(B-B_1)\\&=16[\Delta(a_1^2-c_1^2)-\Delta_1(a^2-c^2)]^2\\&\qquad\qquad+8aa_1b^2b_1^2cc_1\cos(A-A_1)\\\Phi_{\beta\gamma}^2&=16(\Delta_1a^2-\Delta a_1^2)^2+8a^2a_1^2bb_1cc_1\cos(A-A_1)\\&=16[\Delta(b_1^2-c_1^2)-\Delta_1(b^2-c^2)]^2\\&\qquad\qquad+8a^2a_1^2bb_1cc_1\cos(B-B_1)\end{aligned}\right\}\quad 12.$$

Da in den beiden Dreiecken sowohl $A-A_1=B_1-B$ als auch $A-B_1=A_1-B$ ist, so können die Winkelaggregate beliebig mit einander vertauscht werden, und man erhält somit noch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\cos(A-B_1)&=\cos(A_1-B)=\frac{c_1^2(a^2-b^2)-c^2(a_1^2-b_1^2)}{2cc_1(ab_1-a_1b)}\\\cos(A-A_1)&=\cos(B_1-B)=\frac{c_1^2(a^2-b^2)+c^2(a_1^2-b_1^2)}{2cc_1(aa_1-bb_1)}\end{aligned}\right\}\quad 13$$

§. 8.

Wird ausser $C=C_1$ auch noch die Gegenseite $c=c_1$, d. h. stehen beide Dreiecke auf gleich grossen Sehnen congruenter Kreise, so wird:

$$\left.\begin{aligned}(aa_1-bb_1)^2&=c^2(a_1^2+b^2-2a_1b\cos(A-B_1))\\&=c^2(a^2+b_1^2-2ab_1\cos(A_1-B))\\(ab_1-a_1b)^2&=c^2(a^2+a_1^2-2aa_1\cos(B_1-B))\\&=c^2(b^2+b_1^2-2bb_1\cos(A-A_1))\end{aligned}\right\}\quad 14.$$

Ferner ist nach Nr. 8.:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{ab}^2&=16(\Delta+\Delta_1)^2+8aa_1bb_1\cos 2C\\&=16(\Delta-\Delta_1)^2+8aa_1bb_1\\&=16\left[\frac{\Delta(a_1^2-b_1^2)+\Delta_1(a^2-b^2)}{c^2}\right]^2+8aa_1bb_1\cos 2(A-B_1)\\&=16\left[\frac{\Delta(a_1^2-b_1^2)+\Delta_1(a^2-b^2)}{c^2}\right]^2+8aa_1bb_1\cos 2(A-A_1)\end{aligned}\right\}\quad 15.$$

Aus dem Vorstehenden folgt auch sogleich:

$$\left.\begin{aligned}\cos(A-B_1)&=\cos(B_1-A)=\frac{a^2-a_1^2-b^2+b_1^2}{2(ab_1-a_1b)}\\\cos(A-A_1)&=\cos(B_1-B)=\frac{a^2+a_1^2-b^2-b_1^2}{2(aa_1-bb_1)}\end{aligned}\right\}\quad 16.$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2 \tfrac{1}{2}(A-B_1) &= \frac{(a+a_1+b+b_1)\,(a-a_1-b+b_1)}{4(ab_1-a_1b)}\\
\sin^2 \tfrac{1}{2}(A-B_1) &= \frac{(a+a_1-b-b_1)\,(-a+a_1-b+b_1)}{4(ab_1-a_1b)}\\
\cos^2 \tfrac{1}{2}(A-A_1) &= \frac{(a+a_1+b+b_1)\,(a+a_1-b-b_1)}{4(aa_1-bb_1)}\\
\sin^2 \tfrac{1}{2}(A-A_1) &= \frac{(a-a_1+b-b_1)\,(-a+a_1+b-b_1)}{4(aa_1-bb_1)}
\end{aligned}\right\}\ 17.$$

$$\left.\begin{aligned}
2(\Delta_1-\Delta) &= (ab_1-a_1b)\sin(A-B_1)\\
&= (aa_1-bb_1)\sin(A-A_1)
\end{aligned}\right\}\ 18.$$

Man kann nun auf diese Art weiter gehen, und z. B. $C+C_1=180°$ oder $C+C_1=90°$ u. s. w. setzen; indessen wird es kaum nöthig sein, diese Specialitäten hier weiter zu verfolgen, da die bereits entwickelten Formeln fast alle Bedürfnisse der rechnenden Geometrie befriedigen. Mehrere der hier gefundenen Ausdrücke sind bereits bekannt, jedoch war ihre Gültigkeit bisher immer darauf beschränkt, dass die verglichenen Dreiecke nicht nur in einer und derselben Ebene liegen, sondern auch mit ihren gleichen Stücken auf irgend eine Art zusammenhängen mussten, während diese Bedingung bei den vorliegenden Formeln gänzlich wegfällt. Ich war daher mit ihrer Hülfe im Stande, den grössten Theil der zwischen den Kanten und Kantenwinkeln eines Tetraeders stattfindenden Relationen, welche ich in der ersten Abhandlung des ersten Bandes dieses Archives mitgetheilt habe, fast ohne alle Rechnung hinzuschreiben. Dasselbe hat bei einer Untersuchung des geradlinigen Viereckes stattgefunden, welche gleichfalls in dem Archive wird bekannt gemacht werden.

§. 9.

Der im §. 7. erwähnte Fall, wenn die Dreiecke einen gleichen Winkel haben, lässt noch eine andere Behandlung zu, welche in der Planimetrie sehr häufig Anwendung findet, obschon die Formeln bei weitem nicht so allgemein gültig sind, wie die im §. 7. entwickelten. Legt man nehmlich die beiden Dreiecke so auf einander, dass die, die gleichen Winkel C einschliessenden, Seiten sich decken: oder, was dasselbe ist: nimmt man auf dem einen Schenkel eines ebenen Winkels C zwei beliebige Punkte A und A_1 und auf dem anderen Schenkel ebenfalls zwei beliebige Punkte B und B_1 an und nennt die Geraden

$$CB=a,\ CA=b,\ AB=c,\ AB_1=c_2,$$
$$CB_1=a_1,\ CA=b_1,\ A_1B_1=c_1,\ A_1B=c_3,$$

so entstehen vier Dreiecke CAB, CA_1B_1, CAB_1 und CA_1B, welche sämmtlich den Winkel C gemein haben, und es ist also

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\quad c_2{}^2=a^2+b_1{}^2-2ab_1\cos C$$
$$c_1{}^2=a_1{}^2+b_1{}^2-2a_1b_1\cos C,\quad c_3{}^2=a_1{}^2+b^2-2a_1b\cos C$$

woraus sich sofort folgende Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} c^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2=2(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2) \\ \qquad\qquad -2(a+a_1)(b+b_1)\cos C \\ -c^2-c_1^2+c_2^2+c_3^2=2(a_1-a)(b_1-b)\cos C \\ -c^2+c_1^2-c_2^2+c_3^2=2(a_1-a)(a_1+a-(b_1+b)\cos C) \\ -c^2+c_1^2+c_2^2-c_3^2=2(b_1-b)(b_1+b-(a_1+a)\cos C) \end{array}\right\} 19.$$

$$\left.\begin{array}{l} c^2c_1^2=(aa_1+bb_1)^2+(ab_1+a_1b)^2 \\ \qquad\qquad -2(aa_1+bb_1)(ab_1+a_1b)\cos C-4aa_1bb_1\sin^2 C \\ c_2^2c_3^2=(aa_1+bb_1)^2+(ab+a_1b_1)^2 \\ \qquad\qquad -2(aa_1+bb_1)(ab+a_1b_1)\cos C-4aa_1bb_1\sin^2 C \end{array}\right\} 20.$$

$$\left.\begin{array}{l} c^2c_1^2+c_2^2c_3^2=2(a^2a_1^2+b^2b_1^2)+(a^2+a_1^2)(b^2+b_1^2) \\ \qquad\qquad -2(aa_1+bb_1)(a_1+a)(b_1+b)\cos C+4aa_1bb_1\cos^2 C \\ c^2c_1^2-c_2^2c_3^2=(a_1-a)(b_1-b)\{(a_1+a)(b_1+b) \\ \qquad\qquad -2(aa_1+bb_1)\cos C\} \end{array}\right\} 21.$$

u. s. w. Die fernere Untersuchung dieser Relationen würde hier zu weit führen; denn sie gehört ihrer Natur nach in die Tetragonometrie.

§. 13.

Zum Schlusse mag noch erwähnt werden, dass ähnliche Ausdrücke, wie die in Nr. 2. zusammengestellten, auch für die sphärischen Dreiecke existiren. Denn sind abc und $a_1b_1c_1$ die Seiten und ABC und $A_1B_1C_1$ die denselben gegenüberliegenden Winkel zweier sphärischen Dreiecke, so ist stets:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a \cos a_1 \pm \sin a \sin a_1 \cos C \cos C_1 &= \cos (b \mp b_1)\{\cos c \cos c_1 \mp \sin c \sin c_1 \cos A \cos A_1\} \\
&\quad + \sin (b \mp b_1)\{\sin c \cos c_1 \cos A \mp \cos c \sin c_1 \cos A_1\} \\
\cos a \cos a_1 \pm \sin a \sin a_1 \cos B \cos B_1 &= \cos (c \mp c_1)\{\cos b \cos b_1 \mp \sin b \sin b_1 \cos A \cos A_1\} \\
&\quad + \sin (c \mp c_1)\{\sin b \cos b_1 \cos A \mp \cos b \sin b_1 \cos A_1\} \\
\cos a \cos a_1 \pm \sin a \sin a_1 \cos B \cos C_1 &= \cos (c \mp b_1)\{\cos b \cos c_1 \pm \sin b \sin c_1 \cos A \cos A_1\} \\
&\quad + \sin (c \mp b_1)\{\sin b \cos c_1 \cos A \mp \cos b \sin c_1 \cos A_1\}
\end{aligned}\right\} 22.$$

u. s. w. Setzt man $c = c_1$ so ergiebt sich; wenn man zur Abkürzung den Winkel x einführt:

[illegible] $\sin a$ [illegible] $\cos (B \pm B$ [illegible]

[illegible] $\cos (A \pm A_1)$

[illegible] $=$ [illegible]

[illegible] $=$ [illegible]   (23.)

[illegible] $= \ldots \sin (B \pm B_1) \cos$ [illegible]

[illegible] $=$ [illegible] angenommen, so findet man

[illegible] $\sin A$ [illegible] $\cos (b \pm b_1)$

[illegible] $\sin B$ [illegible] $\cos (a \pm a_1)$

[illegible] $=$ [illegible]   (24.)

[illegible] $=$ [illegible]

[illegible] $= \ldots \sin (b \pm b_1) \cos X$

[illegible] werthe Umstand, dass die For-
[illegible] für ebene Dreiecke entwickel-
[illegible] wenn die beiden sphärischen
[illegible] Bestimmung etwas von ihrer
[illegible] haben. Mit Ausnahme des sphä-
[illegible] sphärischen Gebilden statt
[illegible] dass für jedes beliebige ebene
[illegible] zweier Gegenwinkel unverän-
[illegible] Satz bei sphärischen Vierecken
[illegible] Nebenkreise eingeschrieben sind.
[illegible] verloren haben.

[illegible]

[illegible] Bedeutung auf der Oberfläche
[illegible] in der Ebene beigelegt worden
[illegible] Abkürzung die Hülfswinkel $\alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$

[illegible] $a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b + b_1) \cos C$

[illegible] $a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b + b_1) \cos C$ (25.)

[illegible] $a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b + b_1) \cos C$

[illegible] $a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b + b_1) \cos C$

[illegible] $\tfrac{1}{2}(a - a_1) \cos \tfrac{1}{2}(b - b_1) \cos \alpha$

[illegible] $a_1) \sin \tfrac{1}{2}(b - b_1) \cos \alpha_1$ (26.)

[illegible] $\sin \tfrac{1}{2}(b - b_1) \cos \alpha_2$

[illegible] $\cos \tfrac{1}{2}(b - b_1) \cos \alpha_3$

$$\left.\begin{array}{l}
\cos c\ \cos c_1 - \cos c_2\ \cos c_3 = \sin(a_1 - a)\ \sin(b_1 - b)\ \cos C \\
\cos c\ \cos c_2 - \cos c_1\ \cos c_3 = \sin(b_1 - b) \times \\
\quad \times\{\cos(a + a_1)\ \sin(b_1 + b) - \sin(a_1 + a)\ \cos(b_1 + b)\ \cos C \\
\qquad + \sin a\ \sin a_1\ \sin(b + b_1)\ \sin^2 C\} \\
\cos c\ \cos c_3 - \cos c_1\ \cos c_2 = \sin(a_1 - a) \times \\
\quad \times\{\sin(a_1 + a)\ \cos(b_1 + b) - \cos(a_1 + a)\ \sin(b_1 + b)\ \cos C \\
\qquad + \sin b\ \sin b_1\ \sin(a_1 + a)\ \sin^2 C\}
\end{array}\right\} 27.$$

Die geometrische Bedeutung der Hülfswinkel α liegt klar vor Augen. Mittelst dieser Formeln ist der grössere Theil der im Tetraeder stattfindenden Relationen zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln entwickelt worden, so wie sie auch bei Untersuchung des sphärischen Viereckes die besten Dienste geleistet haben.

XV.

Ueber die Grundformeln der Dioptrik und Katoptrik.

Von

dem Herausgeber.

I.

Betrachtung der Brechung und Zurückwerfung bei einem Kreisbogen.

§. 1.

Ein den aus dem Mittelpunkte C in Taf. II. Fig. 1. mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreisbogen KK in E, die Axe XY in M treffender Strahl MN kann gegen das Einfallsloth CC_1 offenbar nur eine der vier in der Figur dargestellten Lagen, welche wir durch I, II, III, IV bezeichnen wollen, haben. Die, jenachdem der Punkt M auf der convexen oder concaven Seite des Kreisbogens KK liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Entfernung des Puntes M von dem Durchschnittspunkte A des Kreisbogens KK mit der Axe XY wollen wir durch Δ bezeichnen, und den Symbo-

ten ω und Θ die aus der Figur auch ohne weitere Erläuterung mit hinreichender Deutlichkeit ersichtliche Bedeutung beilegen.

Dies vorausgesetzt, ist nun in dem Falle I.

$$CE : CA + AM = \sin(\omega - \Theta) : \sin\omega,$$

d. i.

$$R : R + \Delta = \sin(\omega - \Theta) : \sin\omega.$$

In dem Falle II. ist

$$CE : AM - CA = \sin(\Theta - \omega) : \sin\omega,$$

d. i.

$$R : -(R + \Delta) = \sin(\Theta - \omega) : \sin\omega,$$

oder

$$R : R + \Delta = \sin(\omega - \Theta) : \sin\omega.$$

In dem Falle III. ist

$$CE : CA + AM = \sin(\omega + \Theta) : \sin\omega,$$

d. i.

$$R : R + \Delta = \sin(\omega + \Theta) : \sin\omega.$$

In dem Falle IV. ist

$$CE : CA - AM = \sin(\omega + \Theta) : \sin\omega,$$

d. i.

$$R : R + \Delta = \sin(\omega + \Theta) : \sin\omega.$$

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so sieht man, dass immer

$$R : R + \Delta = \sin(\omega \mp \Theta) : \sin\omega,$$

oder

$$1. \quad \frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega \mp \Theta)},$$

und in dieser Gleichung in den Fällen I. und II. das obere, in den Fällen III. und IV. das untere Zeichen zu nehmen ist.

Denken wir uns nun in dem Falle I., wo nach dem Vorhergehenden

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega - \Theta)}$$

ist, entweder ME oder NE als den einfallenden Strahl, stellen uns durch E eine Tangente an den Kreisbogen KK gezogen vor, und bezeichnen für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch ω_1 und Δ_1 dasselbe, was vorher für den einfallenden Strahl durch ω und Δ bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II, für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1 - \Theta)},$$

für den zurückgeworfenen Strahl *) dagegen ist immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1+\Theta)}.$$

Denken wir uns in dem Falle II, wo nach dem Vorhergehenden auch

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega-\Theta)}$$

ist, wieder entweder *ME* oder *NE* als den einfallenden Strahl, stellen uns auch jetzt durch *E* eine Tangente an den Kreisbogen *KK* gezogen vor, und bezeichnen für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch ω_1 und Δ_1 wieder dasselbe, was im Vorhergehenden durch ω und Δ für den einfallenden Strahl bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II., für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1-\Theta)},$$

für den zurückgeworfenen Strahl dagegen ist immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1+\Theta)}.$$

Denken wir uns ferner in dem Falle III, wo nach dem Vorhergehenden

$$\frac{R+\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega+\Theta)}$$

ist, entweder *ME* oder *NE* als den einfallenden Strahl, stellen uns durch *E* eine Tangente an den Kreisbogen *KK* gezogen vor, und bezeichnen wieder für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch ω_1 und Δ_1 dasselbe, was im Vorhergehenden für den einfallenden Strahl durch ω und Δ bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV., für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1+\Theta)},$$

für den zurückgeworfenen Strahl dagegen ist immer

---

*) Rücksichtlich des Falls der Zurückwerfung bemerken wir, dass wir denselben im Folgenden aus einem allgemeinern Gesichtspunkte als gewöhnlich geschieht betrachten werden, indem wir auch in diesem Falle bloss annehmen wollen, dass die Sinus der beiden spitzen Winkel, welche der einfallende und zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslothe einschliessen, in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen.

$$\frac{R+\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1-\Theta)}.$$

Denken wir uns endlich in dem Falle IV., wo nach dem Vorhergehenden wieder

$$\frac{R+\Delta}{R}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega+\Theta)}$$

ist, entweder ME oder NE als den einfallenden Strahl, stellen uns durch E eine Tangente an den Kreisbogen KK gezogen vor, und bezeichnen auch jetzt für den gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahl durch ω_1 und Δ_1 dasselbe, was vorher für den einfallenden Strahl durch ω und Δ bezeichnet worden ist; so wird leicht erhellen, dass für den gebrochenen Strahl immer bloss entweder der Fall III. oder der Fall IV., für den zurückgeworfenen Strahl immer bloss entweder der Fall I. oder der Fall II. Statt finden kann. Also ist nach dem Vorhergehenden für den gebrochenen Strahl immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1+\Theta)},$$

für den zurückgeworfenen Strahl dagegen ist immer

$$\frac{R+\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1-\Theta)}.$$

Ueberhaupt ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden Folgendes:

In den Fällen I. und II. ist

$$\frac{R+\Delta}{R}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega-\Theta)},\quad \frac{R+\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1\mp\Theta)};$$

in den Fällen III. und IV. dagegen ist

$$\frac{R+\Delta}{R}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega+\Theta)},\quad \frac{R+\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1\pm\Theta)};$$

wo immer die obern Zeichen dem Falle der Brechung, die untern dem Falle der Zurückwerfung entsprechen.

Also ist im Falle der Brechung mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$2.\quad \frac{R+\Delta}{R}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega\mp\Theta)},\quad \frac{R+\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1\mp\Theta)}.$$

Im Falle der Zurückwerfung ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$3.\quad \frac{R+\Delta}{R}=\frac{\sin\omega}{\sin(\omega\mp\Theta)},\quad \frac{R+\Delta_1}{R}=\frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1\pm\Theta)}.$$

Im Falle der Brechung ist folglich nach 2.

$$4.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1}=\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin(\omega_1\mp\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)}.$$

Dagegen ist im Falle der Zurückwerfung nach 3.

$$5.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1}=\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\sin(\omega_1\pm\Theta)}{\sin(\omega\mp\Theta)}.$$

Aus der Gleichung 4. erhält man auch

$$4^*.\quad \tang \Theta = \pm \frac{\Delta - \Delta_1}{(R+\Delta)\cot\omega - (R+\Delta_1)\cot\omega_1},$$

und aus der Gleichung 5. ergiebt sich

$$5^*.\quad \tang \Theta = \pm \frac{\Delta - \Delta_1}{(R+\Delta)\cot\omega + (R+\Delta_1)\cot\omega_1}.$$

Nach 2. ist im Falle der Brechung

$$1 + \frac{\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega \mp \Theta)},\quad 1 + \frac{\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1 \mp \Theta)};$$

folglich

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)}{\sin(\omega \mp \Theta)},\quad \frac{\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \mp \Theta)}{\sin(\omega_1 \mp \Theta)};$$

also

$$6.\quad \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\sin(\omega_1 \mp \Theta)}{\sin(\omega \mp \Theta)} \cdot \frac{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)}{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \mp \Theta)}$$

oder

$$7.\quad \frac{\sin(\omega_1 \mp \Theta)}{\sin(\omega \mp \Theta)} = \frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \mp \Theta)}{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)}.$$

Nach 3. ist im Falle der Zurückwerfung

$$1 + \frac{\Delta}{R} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega \mp \Theta)},\quad 1 + \frac{\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1}{\sin(\omega_1 \pm \Theta)};$$

folglich

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)}{\sin(\omega \mp \Theta)},\quad \frac{\Delta_1}{R} = \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \pm \Theta)}{\sin(\omega_1 \pm \Theta)};$$

also

$$8.\quad \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\sin(\omega_1 \pm \Theta)}{\sin(\omega \mp \Theta)} \cdot \frac{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)}{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \pm \Theta)},$$

oder

$$9.\quad \frac{\sin(\omega_1 \pm \Theta)}{\sin(\omega \mp \Theta)} = \frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \pm \Theta)}{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)}.$$

Im Falle der Brechung ist also nach 4. und 7.

$$10.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \mp \Theta)}{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)},$$

und im Falle der Zurückwerfung ist nach 5. und 9.

$$11.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \pm \Theta)}{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta)}.$$

Auch ist nach bekannten goniometrischen Formeln im Falle der Brechung nach 10.

$$12.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)},$$

und im Falle der Zurückwerfung ist nach 11.

$$13.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = -\frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)}.$$

Aus der Formel 12. ergiebt sich auch

$$12^*.\quad \cot\tfrac{1}{2}\Theta = \mp \frac{\frac{R}{\Delta} - \frac{R}{\Delta_1}}{(1+\frac{R}{\Delta})\cot\omega - (1+\frac{R}{\Delta_1})\cot\omega_1},$$

und aus der Formel 13. erhält man

$$13^*.\quad \cot\tfrac{1}{2}\Theta = \mp \frac{\frac{R}{\Delta} - \frac{R}{\Delta_1}}{(1+\frac{R}{\Delta})\cot\omega + (1+\frac{R}{\Delta_1})\cot\omega_1}.$$

Setzt man

$$14.\quad \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n,$$

wo bekanntlich n eine constante Grösse ist, so werden die vorhergehenden Formeln im Falle der Brechung

$$15.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = n\,\frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)},$$

und im Falle der Zurückwerfung

$$16.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = -n\,\frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)}.$$

Bei der gewöhnlichen Ansicht der Zurückwerfung ist bekanntlich $n = 1$, und folglich nach 16.

$$17.\quad \frac{R+\Delta}{R+\Delta_1} = -\frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{\cos(\omega \pm \frac{1}{2}\Theta)}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta)}.$$

Wir wollen aber, wie schon oben erinnert worden ist, die Zurückwerfung hier immer aus dem oben angegebenen allgemeinern Gesichtspunkte betrachten.

§. 2.

Der Punkt A soll jetzt als der Anfang, die Axe XY als die Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen werden, und die positiven Abscissen wollen wir immer auf der convexen Seite des Bogens KK nehmen. Ist nun M' ein beliebiger strahlender Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf das angenommene System p, q sind, so denke man sich durch denselben und den Mittelpunkt C des Kreisbogens KK die Axe $X'Y'$ gezogen, welche den in Rede stehenden Kreisbogen in dem Punkte A' schneiden mag, und bezeichne in Bezug auf diese Axe für den Punkt M' durch Δ' und Δ'_1 ganz dasselbe, was im vorhergehenden Paragraphen in Bezug auf die den Kreisbogen KK in A schneidende Axe XY für den Punkt M durch Δ und Δ_1 bezeichnet worden ist. Ferner bezeichne man den von der Linie CA' mit der Axe XY eingeschlossenen, jenachdem die Linie CA' auf der Seite der positiven oder auf der Seite der negativen Ordinaten liegt, als positiv oder als negativ betrachteten spitzen Winkel durch φ; so wird aus Taf. II. Fig. 2. leicht erhellen, dass in völliger Allgemeinheit

$$18. \begin{cases} p = (R + \Delta') \cos\varphi - R, \\ q = (R + \Delta') \sin\varphi \end{cases}$$

ist. Sind nun p_1, q_1 die Coordinaten des Punktes, in welchem die Axe $X'Y'$ von dem gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahle geschnitten wird; so ist ganz eben so

$$19. \begin{cases} p_1 = (R + \Delta'_1) \cos\varphi - R, \\ q_1 = (R + \Delta'_1) \sin\varphi. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 18. und 19. folgt

$$\frac{R+p}{R+p_1} = \frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1},\ \frac{q}{q_1} = \frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1};$$

also

$$20.\quad \frac{R+p}{R+p_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1}.$$

Ferner ist

$$\Delta' = \frac{R+p}{\cos\varphi} - R = \frac{p + 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi},$$

$$\Delta'_1 = \frac{R+p_1}{\cos\varphi} - R = \frac{p_1 + 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{\cos\varphi}$$

und

$$\Delta' = \frac{q}{\sin\varphi} - R = \frac{q - R\sin\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\Delta'_1 = \frac{q_1}{\sin\varphi} - R = \frac{q_1 - R\sin\varphi}{\sin\varphi};$$

also

$$21.\quad \frac{\Delta'}{\Delta'_1} = \frac{p + 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{p_1 + 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2} = \frac{q - R\sin\varphi}{q_1 - R\sin\varphi}.$$

Weil nun nach dem vorigen Paragraphen, wenn durch Θ' jetzt in Bezug auf die Axe $X'Y'$ dasselbe bezeichnet wird, was früher in Bezug auf die Axe XY durch Θ bezeichnet wurde, im Falle der Brechung

$$\frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1} = \frac{\Delta'}{\Delta'_1}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1 \mp \tfrac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \tfrac{1}{2}\Theta')},$$

und im Falle der Zurückwerfung

$$\frac{R+\Delta'}{R+\Delta'_1} = -\frac{\Delta'}{\Delta'_1}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1 \pm \tfrac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \tfrac{1}{2}\Theta')}$$

ist; so ist nach 20. und 21. im Falle der Brechung

$$22. \begin{cases} \dfrac{R+p}{R+p_1} = \dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\dfrac{\cos(\omega_1 \mp \tfrac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \tfrac{1}{2}\Theta')}\cdot\dfrac{p + 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{p_1 + 2R\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}, \\ \dfrac{q}{q_1} = \dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1}\cdot\dfrac{\cos(\omega_1 \mp \tfrac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \tfrac{1}{2}\Theta')}\cdot\dfrac{q - R\sin.\varphi}{q_1 - R\sin\varphi}; \end{cases}$$

und im Falle der Zurückwerfung ist

$$23. \begin{cases} \dfrac{R+p}{R+p_1} = -\dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \dfrac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} \cdot \dfrac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}; \\ \dfrac{q}{q_1} = -\dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \dfrac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} \cdot \dfrac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi}. \end{cases}$$

Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, dass

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \mp \Theta')}{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta')}$$

$$= \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin\omega_1\cos\Theta' \pm \cos\omega_1\sin\Theta'}{\sin\omega - \sin\omega\cos\Theta' \pm \cos\omega\sin\Theta'},$$

$$-\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin(\omega_1 \pm \Theta')}{\sin\omega - \sin(\omega \mp \Theta')}$$

$$= \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin\omega_1\cos\Theta' \mp \cos\omega_1\sin\Theta'}{\sin\omega - \sin\omega\cos\Theta' \pm \cos\omega\sin\Theta'}$$

ist. Wenn nun die Winkel ω, ω_1, Θ' so klein sind, dass man Grössen, welche in Bezug auf dieselben von der vierten und höhern Dimensionen sind, ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin\omega_1 \pm \sin\Theta'}{\sin\omega - \sin\omega \pm \sin\Theta'},$$

$$-\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\sin\omega_1 - \sin\omega_1 \mp \sin\Theta'}{\sin\omega - \sin\omega \pm \sin\Theta'};$$

also offenbar

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \mp \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n,$$

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cdot \frac{\cos(\omega_1 \pm \frac{1}{2}\Theta')}{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\Theta')} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n;$$

und mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf ω, ω_1, Θ' von der vierten und höhern Dimensionen sind, ist folglich im Falle der Brechung nach 22.

$$24. \quad \frac{R+p}{R+p_1} = n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = n\,\frac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi};$$

und im Falle der Zurückwerfung ist nach 23.

$$25. \quad \frac{R+p}{R+p_1} = -n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = -n\,\frac{q-R\sin\varphi}{q_1-R\sin\varphi}.$$

Auch ist nach 20. mit völliger Genauigkeit

$$\frac{q}{q_1} = \frac{R+p}{R+p_1},$$

und folglich mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf ω, ω_1, Θ' von der vierten und höhern Dimensionen sind, im Falle der Brechung

$$26. \quad \frac{R+p}{R+p_1} = n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = n\,\frac{p+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R\sin\frac{1}{2}\varphi^2};$$

und im Falle der Zurückwerfung

27. $\frac{R+p}{R+p_1} = -n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = -n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2};$

oder es ist mit dem obigen Grade der Genauigkeit

28. $\frac{R+p}{R+p_1} = \pm n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = \pm n \frac{q-R \sin \varphi}{q_1-R \sin \varphi};$

oder auch

29. $\frac{R+p}{R+p_1} = \pm n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = \pm n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2};$

wo die obern Zeichen dem Falle der Brechung, die untern dem Falle der Zurückwerfung entsprechen.

Nimmt man nun bloss n im Falle der Brechung positiv, im Falle der Zurückwerfung dagegen negativ, so kann man mit dem obigen Grade der Genauigkeit für beide Fälle

30. $\frac{R+p}{R+p_1} = n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = n \frac{q-R \sin \varphi}{q_1-R \sin \varphi}$

oder auch

31. $\frac{R+p}{R+p_1} = n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}, \quad \frac{q}{q_1} = n \frac{p+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{p_1+2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2}$

setzen. Ist es aber verstattet, auch die Grösse $2R \sin \frac{1}{2}\varphi^2$ wegen der Kleinheit von $\sin \frac{1}{2}\varphi^2$ zu vernachlässigen, so nehmen die beiden letzten Formeln die folgende sehr einfache Gestalt an:

32. $\frac{R+p}{R+p_1} = n \frac{p}{p_1}, \quad \frac{q}{q_1} = n \frac{p}{p_1},$

wo immer n im Falle der Brechung positiv, im Falle der Zurückwerfung negativ zu nehmen ist.

Aus den beiden Gleichungen 30. erhält man ohne Schwierigkeit

33. $p_1 = \frac{nRp+2R\{(n-1)R-p\} \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{R(1-2n \sin \frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}, \quad q_1 = \frac{qR \sin \varphi}{q-n(q-R \sin \varphi)};$

und aus den beiden Gleichungen 31. ergiebt sich

34. $\begin{cases} p_1 = \frac{nRp+2R\{(n-1)R-p\} \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{R(1-2n \sin \frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}, \\ q_1 = \frac{Rq(1-2 \sin \frac{1}{2}\varphi^2)}{R(1-2n \sin \frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}; \end{cases}$

oder

35. $\begin{cases} p_1 = \frac{nRp+2R\{(n-1)R-p\} \sin \frac{1}{2}\varphi^2}{R(1-2n \sin \frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}, \\ q_1 = \frac{Rq \cos \varphi}{R(1-2n \sin \frac{1}{2}\varphi^2)-(n-1)p}; \end{cases}$

und nach 34., wenn man $\sin \frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend betrachtet,

36. $p_1 = \frac{nRp}{R-(n-1)p}, \quad q_1 = \frac{Rq}{R-(n-1)p};$

wo n immer im Falle der Brechung als positiv, im Falle der Zurückwerfung als negativ betrachtet wird.

Aus den vorher entwickelten Formeln 33., 34., 35. erhellet, dass unter der wegen der Winkel ω, ω_1, Θ' gemachten Voraussetzung die Coordinaten p_1, q_1 sich nicht ändern, so lange die Coordinaten p, q keine Aenderung erleiden, welches auch die Richtungen der aus dem Punkte (pq) ausgehenden Strahlen sein mögen, dass also alle von dem Punkte (pq) ausgehende Strahlen sich nach der Brechung oder Zurückwerfung in dem Punkte (p_1q_1) wieder mit einander vereinigen.

Bezeichnet man den Werth, welchen p_1 für $p=\infty$ erhält, durch f_1, so ergiebt sich aus 34. leicht

$$37.\quad f_1=-\frac{n-2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{n-1}R,$$

oder, wie man leicht findet,

$$38.\quad f_1=-\left(1+\frac{\cos\varphi}{n-1}\right)R.$$

Betrachtet man $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend, so wird nach 37.

$$39.\quad f_1=-\frac{n}{n-1}R,$$

und folglich für $n=-1$, d. i. bei der gewöhnlichen Ansicht der Zurückwerfung,

$$40.\quad f_1=-\frac{1}{2}R.$$

Die beiden Formeln 36. können auch unter der folgenden Form dargestellt werden:

$$41.\quad \frac{1}{p}-n\frac{1}{p_1}=(n-1)\frac{1}{R},\quad \frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}=(n-1)\frac{p}{Rq}.$$

Weil nun aber nach 39.

$$(n-1)\frac{1}{R}=-n\frac{1}{f_1}$$

ist, so werden die beiden vorhergehenden Gleichungen

$$42.\quad \frac{1}{p}-n\frac{1}{p_1}=-n\frac{1}{f_1},\quad \frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}=-n\frac{p}{f_1q};$$

und die erste dieser beiden Gleichungen kann auch unter der Form

$$43.\quad \frac{1}{p}=n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{f_1}\right)$$

geschrieben werden. Für $n=-1$ ist

$$44.\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}=\frac{1}{f_1},$$

oder nach 40.

$$45.\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}=-\frac{2}{R}.$$

Dass q_1 für $p=\infty$ verschwindet, erhellet aus den Formeln 34., 35. auf der Stelle, wobei aber nie aus den Augen gelassen werden darf, dass die in Rede stehenden Formeln sämmtlich nur Näherungsformeln sind.

Wenn man mittelst der Formeln 33. die Coordinaten p, q durch die Coordinaten p_1, q_1 ausdrückt, so erhält man

$$46.\quad p=\frac{Rp_1(1-2n\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)-2(n-1)R^2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{R(n-2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1},\quad q=\frac{nRq_1\sin\varphi}{R\sin\varphi+(n-1)q_1};$$

und aus den Formeln 34. ergiebt sich auf ähnliche Weise

$$47.\quad \begin{cases} p=\dfrac{Rp_1(1-2n\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)-2(n-1)R^2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{R(n-2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1}, \\ q=\dfrac{nRq_1(1-4\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2)}{(1-2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)\{R(n-2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1\}}; \end{cases}$$

oder

$$48.\quad \begin{cases} p=\dfrac{Rp_1(1-2n\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)-2(n-1)R^2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{R(n-2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1}, \\ q=\dfrac{nRq_1\cos\varphi}{R(n-2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2)+(n-1)p_1}; \end{cases}$$

und nach 47., wenn man $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend betrachtet,

$$49.\quad p=\frac{Rp_1}{nR+(n-1)p_1},\quad q=\frac{nRq_1}{nR+(n-1)p_1}.$$

Bezeichnet man den Werth, welchen p für $p_1=\infty$ erhält, durch f, so ist nach dem Vorhergehenden

$$50.\quad f=\frac{1-2n\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{n-1}R,$$

oder, wie man leicht findet,

$$51.\quad f=-\Big(1-\frac{n\cos\varphi}{n-1}\Big)R.$$

Betrachtet man $\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ als verschwindend, so wird nach 50.

$$52.\quad f=\frac{1}{n-1}R.$$

§. 3.

Nach 49. und 52. ist

$$p=\frac{Rp_1}{nR+(n-1)p_1},\quad f=\frac{1}{n-1}R;$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$\frac{p-f}{R}=-\frac{nR}{(n-1)\{nR+(n-1)p_1\}}.$$

Weil nun nach 39.

$$f_1=-\frac{n}{n-1}R$$

ist, so ist

$$\frac{p_1-f_1}{R}=\frac{nR+(n-1)p_1}{(n-1)R}.$$

Also ist

$$\frac{(p-f)(p_1-f_1)}{R^2}=-\frac{n}{(n-1)^2}$$

oder

$$53.\quad (p-f)(p_1-f_1)=-n\left(\frac{R}{n-1}\right)^2,$$

woraus sich ergiebt, dass das Product $(p-f)(p_1-f_1)$ eine constante Grösse ist.

Nach 32. ist ferner

$$\frac{q}{q_1}=n\frac{p}{p_1},$$

also

$$\frac{q}{q_1}=n\frac{f+(p-f)}{f_1+(p_1-f_1)},$$

und folglich, weil nach 52. und 39.

$$f=\frac{1}{n-1}R,\ f_1=-\frac{n}{n-1}R$$

ist,

$$\frac{q}{q_1}=-n\frac{1+(n-1)\frac{p-f}{R}}{n-(n-1)\frac{p_1-f_1}{R}}.$$

Schafft man nun die Nenner weg, so erhält man die Gleichung

$$n(q+q_1)=(n-1)\left(q\frac{p_1-f_1}{R}-nq_1\frac{p-f}{R}\right),$$

oder, wenn man quadrirt, die Gleichung

$$n^2(q+q_1)^2=(n-1)^2\left(q\frac{p_1-f_1}{R}-nq_1\frac{p-f}{R}\right)^2.$$

Weil nach 53.

$$n=-\frac{(n-1)^2(p-f)(p_1-f_1)}{R^2},$$

also

$$n^2=-\frac{n(n-1)^2(p-f)(p_1-f_1)}{R^2}$$

ist, so lässt sich die vorhergehende Gleichung auch unter der folgenden Form darstellen:

$$-n(p-f)(p_1-f_1)(q+q_1)^2=\{q(p_1-f_1)-nq_1(p-f)\}^2.$$

Entwickelt man nun die Quadrate der Binomialgrössen, so erhält man nach leichter Rechnung die Gleichung

$$\begin{aligned}0= &\ q^2(p_1-f_1)\{n(p-f)+p_1-f_1\}\\ &+nq_1{}^2(p-f)\{n(p-f)+p_1-f_1\},\end{aligned}$$

oder

$$q^2(p_1-f_1)=-nq_1{}^2(p-f);$$

und folglich

$$54.\quad \left(\frac{q}{q_1}\right)^2 = -n\frac{p-f}{p_1-f_1},$$

welches auch eine in mehrfacher Rücksicht merkwürdige Gleichung ist.

§. 4.

Wenn wir nun auch von jetzt an der Einfachheit und Kürze wegen bloss den Fall der Brechung in einem Linsenglase oder in einem Systeme von Linsengläsern in's Auge fassen werden; so kann, was wir hier gleich im Voraus bemerken, Alles, was im Folgenden vorkommen wird, doch auch ohne alle Schwierigkeit auf den Fall der Zurückwerfung von zwei oder mehreren Kugelflächen ausgedehnt werden, wenn man nur in den Formeln überall n negativ nimmt, oder bei der gewöhnlichen Ansicht der Zurückwerfung $n = -1$ setzt.

II.

Brechung in einem Linsenglase.

§. 5.

Die Durchschnittspunkte zweier Kreisbogen mit der durch ihre Mittelpunkte gehenden geraden Linie XY (Taf. II. Fig. 3.), welche wir ihre Axe nennen wollen, seien A, A_1, und E, E_1 seien die Entfernungen eines Punktes in der Axe von den beiden Punkten A, A_1, unter der Voraussetzung, dass E eine positive oder negative Grösse ist, jenachdem der in Rede stehende Punkt auf der convexen oder concaven Seite des die Axe in dem Punkte A schneidenden Kreisbogens liegt, und dass eben so E_1 eine positive oder eine negative Grösse ist, jenachdem der in Rede stehende Punkt auf der convexen oder concaven Seite des die Axe in dem Punkte A_1 schneidenden Kreisbogens liegt. Die immer als positiv betrachtete Entfernung der beiden Punkte A und A_1 von einander wollen wir durch D bezeichnen. Dies vorausgesetzt, sind nun die vier folgenden Fälle von einander zu unterscheiden.

Wenn die beiden Kreisbogen ihre concaven Seiten gegen einander kehren, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3^a. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E + E_1 = -D.$$

Wenn die beiden Kreisbogen ihre convexen Seiten gegen einander kehren, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3^b. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E + E_1 = D.$$

Wenn der die Axe in A schneidende Kreisbogen seine concave Seite gegen die convexe Seite des die Axe in A_1 schneidenden Kreisbogens kehrt, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3^c. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E - E_1 = -D.$$

Wenn der die Axe in A schneidende Kreisbogen seine con-

vexe Seite gegen die concave Seite des die Axe in A_1 schneidenden Kreisbogens kehrt, so ist, wie aus Taf. II. Fig. 3^d. leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit

$$E - E_1 = D.$$

Hieraus ergiebt sich überhaupt das folgende Resultat:

Wenn gleichnamige Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind, so ist

$$E + E_1 = \mp D,$$

und in dieser Gleichung ist das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die concaven oder die convexen Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind. Wenn ungleichnamige Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind, so ist

$$E - E_1 = \mp D,$$

und in dieser Gleichung ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die concave oder convexe Seite des die Axe in dem Punkte A schneidenden Kreisbogens respective der convexen oder concaven Seite des die Axe in dem Punkte A_1 schneidenden Kreisbogens zugekehrt ist.

Nehmen wir aber die Entfernung der Durchschnittspunkte der beiden Kreisbogen mit ihrer Axe von einander jetzt positiv oder negativ, jenachdem der die Axe in A schneidende Kreisbogen dem die Axe in A_1 schneidenden Kreisbogen seine convexe oder seine concave Seite zukehrt, und bezeichnen unter dieser Voraussetzung die in Rede stehende Entfernung wieder durch D, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar in völliger Allgemeinheit

$$E \pm E_1 = D,$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem die beiden Kreisbogen gleichnamige oder ungleichnamige Seiten einander zukehren.

§. 6.

Wir wollen uns nun Strahlen denken, welche, aus einem in Bezug auf A als Anfang der Coordinaten durch die Coordinaten p, q bestimmten Punkte (pq) ausgehend, nach der Brechung in dem die Axe in dem Punkte A schneidenden Kreisbogen, dessen Halbmesser R sein mag, sich in dem in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem durch die Coordinaten p', q' bestimmten Punkte $(p'q')$ mit einander vereinigen, und, nachdem sie eine zweite Brechung in dem die Axe in A_1 schneidenden Kreisbogen, dessen Halbmesser R_1 sein mag, erlitten haben, in dem in Bezug auf A_1 als Anfang der Coordinaten durch die Coordinaten p_1, q_1 bestimmten Punkte (p_1q_1) wieder mit einander zusammenkommen. Links von dem die Axe in A und rechts von dem die Axe in A_1 schneidenden Kreisbogen, wobei wir uns auf Taf. II. Fig. 3. beziehen, soll ein und dasselbe brechende Medium, zwischen den beiden Kreisbogen soll ein anderes brechendes Medium liegen, und das Brechungsverhältniss für das erste und zweite brechende Medium soll $n : 1$ sein. Die Coordinaten des Punktes, dessen Coordinaten in Bezug auf das Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte A vorher durch p', q'

bezeichnet worden sind, sollen in dem Coordinatensysteme mit dem Anfangspunkte A_1 durch p'_1, q'_1 bezeichnet werden.

Dies vorausgesetzt, haben wir nach 32. offenbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{R+p}{R+p'}=n\frac{p}{p'},\quad \frac{R_1+p_1}{R_1+p'_1}=n\frac{p_1}{p'_1},$$

zu denen nach dem vorigen Paragraphen noch die Gleichung

$$p'\pm p'_1=D$$

kommt, in welcher das obere oder das untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem gleichnamige oder ungleichnamige Seiten der beiden Kreisbogen einander zugekehrt sind. Aus diesen drei Gleichungen, die auch unter der Form

$$1+\frac{R}{p}=n(1+\frac{R}{p'}),$$

$$1+\frac{R_1}{p_1}=n(1+\frac{R_1}{p'_1}),$$

$$p'\pm p'_1=D$$

dargestellt werden können, lassen sich die beiden Grössen p' und p'_1 eliminiren, und dadurch eine Gleichung zwischen p und p_1 entwickeln, welche Entwickelung wir jetzt ausführen wollen.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$\frac{R}{p'}=\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})-1,\quad \frac{R_1}{p'_1}=\frac{1}{n}(1+\frac{R_1}{p_1})-1;$$

also

$$p'=\frac{R}{\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})-1},\quad p'_1=\frac{R_1}{\frac{1}{n}(1+\frac{R_1}{p_1})-1};$$

und folglich, wenn man diese Ausdrücke von p' und p'_1 in die dritte Gleichung einführt,

$$55.\quad \frac{R}{\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})-1}\pm\frac{R_1}{\frac{1}{n}(1+\frac{R_1}{p_1})-1}=D;$$

oder auch

$$56.\quad \frac{nRp}{R-(n-1)p}\pm\frac{nR_1p_1}{R_1-(n-1)p_1}=D;$$

oder auch, wie man leicht findet,

$$57.\quad \frac{1}{p_1}\pm\frac{1}{p}-(n-1)\left(\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R}\right)=\frac{D}{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{n-1}{R_1}\right)$$

oder

$$58.\quad \frac{1}{p}\pm\frac{1}{p_1}-(n-1)\left(\frac{1}{R}\pm\frac{1}{R_1}\right)=\pm\frac{D}{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{n-1}{R_1}\right).$$

Bestimmen wir mittelst der Gleichung 55. die Grösse p_1 durch p und die Grösse p durch p_1; so erhalten wir nach leichter Rechnung

$$59. \begin{cases} p_1 = \dfrac{R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}D}{(n-1)R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\} \ \{(n-1)D \pm nR_1\}} R_1, \\ p = \dfrac{R_1 \pm \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R_1}{p_1})\}D}{(n-1)R_1 \pm \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R_1}{p_1})\} \ \{(n-1)D + nR\}} R. \end{cases}$$

Wird nun der Werth, welchen p_1 für $p = \infty$ erhält, durch f_1, der Werth, welchen p für $p_1 = \infty$ erhält, durch f bezeichnet; so ist nach 59.

$$60. \begin{cases} f_1 = \dfrac{R + (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1)R + (1 - \frac{1}{n}) \ \{(n-1)D \pm nR_1\}} R_1, \\ f = \dfrac{R_1 \pm (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1)R_1 \pm (1 - \frac{1}{n}) \ \{(n-1)D + nR\}} R; \end{cases}$$

oder

$$61. \begin{cases} f_1 = \dfrac{R + (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ \{R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D\}} R_1, \\ f = \dfrac{R_1 \pm (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ \{R_1 \pm R \pm (1 - \frac{1}{n})D\}} R; \end{cases}$$

oder

$$62. \begin{cases} f_1 = \dfrac{R + (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ \{R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D\}} R_1, \\ f = \pm \dfrac{R_1 \pm (1 - \frac{1}{n})D}{(n-1) \ \{R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D\}} R; \end{cases}$$

Also ist

$$63. \quad f_1 \mp f = \frac{(1 - \frac{1}{n})D(R_1 \mp R)}{(n-1) \ \{R \pm R_1 + (1 - \frac{1}{n})D\}}$$

oder

$$64.\quad f \mp f_1 = \frac{(1-\frac{1}{n})D(R \mp R_1)}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}.$$

§. 7.

Nach 62. ist

$$p-f = p \mp \frac{R_1 \pm (1-\frac{1}{n})D}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}\,R,$$

und folglich, wenn man der Kürze wegen

$$Z = (n-1)p\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\} \mp R\,\{R_1 \pm (1-\frac{1}{n})D\}$$

setzt,

$$p-f = \frac{Z}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}.$$

Ferner ist nach 59. und 62.

$$p_1 - f_1 = \frac{R + \{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}D}{(n-1)\;R + \{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}\;\{(n-1)D \pm nR_1\}}\,R_1$$

$$-\frac{R + (1-\frac{1}{n})D}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}}\,R_1,$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$p_1 - f_1 = \pm \frac{R^2 R_1{}^2}{(n-1)\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}Z}.$$

Also ist offenbar

$$65.\quad (p-f)\,(p_1-f_1) = \pm \frac{R^2 R_1{}^2}{(n-1)^2\,\{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D\}^2}$$

oder

$$66.\quad (p-f)\,(p_1-f_1) = \pm \left\{\frac{RR_1}{(n-1)[R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D]}\right\}^2,$$

und das Product $(p-f)\,(p_1-f_1)$ ist daher jederzeit eine constante Grösse.

Für $D=0$, d. h. wenn man die Dicke der Linse als verschwindend betrachtet, ist

$$67.\quad (p-f)\,(p_1-f_1) = \pm \left\{\frac{RR_1}{(n-1)\,(R \pm R_1)}\right\}^2.$$

§. 8.

Nach 36. ist, wenn wir die in §. 6. eingeführten Bezeichnungen auch hier beibehalten,

$$q' = \frac{Rq}{R-(n-1)p},\quad q'_1 = \frac{R_1 q_1}{R_1-(n-1)p_1};$$

also, weil offenbar $q' = q'_1$ ist,

$$\frac{Rq}{R-(n-1)p} = \frac{R_1 q_1}{R_1-(n-1)p_1},$$

und folglich

$$68.\quad \frac{q}{q_1} = \frac{R_1}{R}\cdot\frac{R-(n-1)p}{R_1-(n-1)p_1} = \frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{1-(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

oder

$$\frac{q}{q_1} = \frac{1-(n-1)\frac{f}{R}-(n-1)\frac{p-f}{R}}{1-(n-1)\frac{f_1}{R_1}-(n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Nach 62. ist aber

$$1-(n-1)\frac{f}{R} = \frac{R}{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D},$$

$$1-(n-1)\frac{f_1}{R_1} = \pm\frac{R_1}{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = \frac{1}{R \pm R_1 + (1-\frac{1}{n})D}$$

setzen,

$$1-(n-1)\frac{f}{R} = KR,\quad 1-(n-1)\frac{f_1}{R_1} = \pm KR_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$69.\quad \frac{q}{q_1} = \pm\frac{KR-(n-1)\frac{p-f}{R}}{KR_1 \mp (n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Diese Gleichung bringt man leicht auf die Form

$$K(qR_1 \mp q_1 R) = \pm(n-1)\ (q\frac{p_1-f_1}{R_1} - q_1\frac{p-f}{R}),$$

oder, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, auf die Form

$$K^2(qR_1 \mp q_1 R)^2 = (n-1)^2\ (q\frac{p_1-f_1}{R_1} - q_1\frac{p-f}{R})^2.$$

Nun ist aber nach 66.

$$(p-f)(p_1-f_1)=\pm\frac{K^2R^2R_1^{\,2}}{(n-1)^2},$$

und folglich

$$K^2=\pm(n-1)^2\,\frac{(p-f)(p_1-f_1)}{R^2R_1^{\,2}},$$

welches, in die vorhergehende Gleichung eingeführt, die Gleichung

$$\pm(qR_1\mp q_1R)^2\,\frac{(p-f)(p_1-f_1)}{R^2R_1^{\,2}}=(q\,\frac{p_1-f_1}{R_1}-q_1\,\frac{p-f}{R})^2$$

giebt. Entwickelt man nun die Quadrate der Binomialgrössen, und hebt die gleichen Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auf; so erhält man die Gleichung

$$\pm q^2(p_1-f_1)\,(\frac{p-f}{R^2}\mp\frac{p_1-f_1}{R_1^{\,2}})$$

$$=q_1^{\,2}(p-f)\,(\frac{p-f}{R^2}\mp\frac{p_1-f_1}{R_1^{\,2}})$$

oder

$$q^2(p_1-f_1)=\pm q_1^{\,2}(p-f),$$

und folglich

$$\frac{q^2}{q_1^{\,2}}=\pm\frac{p-f}{p_1-f_1}$$

oder

$$70.\quad (\frac{q}{q_1})^2=\pm\frac{p-f}{p_1-f_1},$$

welches ebenfalls eine sehr merkwürdige Gleichung ist.

§. 9.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist

$$\frac{q}{q_1}=\frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{1-(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

und nach 59. ist, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$1-(n-1)\frac{p_1}{R_1}=\mp\frac{RR_1}{p}\cdot\frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{(n-1)R+\{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}\,\{(n-1)D\pm nR_1\}}.$$

Also ist

$$71.\quad \frac{q}{q_1}=\mp p\,\frac{(n-1)R+\{1-\frac{1}{n}(1+\frac{R}{p})\}\,\{(n-1)D\pm nR_1\}}{RR_1},$$

oder auch

[illegible] ungerührten [illegible]

[illegible]

$$\frac{f_4}{f'_4}=\frac{f_1+f_2(a_3+\frac{1}{a_4})}{f'_1+f'_2(a_3+\frac{1}{a_4})}=\frac{f_2+(f_1+f_2a_3)a_4}{f'_2+(f'_1+f'_2a_3)a_4}=\frac{f_2+f_3a_4}{f'_2+f'_3a_4},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier schon mit völliger Deutlichkeit, und es ist also

$$\begin{array}{ll} f_0=1, & f'_0=a_0; \\ f_1=a_1, & f'_1=1+a_0a_1; \\ f_2=f_0+f_1a_2, & f'_2=f'_0+f'_1a_2; \\ f_3=f_1+f_2a_3, & f'_3=f'_1+f'_2a_3; \\ f_4=f_2+f_3a_4, & f'_4=f'_2+f'_3a_4; \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Eine ähnliche Betrachtung wollen wir ferner auch über den zweiten der beiden obigen Kettenbrüche anstellen. Es ist offenbar

$$\frac{g_0}{g'_0}=\frac{1}{a_0}\ \text{und}\ \frac{g_1}{g'_1}=\frac{a_0}{1+a_0a_1}.$$

Also ist, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$\frac{g_2}{g'_2}=\frac{a_1+\frac{1}{a_0}}{1+(a_1+\frac{1}{a_0})a_2}=\frac{1+a_0a_1}{a_0+(1+a_0a_1)a_2}=\frac{g_0+g_1a_1}{g'_0+g'_1a_2}.$$

Folglich ist auf ähnliche Art

$$\frac{g_3}{g'_3}=\frac{1+(a_1+\frac{1}{a_0})a_2}{a_1+\frac{1}{a_0}+\{1+(a_1+\frac{1}{a_0})a_2\}a_3}$$

$$=\frac{a_0+(1+a_0a_1)a_2}{1+a_0a_1+\{a_0+(1+a_0a_1)a_2\}a_3}$$

$$=\frac{g_1+g_2a_2}{g'_1+g'_2a_3},$$

und hieraus ergiebt sich ferner

$$\frac{g_4}{g'_4}=\frac{a_1+\frac{1}{a_0}+\{1+(a_1+\frac{1}{a_0})a_2\}a_3}{1+(a_1+\frac{1}{a_0})a_2+\{a_1+\frac{1}{a_0}+(1+(a_1+\frac{1}{a_0})a_2)a_3\}a_4}$$

$$=\frac{1+a_0a_1+\{a_0+(1+a_0a_1)a_2\}a_3}{a_0+(1+a_0a_1)a_2+\{1+a_0a_1+(a_0+(1+a_0a_1)a_2)a_3\}a_4}$$

$$=\frac{g_2+g_3a_3}{g'_2+g'_3a_4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und auch das allgemeine Gesetz erhellet schon. Es ist nämlich

$$\frac{g_0}{g'_0} = \frac{1}{a_0},$$

$$\frac{g_1}{g'_1} = \frac{a_0}{1 + a_0 a_1},$$

$$\frac{g_2}{g'_2} = \frac{g_0 + g_1 a_2}{g'_0 + g'_1 a_2},$$

$$\frac{g_3}{g'_3} = \frac{g_1 + g_2 a_3}{g'_1 + g'_2 a_3},$$

$$\frac{g_4}{g'_4} = \frac{g_2 + g_3 a_4}{g'_2 + g'_3 a_4},$$

$$\frac{g_5}{g'_5} = \frac{g_3 + g_4 a_5}{g'_3 + g'_4 a_5},$$

u. s. w.

Dieses Gesetz kann leicht auf folgende Art allgemein bewiesen werden. Weil überhaupt

$$\frac{g_k}{g'_k} = \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}}$$

und

$$\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}} = \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}}}$$

ist, so wird offenbar

$$\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}} \text{ aus } \frac{g_k}{g'_k}$$

erhalten, wenn man in dem letztern Bruche $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für a_0 setzt, und alle übrigen Indices von a um eine Einheit erhöhet. Also wird offenbar g_{k+1} aus g_k und g'_{k+1} aus g'_k erhalten, wenn man $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für a_0 setzt, alle übrigen Indices von a um eine Einheit erhöhet, und die dadurch sich ergebenden Grössen dann mit a_0 multiplicirt. Sei nun

$$\frac{g_k}{g'_k} = \frac{g_{k-2} + g_{k-1} a_k}{g'_{k-2} + g'_{k-1} a_k}.$$

Um $\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}}$ zu erhalten, muss man $a_1 + \frac{1}{a_0}$ für a_0 setzen, alle übrigen Indices von a um eine Einheit erhöhen, und im Zähler und Nenner mit a_0 multipliciren, wodurch jede der Grössen g_{k-2}, g_{k-1} und g'_{k-2}, g'_{k-1} mit a_0 multiplicirt wird. Bei der Anwendung dieses Verfahrens gehen also die Grössen a_{k-1}, a_k respective in a_k, a_{k+1}, und nach dem Obigen gehen offenbar g_{k-2}, g_{k-1} re-

spective in g_{k-1}, g_k, so wie g'_{k-2}, g'_{k-1} respective in g'_{k-1}, g'_k über. Also ist offenbar

$$\frac{g_{k+1}}{g'_{k+1}} = \frac{g_{k-1} + g_k a_k}{g'_{k-1} + g'_k a_{k+1}},$$

und das bemerkte Gesetz ist nach einer bekannten Schlussweise folglich allgemein.

Es ist also

$$\begin{array}{ll}
g_0 = 1, & g'_0 = a_0;\\
g_1 = a_0, & g'_1 = 1 + a_0 a_1;\\
g_2 = g_0 + g_1 a_1, & g'_2 = g'_0 + g'_1 a_2;\\
g_3 = g_1 + g_2 a_2, & g'_3 = g'_1 + g'_2 a_3;\\
g_4 = g_2 + g_3 a_3, & g'_4 = g'_2 + g'_3 a_4;\\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w.}
\end{array}$$

Vergleicht man diese Zähler und Nenner mit den oben gefundenen Zählern und Nennern der Partialbrüche des ersten Kettenbruchs, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
g_0 &= 1,\\
g_1 &= f'_0,\\
g_2 &= g_0 + g_1 a_1 = 1 + a_0 a_1 = f'_1,\\
g_3 &= g_1 + g_2 a_2 = f'_0 + f'_1 a_2 = f'_2,\\
g_4 &= g_2 + g_3 a_3 = f'_1 + f'_2 a_3 = f'_3,\\
g_5 &= g_3 + g_4 a_4 = f'_2 + f'_3 a_4 = f'_4,
\end{aligned}$$

u. s. w.

und

$$\begin{aligned}
g'_0 &= f'_0,\\
g'_1 &= 1 + a_0 a_1 = f'_1,\\
g'_2 &= g'_0 + g'_1 a_2 = f'_0 + f'_1 a_2 = f'_2,\\
g'_3 &= g'_1 + g'_2 a_3 = f'_1 + f'_2 a_3 = f'_3,\\
g'_4 &= g'_2 + g'_3 a_4 = f'_2 + f'_3 a_4 = f'_4,\\
g'_5 &= g'_3 + g'_4 a_5 = f'_3 + f'_4 a_5 = f'_5,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Hiernach hat man also auch die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
g'_0 &= f'_0 = g_1,\\
g'_1 &= f'_1 = g_2,\\
g'_2 &= f'_2 = g_3,\\
g'_3 &= f'_3 = g_4,\\
g'_4 &= f'_4 = g_5,\\
g'_5 &= f'_5 = g_6,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Ueberhaupt wollen wir jetzt

$$p_i = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{q_i}}}}}}}$$

setzen.

Also ist zuerst

$$p_0 = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{q_0}} = \frac{q_0}{1 + a_0 q_0}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{f_0}{f'_0} = \frac{1}{a_0}, \quad \frac{g_0}{g'_0} = \frac{1}{a_0};$$

also

$$p_0 - \frac{f_0}{f'_0} = \frac{q_0}{1 + a_0 q_0} - \frac{1}{a_0} = -\frac{1}{a_0(1 + a_0 q_0)},$$

$$q_0 + \frac{g_0}{g'_0} = \quad q_0 + \frac{1}{a_0} = \frac{1 + a_0 q_0}{a_0};$$

und folglich

$$(p_0 - \frac{f_0}{f'_0})(q_0 + \frac{g_0}{g'_0}) = -(\frac{1}{a_0})^2.$$

Ferner ist

$$p_1 = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{q_1}}} = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{q_1}{1 + a_1 q_1}}$$

d. i.

$$p_1 = \frac{1 + a_1 q_1}{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{f_1}{f'_1} = \frac{a_1}{1 + a_0 a_1}, \quad \frac{g_1}{g'_1} = \frac{a_0}{1 + a_0 a};$$

und folglich, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$p_1 - \frac{f_1}{f'_1} = \frac{1}{(1 + a_0 a_1)\{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1\}},$$

$$q_1 + \frac{g_1}{g'_1} = \frac{a_0 + (1 + a_0 a_1) q_1}{1 + a_0 a_1}.$$

Daher ist

$$(p_1 - \frac{f_1}{f'_1})(q_1 + \frac{g_1}{g'_1}) = (\frac{1}{1 + a_0 a_1})^2.$$

Man sieht also, dass die Producte

$$(p_0 - \frac{f_0}{f'_0})\ (q_0 + \frac{g_0}{g'_0}),$$

$$(p_1 - \frac{f_1}{f'_1})\ (q_1 + \frac{g_1}{g'_1})$$

respective von p_0, q_0 und p_1, q_1 ganz unabhängig sind.

Um die Allgemeinheit dieses Gesetzes zu prüfen, wollen wir jetzt

$$(p_0 - \frac{f_0}{f'_0})\ (q_0 + \frac{g_0}{g'_0}) = L_0,$$

$$(p_1 - \frac{f_1}{f'_1})\ (q_1 + \frac{g_1}{g'_1}) = L_1,$$

$$(p_2 - \frac{f_2}{f'_2})\ (q_2 + \frac{g_2}{g'_2}) = L_2,$$

u. s. w.

$$(p_{k-1} - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\ (q_{k-1} + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}) = L_{k-1}$$

setzen, und wollen annehmen, dass die Grössen

$$L_0,\ L_1,\ L_2,\ L_3, \ldots L_{k-1}$$

respective von

$$p_0,\ q_0;\ p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2;\ p_3,\ q_3; \ldots p_{k-1},\ q_{k-1}$$

ganz unabhängig sind.

Weil nun

$$p_{k-1} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{q_{k-1}}$$

und

$$p_k = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{q_k}$$

ist, so ist wegen der Gleichung

$$(p_{k-1} - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\ (q_{k-1} + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}) = L_{k-1},$$

wo L_{k-1} von p_{k-1} und q_{k-1} ganz unabhängig ist, deren Richtigkeit vorausgesetzt worden ist, offenbar

$$(p_k - \frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\ (a_k + \frac{1}{q_k} + \frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}) = L_{k-1}.$$

Weil aber

$$\frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}=\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k-2}}+\ldots+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_0}$$

ist, so ist

$$a_k+\frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}=a_k+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k-2}}+\ldots+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_0}$$

und folglich, weil

$$\frac{g_k}{g'_k}=\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_{k-2}}+\ldots+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_0}$$

ist,

$$a_k+\frac{g_{k-1}}{g'_{k-1}}=\frac{g'_k}{g_k}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\left(p_k-\frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}}\right)\left(\frac{1}{q_k}+\frac{g'_k}{g_k}\right)=L_{k-1},$$

d. i.

$$\frac{\left(p_k-\frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}}\right)\left(q_k+\frac{g_k}{g'_k}\right)}{q_k\frac{g_k}{g'_k}}=L_{k-1}.$$

Nun ist aber nach den aus dem Obigen bekannten Relationen

$$p_k-\frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}}=\frac{f_{k-1}+f_kq_k}{f'_{k-1}+f'_kq_k}-\frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}}$$

$$=-\frac{(f_{k-1}f'_k-f_kf'_{k-1})q_k}{f'_{k-1}(f'_{k-1}+f'_kq_k)},$$

$$p_k-\frac{f_k}{f'_k}=\frac{f_{k-1}+f_kq_k}{f'_{k-1}+f'_kq_k}-\frac{f_k}{f'_k}$$

$$=\frac{f_{k-1}f'_k-f_kf'_{k-1}}{f'_k(f'_{k-1}+f'_kq_k)},$$

und folglich offenbar

$$\frac{p_k-\frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}}}{q_k}=-\frac{f'_k}{f'_{k-1}}\left(p_k-\frac{f_k}{f'_k}\right).$$

Führt man dies in die oben gefundene Gleichung

$$\frac{(p_k-\frac{f_{k-1}}{f'_{k-1}})\,(q_k+\frac{g_k}{g'_k})}{q_k\frac{g_k}{g'_k}}=L_{k-1}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$-\frac{f'_kg'_k}{f'_{k-1}g_k}\,(p_k-\frac{f_k}{f'_k})\,(q_k+\frac{g_k}{g'_k})=L_{k-1},$$

also

$$(p_k-\frac{f_k}{f'_k})\,(q_k+\frac{g_k}{g'_k})=-\frac{f'_{k-1}g_k}{f'_kg'_k}\,L_{k-1},$$

woraus man sieht, dass

$$(p_k-\frac{f_k}{f'_k})\,(q_k+\frac{g_k}{g'_k})$$

von p_k, q_k ganz unabhängig, und nach einer bekannten Schlussweise das oben bemerkte Gesetz also ganz allgemein gültig, d. h. das Product

$$(p_k-\frac{f_k}{f'_k})\,(q_k+\frac{g_k}{g'_k})$$

immer von p_k und q_k ganz unabhängig ist.

Setzen wir, analog mit der oben eingeführten Bezeichnung,

$$(p_k-\frac{f_k}{f'_k})\,(q_k+\frac{g_k}{g'_k})=L_k,$$

so erhalten wir nach dem Vorhergehenden die Relation:

$$77.\quad L_k=-\frac{f'_{k-1}g_k}{f'_kg'_k}\,L_{k-1}.$$

Hiernach und nach dem Obigen ist

$$L_0=-(\frac{1}{a_0})^2=-\frac{g_0}{f'_0g'_0},$$

$$L_1=-\frac{f'_0g_1}{f'_1g'_1}\,L_0=\frac{g_0}{f'_0g'_0}\cdot\frac{f'_0g_1}{f'_1g'_1},$$

$$L_2=-\frac{f'_1g_2}{f'_2g'_2}\,L_1=-\frac{g_0}{f'_0g'_0}\cdot\frac{f'_0g_1}{f'_1g'_1}\cdot\frac{f'_1g_2}{f'_2g'_2},$$

$$L_3=-\frac{f'_2g_3}{f'_3g'_3}\,L_2=\frac{g_0}{f'_0g'_0}\cdot\frac{f'_0g_1}{f'_1g'_1}\cdot\frac{f'_1g_2}{f'_2g'_2}\cdot\frac{f'_2g_3}{f'_3g'_3},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist also allgemein

$$L_k=(-1)^{k-1}\cdot\frac{g_0}{f'_0g'_0}\cdot\frac{f'_0g_1}{f'_1g'_1}\cdot\frac{f'_1g_2}{f'_2g'_2}\cdots\frac{f'_{k-2}g_{k-1}}{f'_{k-1}g'_{k-1}}\cdot\frac{f'_{k-1}g_k}{f'_kg'_k},$$

d. i.

$$78.\quad L_k=\frac{(-1)^{k-1}}{f'_k}\cdot\frac{g_0g_1g_2g_3\ldots g_{k-1}g_k}{g'_0g'_1g'_2g'_3\ldots g'_{k-1}g'_k}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$g'_0 = g_1,$$
$$g'_1 = g_2,$$
$$g'_2 = g_3,$$
u. s. w.
$$g'_{k-1} = g_k$$

und $g'_k = f'_k$. Also ist nach 78.

$$L_k = \frac{(-1)^{k-1}}{f_k} \cdot \frac{g_0}{f'_k} = \frac{(-1)^{k-1}}{g_k} \cdot \frac{g_0}{g'_k},$$

und folglich, weil nach dem Obigen $g_0 = 1$, $g'_k = g_{k+1}$ ist,

$$79. \quad L_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(f'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g_{k+1})^2}.$$

Wir haben daher die folgenden merkwürdigen Gleichungen:

$$80. \quad (p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k}) = \frac{(-1)^{k-1}}{(f'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g'_k)^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(g_{k+1})^2},$$

oder

$$81. \quad (-1)^{k-1}\ (p_k - \frac{f_k}{f'_k})\ (q_k + \frac{g_k}{g'_k}) = (\frac{1}{f'_k})^2 = (\frac{1}{g'_k})^2 = (\frac{1}{g_{k+1}})^2,$$

von denen wir nachher eine wichtige Anwendung auf die Brechung in einem Systeme von Linsengläsern machen werden.

§. 11.

Die erste der beiden Gleichungen 59. kann auf folgende Art dargestellt werden:

$$\frac{R_1}{p_1} = \frac{(n-1)R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}\ \{(n-1)D \pm nR_1\}}{R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}D}$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$\frac{R_1}{p_1} = n - 1 \pm \frac{n\{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}R_1}{R + \{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})\}D}$$

$$= n - 1 \pm \frac{nR_1}{D + \frac{R}{1 - \frac{1}{n}(1 + \frac{R}{p})}}$$

$$= n - 1 \pm \frac{nR_1}{D + \frac{nR}{n - 1 - \frac{R}{p}}}$$

$$= n - 1 \pm \cfrac{R_1}{\cfrac{D}{n} + \cfrac{R}{n - 1 - \cfrac{R}{p}}}$$

$$= n - 1 \pm \cfrac{R_1}{\cfrac{D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} - \cfrac{1}{p}}},$$

also

$$\frac{1}{p_1} = \frac{n-1}{R_1} \pm \cfrac{1}{\cfrac{D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} - \cfrac{1}{p}}}$$

oder

$$82. \quad p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} \pm \cfrac{1}{\cfrac{D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} - \cfrac{1}{p}}}}$$

und in dieser Gleichung ist das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem gleichnamige oder ungleichnamige Seiten der beiden im Obigen betrachteten Kreisbogen gegen einander gekehrt sind. Aber eben dieses doppelte Zeichen. welches bei der Betrachtung bloss zweier Kreisbogen oder eines Linsenglases uns keine grosse Unbequemlichkeit verursachte, vielmehr, wie es uns scheint, den zwischen den sogenannten doppelt-concaven und doppelt-convexen Gläsern und den sogenannten Menisken Statt findenden Unterschied recht deutlich herausstellte, weshalb auch vorzüglich bei einem Linsenglase die vorhergehende Betrachtungsweise von uns angewandt worden ist. führt bei der Betrachtung eines Systems von Linsengläsern grosse Unbequemlichkeiten herbei, und wir müssen uns daher jetzt von diesem doppelten Zeichen unabhängig zu machen suchen, was auf folgende Art geschehen kann.

Im Vorhergehenden wurden die Halbmesser R und R_1 immer als positiv betrachtet, was auch auf den ersten Anblick allerdings das Natürlichste zu sein scheint; die sogenannte Dicke des Glases D wurde dagegen als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der erste Kreisbogen dem zweiten seine convexe oder seine concave Seite zukehrt; die Grösse p ist positiv oder negativ, jenachdem die ihr entsprechende Linie auf der convexen oder concaven Seite des ersten Kreisbogens liegt. und eben so ist die Grösse p_1 positiv oder negativ, jenachdem die ihr entsprechende Linie auf der convexen oder concaven Seite des zweiten Kreisbogens liegt.

Von jetzt an wollen wir die Dicke des Glases immer als positiv betrachten, und unter dieser Voraussetzung durch D bezeichnen; die Halbmesser der beiden Gränzflächen des Glases wollen wir dagegen als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem sie von den Durchschnittspunkten der entsprechenden Gränzflächen mit der Axe an nach der innern oder äussern Seite des Glases hin

liegen, und wollen dieselben unter dieser Voraussetzung durch R und R_1 bezeichnen; auf ähnliche Art sollen die Abscissen p und p_1 positiv oder negativ sein, jenachdem die ihnen entsprechenden Linien von den Durchschnittspunkten der ersten und zweiten Gränzfläche des Glases mit der Axe an nach der innern oder äussern Seite des Glases hin liegen. Die Symbole q und q_1 behalten auch jetzt ganz die ihnen oben beigelegte Bedeutung.

Dies vorausgesetzt, muss man nun, wenn die concaven Seiten der beiden Gränzflächen einander zugekehrt sind, in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$-D,\ R,\ R_1,\ -p,\ -p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in der man jetzt das obere Zeichen nehmen muss, folgende Gestalt erhält:

$$-p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}}.$$

Wenn die convexen Seiten der beiden Gränzflächen einander zugekehrt sind, so muss man in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$D,\ -R,\ -R_1,\ p,\ p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in der jetzt wieder das obere Zeichen genommen werden muss, die folgende Gestalt erhält:

$$p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{-R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{-R} - \cfrac{1}{p}}}}.$$

Mittelst einer einfachen Betrachtung überzeugt man sich aber sogleich, dass diese Gleichung immer auf die Form

$$-p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}},$$

welche von der Form, auf welche wir im ersten Falle geführt wurden, nicht verschieden ist, gebracht werden kann.

Wenn die concave Seite der ersten Gränzfläche der convexen Seite der zweiten Gränzfläche zugekehrt ist, so muss man in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$-D,\ R,\ -R_1,\ -p,\ p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in welcher jetzt das untere Zeichen zu nehmen ist, die folgende Gestalt erhält:

$$p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{-R_1} - \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}},$$

woraus sich aber mittelst einer ganz einfachen Betrachtung wieder

$$-p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}}$$

ergiebt.

Wenn endlich die convexe Seite der ersten Gränzfläche der concaven Seite der zweiten Gränzfläche zugekehrt ist, so muss man in der Gleichung 82. statt der Symbole

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

offenbar respective

$$D,\ -R,\ R_1,\ p,\ -p_1$$

setzen, wodurch die in Rede stehende Gleichung, in welcher jetzt das untere Zeichen zu nehmen ist, die folgende Gestalt erhält:

$$-p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} - \cfrac{1}{\cfrac{D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{-R} - \cfrac{1}{p}}}},$$

woraus sich aber mittelst einer ganz einfachen Betrachtung wieder

$$-p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}}$$

ergiebt.

Daher ist unter den gemachten Voraussetzungen in völliger Allgemeinheit

$$83. \quad -p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}}.$$

in welcher Gleichung also nun kein doppeltes Zeichen mehr vorkommt, was für das Folgende der Allgemeinheit und Einfachheit der Darstellung wegen von grosser Wichtigkeit ist.

Mittelst leichter Rechnung erhält man aus 83. die folgende ebenfalls ganz allgemein gültige Gleichung:

$$84. \quad -p = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{p_1}}}},$$

wobei man sogleich übersehen wird, dass dieser Kettenbruch gewissermassen durch Umkehrung des vorhergehenden entsteht.

§. 12.

Wenn zwei Kreisbogen ihre Axe in den Punkten A und A_1 schneiden, die immer als positiv betrachtete Entfernung der beiden Punkte A und A_1 von einander durch D bezeichnet wird, und wir die, jenachdem sie von den Punkten A und A_1 aus nach dem innern Raume zwischen den beiden in Rede stehenden Kreisbogen oder nach dem äussern Raume hin liegen, als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen eines Punktes in der Axe von den beiden Punkten A und A_1 respective durch E und E_1 bezeichnen; so ist in völliger Allgemeinheit

$$E + E_1 = D,$$

wovon man sich durch eine ganz einfache Betrachtung auf der Stelle überzeugt.

§. 13.

Wir wollen uns jetzt ein System von $i+1$ Gläsern denken, und wollen annehmen, dass die Mittelpunkte der Gränzflächen aller dieser Gläser in einer und derselben geraden Linie liegen, welche die Axe des Systems genannt werden kann. Die Halbmesser der Gränzflächen der einzelnen Gläser seien nach der Reihe

$$R, R_1;\ R^{(1)}, R_1^{(1)};\ R^{(2)}, R_1^{(2)};\ldots;\ R^{(i)}, R_1^{(i)};$$

so dass

$$R, R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, \ldots R^{(i)}$$

die Halbmesser der vordern Gränzflächen, dagegen

$$R_1, R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_1^{(3)}, \ldots R_1^{(i)}$$

die Halbmesser der hintern Gränzflächen sind, wobei man nicht zu

übersehen hat, dass diese Halbmesser nach den in §. 11. gegebenen Bestimmungen positiv oder negativ genommen werden. Die immer als positiv betrachteten Dicken der Gläser nach der Reihe seien

$$D,\ D^{(1)},\ D^{(2)},\ D^{(3)}, \ldots D^{(i)}$$

und die Brechungsverhältnisse für die Glasarten, aus denen die Gläser bestehen, seien

$$n:1,\ n^{(1)}:1,\ n^{(2)}:1,\ n^{(3)}:1, \ldots,\ n^{()}:1.$$

Die Coordinaten der Vereinigungspunkte der Strahlen seien für die einzelnen Gläser nach der Reihe

$$\begin{array}{l} p,\quad q;\ p_1,\quad q_1 \\ p^{(1)},\ q^{(1)};\ p_1^{(1)},\ q_1^{(1)} \\ p^{(2)},\ q^{(2)};\ p_1^{(2)},\ q_1^{(2)} \\ p^{(3)},\ q^{(3)};\ p_1^{(3)},\ q_1^{(3)} \\ \text{u. s. w.} \\ p^{(i)},\ q^{(i)};\ p_1^{(i)},\ q_1^{(i)}. \end{array}$$

Die sämmtlich als positiv betrachteten Entfernungen der Gläser von einander, welche von der hintern Fläche eines jeden Glases bis zu der vordern Fläche des nächst folgenden Glases genommen werden, seien nach der Reihe

$$E,\ E^{(1)},\ E^{(2)},\ E^{(3)}, \ldots E^{(i-1)}.$$

Dies vorausgesetzt, hat man nun nach 83. offenbar die folgenden Gleichungen:

$$-p_1 = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}},$$

$$-p_1^{(1)} = \cfrac{1}{\cfrac{n^{(1)}-1}{R_1^{(1)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(1)}}{n^{(1)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(1)}-1}{R^{(1)}} + \cfrac{1}{p^{(1)}}}}},$$

$$-p_1^{(2)} = \cfrac{1}{\cfrac{n^{(2)}-1}{R_1^{(2)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(2)}}{n^{(2)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(2)}-1}{R^{(2)}} + \cfrac{1}{p^{(2)}}}}},$$

u. s. w.

$$-p_1^{(i)} = \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R_1^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(i)}}{n^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}} + \cfrac{1}{p^{(i)}}}}};$$

und nach §. 12. hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$-p_1 - p^{(1)} = E;$$
$$-p_1^{(1)} - p^{(2)} = E^{(1)},$$
$$-p_1^{(2)} - p^{(3)} = E^{(2)},$$
$$-p_1^{(3)} - p^{(4)} = E^{(3)},$$

u. s. w.

$$-p_1^{(i-1)} - p^{(i)} = E^{(i-1)}$$

oder

$$p^{(1)} = -E - p_1,$$
$$p^{(2)} = -E^{(1)} - p_1^{(1)},$$
$$p^{(3)} = -E^{(2)} - p_1^{(2)},$$
$$p^{(4)} = -E^{(3)} - p_1^{(3)},$$

u. s. w.

$$p^{(i)} = -E^{(i-1)} - p_1^{(i-1)}.$$

Mittelst dieser Gleichungen und der obigen Kettenbrüche lässt sich offenbar die Grösse $-p_1^{(i)}$ ohne alle Schwierigkeit ganz allgemein mit Hülfe eines Kettenbruchs, dessen Fortschreitungsgesetz sehr leicht zu übersehen ist, durch die Grösse p ausdrücken. Es ist nämlich offenbar in völliger Allgemeinheit, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$85.\quad -p_1^{(i)} = \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R_1^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(i)}}{n^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}} + \cfrac{1}{-E^{(i-1)} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i-1)}-1}{R_1^{(i-1)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(i-1)}}{n^{(i-1)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i-1)}-1}{R^{(i-1)}} + \cfrac{1}{-E^{(i-2)} + \cdots}}}}}}}}$$

$$\cdots + \cfrac{1}{-E + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{p}}}}}.$$

Auf ganz ähnliche Art ist

$$86.\quad -p = \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R} + \cfrac{1}{\cfrac{-D}{n} + \cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1} + \cfrac{1}{-E + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(1)}-1}{R^{(1)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(1)}}{n^{(1)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(1)}-1}{R_1{}^{(1)}} + \cfrac{1}{-E^{(1)} + \dots}}}}}}}}$$

$$\dots + \cfrac{1}{-E^{(i-1)} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{-D^{(i)}}{n^{(i)}} + \cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R_1{}^{(i)}} + \cfrac{1}{p_1{}^{(i)}}}}}}.$$

Bezeichnet man den Werth, welchen $p_1^{(i)}$ erhält, wenn p unendlich wird, durch $f_1^{(i)}$, so ist nach 85.

$$87.\quad -f_1^{(i)} = \frac{1}{\frac{n^{(i)}-1}{R_1^{(i)}}} + \frac{1}{\frac{-D^{(i)}}{n^{(i)}}} + \frac{1}{\frac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}}} + \frac{1}{-E^{(i-1)}} + \frac{1}{\frac{n^{(i-1)}-1}{R_1^{(i-1)}}} + \frac{1}{\frac{-D^{(i-1)}}{n^{(i-1)}}} + \frac{1}{\frac{n^{(i-1)}-1}{R^{(i-1)}}} + \frac{1}{-E^{(i-2)}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{-E} + \frac{1}{\frac{n-1}{R_1}} + \frac{1}{\frac{-D}{n}} + \frac{1}{\frac{n-1}{R}}$$

und wenn man den Werth, welchen p erhält, wenn $p_1^{(i)}$ unendlich wird, durch f bezeichnet, so ist nach 86.

$$88.\quad -f=\cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R}+\cfrac{1}{\cfrac{-D}{n}+\cfrac{1}{\cfrac{n-1}{R_1}+\cfrac{1}{-E+\cfrac{1}{\cfrac{n^{(1)}-1}{R^{(1)}}+\cfrac{1}{\cfrac{-D^{(1)}}{n^{(1)}}+\cfrac{1}{\cfrac{n^{(1)}-1}{R_1^{(1)}}+\cfrac{1}{-E^{(1)}+\dots}}}}}}}}$$

$$\dots+\cfrac{1}{-E^{(i-1)}+\cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R^{(i)}}+\cfrac{1}{\cfrac{-D^{(i)}}{n^{(i)}}+\cfrac{1}{\cfrac{n^{(i)}-1}{R_1^{(i)}}}}}}.$$

§. 14.

Die Kettenbrüche 87. und 88. bestehen offenbar aus $3(i+1)+i = 4i+3$ Gliedern. Bezeichnen wir nun den gemeinschaftlichen Nenner der den beiden in Rede stehenden Kettenbrüchen gleichen gemeinen Brüche, welche man durch successive Berechnung der Partialwerthe dieser beiden Kettenbrüche nach bekannten Regeln erhält, durch N_i; so ist nach dem in §. 10. bewiesenen, in der Gleichung 81. ausgesprochenen allgemeinen Satze von den Kettenbrüchen, wenn man denselben auf die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Kettenbrüche insbesondere und zunächst auf den Kettenbruch 86. anwendet, offenbar

$$(-1)^{4i+1}\{-p-(-f)\}\{p_1{}^{(i)}+(-f_1{}^{(i)})\}=\left(\frac{1}{N_i}\right)^2,$$

und folglich, wie sogleich erhellet,

$$89.\quad (p-f)(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})=\left(\frac{1}{N_i}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich also der sehr merkwürdige Satz, dass, was auch p und $p_1{}^{(i)}$ sein mögen, das Product

$$(p-f)(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})$$

immer dem constanten Quadrate $\left(\frac{1}{N_i}\right)^2$ gleich ist.

§. 15.

Aus der in §. 11. angestellten Betrachtung erhellet, dass man in der Gleichung 68. statt der Symbole

$$R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

eins der vier folgenden Systeme setzen muss:

$$\begin{array}{rrrr} R, & R_1, & -p, & -p_1; \\ -R, & -R_1, & p, & p_1; \\ R, & -R_1, & -p, & p_1; \\ -R, & R_1, & p, & -p_1. \end{array}$$

Thut man dies aber, so ergiebt sich in jedem Falle die Gleichung

$$90.\quad \frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

welche also allgemein gültig ist.

Daher hat man jetzt die folgenden Gleichungen:

$$\frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

$$\frac{q^{(1)}}{q_1^{(1)}} = \frac{1+(n^{(1)}-1)\frac{p^{(1)}}{R^{(1)}}}{1+(n^{(1)}-1)\frac{p_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}},$$

$$\frac{q^{(2)}}{q_1^{(2)}} = \frac{1+(n^{(2)}-1)\frac{p^{(2)}}{R^{(2)}}}{1+(n^{(2)}-1)\frac{p_1^{(2)}}{R_1^{(2)}}},$$

u. s. w.

$$\frac{q^{(i)}}{q_1^{(i)}} = \frac{1+(n^{(i)}-1)\frac{p^{(i)}}{R^{(i)}}}{1+(n^{(i)}-1)\frac{p_1^{(i)}}{R_1^{(i)}}}.$$

Weil nun aber offenbar

$$q_1 = q^{(1)},$$

$$q_1^{(1)} = q^{(2)},$$

$$q_1^{(2)} = q^{(3)},$$

u. s. w.

$$q_1^{(i-1)} = q^{(i)}$$

ist; so erhält man aus dem Obigen die folgende merkwürdige Gleichung:

$$91. \quad \frac{q}{q_1^{(i)}} = \frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}} \cdot \frac{1+(n^{(1)}-1)\frac{p^{(1)}}{R^{(1)}}}{1+(n^{(1)}-1)\frac{p_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}} \cdot \frac{1+(n^{(2)}-1)\frac{p^{(2)}}{R^{(2)}}}{1+(n^{(2)}-1)\frac{p_1^{(2)}}{R_1^{(2)}}} \cdots$$

$$\cdots \frac{1+(n^{(i)}-1)\frac{p^{(i)}}{R^{(i)}}}{1+(n^{(i)}-1)\frac{p_1^{(i)}}{R_1^{(i)}}}.$$

Mittelst der in §. 13. entwickelten Formeln kann man, wenn p als gegeben betrachtet wird, die Grössen

$$p_1,\ p^{(1)},\ p_1^{(1)},\ p^{(2)},\ p_1^{(2)},\ \ldots p^{(i)},\ p_1^{(i)}$$

sämmtlich berechnen, und kann also mit Hülfe der vorhergehenden Gleichung auch das Verhältniss $\frac{q}{q_1^{(i)}}$ bestimmen. Dass auch $p_1^{(i)}$ als gegeben angenommen werden könnte, bedarf kaum noch einer besondern Bemerkung.

§. 16.

Zu dem Systeme von $i+1$ Gläsern, welches wir vorher betrachtet haben, wollen wir jetzt noch ein $(i+2)$tes Glas hinzufügen, dessen auf ähnliche Art wie im Vorhergehenden genommene Entfernung von dem $(i+1)$sten Glase durch $E^{(i)}$ bezeichnet werden soll. In Bezug auf das $(i+2)$te Glas, wenn man dieses Glas für sich allein als ein System von Gläsern betrachtet, und in Be-

zug auf das ganze System der $i+2$ Gläser, sollen respective $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ und φ, $\varphi_1^{(i+1)}$ eine ganz ähnliche Bedeutung haben wie f, $f_1^{(i)}$ in Bezug auf das System der $i+1$ Gläser. Von dem strahlenden Punkte A, dessen Coordinaten in Bezug auf die vordere Fläche des ersten Glases p, q sein mögen, entstehe nun durch das System der $i+1$ Gläser ein Bild B, dessen Coordinaten in Bezug auf die hintere Fläche des $(i+1)$sten Glases $p_1^{(i)}$, $q_1^{(i)}$ sein mögen, und von diesem Bilde B entstehe durch das $(i+2)$te Glas ein neues Bild C, welches zugleich als das von dem Systeme der $i+2$ Gläser von dem Punkte A gemachte Bild zu betrachten ist. Die Coordinaten von B in Bezug auf die vordere Fläche des $(i+2)$ten Glases seien $p^{(i+1)}$, $q^{(i+1)}$, und die Coordinaten von C in Bezug auf die hintere Fläche des $(i+2)$ten Glases seien $p_1^{(i+1)}$, $q_1^{(i+1)}$.

Dies vorausgesetzt ist nun nach §. 14., wenn μ^2 und μ_1^2 zwei constante Quadrate bezeichnen,

$$92.\quad (p-f)\,(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})=\mu^2$$

und

$$93.\quad (p^{(i+1)}-\mathfrak{f})\,(p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)=\mu_1^2.$$

Für $p=\varphi$ wird offenbar $p_1^{(i+1)}$ unendlich, und daher, wie leicht erhellen wird,

$$-p_1^{(i)}-\mathfrak{f}=E^{(i)},$$

also

$$p_1^{(i)}=-E^{(i)}-\mathfrak{f};$$

folglich nach 92.

$$94.\quad -(\varphi-f)\,(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=\mu^2.$$

Wenn man p unendlich werden lässt, so wird offenbar

$$p_1^{(i+1)}=\varphi_1^{(i+1)},$$

und, wie sogleich erhellen wird,

$$-p^{(i+1)}-f_1^{(i)}=E^{(i)},$$

also

$$p^{(i+1)}=-E^{(i)}-f_1^{(i)};$$

folglich nach 93.

$$95.\quad -(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})\,(\varphi_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)=\mu_1^2.$$

Daher hat man nach 92. und 94., und nach 93. und 95., die beiden folgenden Gleichungen:

$$(p-f)\,(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})=-(\varphi-f)\,(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}),$$

$$(p^{(i+1)}-\mathfrak{f})\,(p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)=-(\varphi_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)\,(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)}).$$

Schreibt man diese beiden Gleichungen als Proportionen, so erhält man:

$$p-f:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=\varphi-f:p_1^{(i)}-f_1^{(i)},$$

$$p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=\varphi_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1:p^{(i+1)}-\mathfrak{f};$$

und aus diesen beiden Proportionen ergiebt sich nach einem bekannten Satze von den Proportionen:

$$p-f:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=p-\varphi:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+p_1^{(i)}),$$

$$p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=p_1^{(i+1)}-\varphi_1^{(i+1)}:-(E^{(i)}+f_1^{(i)}+p^{(i+1)}).$$

Weil nun aber offenbar

$$-p_1^{(i)}-p^{(i+1)}=E^{(i)},$$

also

$$E^{(i)}+p_1^{(i)}=-p^{(i+1)},\quad E^{(i)}+p^{(i+1)}=-p_1^{(i)}$$

ist, so werden die beiden obigen Proportionen

$$p-f:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=p-\varphi:p^{(i+1)}-\mathfrak{f},$$

$$p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1:-(E^{(i)}+\mathfrak{f}+f_1^{(i)})=p_1^{(i+1)}-\varphi_1^{(i+1)}:p_1^{(i)}-f_1^{(i)};$$

und führen nun ferner auf der Stelle zu der Gleichung

$$96.\quad \frac{(p-f)\,(p^{(i+1)}-\mathfrak{f})}{(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})\,(p_1^{(i+1)}-\mathfrak{f}_1)}=\frac{p-\varphi}{p_1^{(i+1)}-\varphi_1^{(i+1)}}.$$

Von dieser Gleichung lässt sich die folgende wichtige Anwendung machen.

Nach der in §. 8. bewiesenen Gleichung 70. ist, wenn man sich jetzt nur immer an die in §. 11. gegebenen Bestimmungen hält, wie leicht erhellen wird, in völliger Allgemeinheit für ein Glas

$$97.\quad \left(\frac{q}{q_1}\right)^2=\frac{p-f}{p_1-f_1}.$$

Kommt nun noch ein zweites Glas hinzu, so ist hiernach für dieses Glas in völliger Allgemeinheit

$$\left(\frac{q^{(1)}}{q_1^{(1)}}\right)^2=\frac{p^{(1)}-\mathfrak{f}}{p_1^{(1)}-\mathfrak{f}_1},$$

und folglich durch Multiplication, weil offenbar $q_1=q^{(1)}$ ist,

$$\left(\frac{q}{q_1^{(1)}}\right)^2=\frac{(p-f)\,(p^{(1)}-\mathfrak{f})}{(p_1-f_1)\,(p_1^{(1)}-\mathfrak{f}_1)}.$$

Nach 96. ist aber

$$\frac{(p-f)\,(p^{(1)}-\mathfrak{f})}{(p_1-f_1)\,(p_1^{(1)}-\mathfrak{f}_1)}=\frac{p-\varphi}{p_1^{(1)}-\varphi_1^{(1)}},$$

also

$$\left(\frac{q}{q_1^{(1)}}\right)^2=\frac{p-\varphi}{p_1^{(1)}-\varphi_1^{(1)}},$$

d. h. es ist, wenn man jetzt für φ, $\varphi_1^{(1)}$ respective f, $f_1^{(1)}$ setzt, für zwei Gläser

$$98.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(1)}}\right)^2=\frac{p-f}{p_1^{(1)}-f_1^{(1)}}.$$

Kommt nun noch ein drittes Glas hinzu, so ist nach 97. für dieses dritte Glas

$$\left(\frac{q^{(2)}}{q_1^{(2)}}\right)^2=\frac{p^{(2)}-\mathfrak{f}}{p_1^{(2)}-\mathfrak{f}_1},$$

also durch Multiplication, weil offenbar $q_1^{(1)}=q^{(2)}$ ist,

$$\left(\frac{q}{q_1^{(2)}}\right)^2 = \frac{(p-f)\,(p^{(2)}-\mathfrak{f})}{(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})\,(p_1^{(2)}-\mathfrak{f}_1)}.$$

Nach 96. ist aber

$$\frac{(p-f)\,(p^{(2)}-\mathfrak{f})}{(p_1^{(1)}-f_1^{(1)})\,(p_1^{(2)}-\mathfrak{f}_1)} = \frac{p-\varphi}{p_1^{(2)}-\varphi_1^{(2)}},$$

also

$$\left(\frac{q}{q_1^{(2)}}\right)^2 = \frac{p-\varphi}{p_1^{(2)}-\varphi_1^{(2)}},$$

d. h. es ist, wenn man für φ, $\varphi_1^{(2)}$ respective f, $f_1^{(2)}$ setzt, für drei Gläser

$$99.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(2)}}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1^{(2)}-f_1^{(2)}}.$$

Lässt man jetzt noch ein viertes Glas hinzutreten, so ist nach 97. für dieses vierte Glas

$$\left(\frac{q^{(3)}}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{p^{(3)}-\mathfrak{f}}{p_1^{(3)}-\mathfrak{f}_1},$$

also durch Multiplication, weil offenbar $q_1^{(2)} = q^{(3)}$ ist,

$$\left(\frac{q}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{(p-f)\,(p^{(3)}-\mathfrak{f})}{(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})\,(p_1^{(3)}-\mathfrak{f}_1)}.$$

Nach 96. ist aber

$$\frac{(p-f)\,(p^{(3)}-\mathfrak{f})}{(p_1^{(2)}-f_1^{(2)})\,(p_1^{(3)}-\mathfrak{f}_1)} = \frac{p-\varphi}{p_1^{(3)}-\varphi_1^{(3)}},$$

also

$$\left(\frac{q}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{p-\varphi}{p_1^{(3)}-\varphi_1^{(3)}},$$

d. h. es ist, wenn man für φ, $\varphi_1^{(3)}$ respective f, $f_1^{(3)}$ setzt, für vier Gläser

$$100.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(3)}}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1^{(3)}-f_1^{(3)}}.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, und es ist daher in völliger Allgemeinheit für ein System von $i+1$ Gläsern

$$101.\quad \left(\frac{q}{q_1^{(i)}}\right)^2 = \frac{p-f}{p_1^{(i)}-f_1^{(i)}},$$

in welcher Gleichung ebenfalls ein sehr wichtiges und merkwürdiges Theorem der Dioptrik ausgesprochen ist *).

*) In einer spätern Abhandlung werden wir das Obige theils noch etwas weiter ausführen, theils verschiedene Anwendungen der in diesem Aufsatze bewiesenen, grösstentheils von Möbius gefundenen, von Gauss, Bessel und Clausen erweiterten Sätze mittheilen. Die obige Darstellung derselben dürfen wir wohl als eine uns eigenthümliche in Anspruch nehmen.

XVI.

Sur une règle particulière pour trouver l'équation d'une ligne ou d'un plan, tangent une courbe ou une surface du second degré et Note relative à la construction de la chaînette.

Par

Mr. G. J. Verdam

Docteur ès sciences et Professeur de Mathématiques à l'Université de Leide.

I.

Sur une règle particulière pour trouver l'équation d'une ligne ou d'un plan, tangent une courbe ou une surface du second degré en un point donné.

Quand $f = \varphi(x, y) = 0$ représente l'équation d'une courbe plane, l'équation d'une droite, touchante cette courbe en un point, dont les coordonnées orthogonales sont x' et y', sera, d'après la théorie générale du contact des lignes, donnée par

$$y_1 - y' = \frac{dy}{dx}(x_1 - x); \quad (1)$$

ou plutôt par

$$(y_1 - y')\left(\frac{df}{dy}\right) + (x_1 - x')\left(\frac{df}{dx}\right) = 0. \quad (2)$$

Dans ces équations x_1 et y_1 designent les coordonnées courantes de la tangente, et les coefficients différentiels se rapportent au point de contact; c'est à dire, qu'après les avoir déterminé par l'équation de la courbe donnée, on doit substituer aux coordonnées générales x, y, celles x' et y' du point de contact donné.

De même, pour trouver l'équation d'un plan, touchant une surface donnée en un point donné de cette surface, représentée par la fontion générale $F = \varphi(x, y, z) = 0$, on aura l'équation

$$z_1 - z' = \frac{dz}{dx}(x_1 - x') + \frac{dz}{dy}(y_1 - y'), \quad (3)$$

ou plutôt

$$(x_1 - x')\left(\frac{dF}{dx}\right) + (y_1 - y')\left(\frac{dF}{dy}\right) + (z_1 - z')\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0, \quad (4)$$

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées courantes du plan tangent, et x', y', z' les coordonnées particulières du point de contact, et ces dernières sont aussi les quantités que l'on doit mettre, après la différentiation, à la place de x, y, z dans les coëfficients différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dF}{dx}$ etc.

Ces équations sont générales. Quand on les applique aux courbes et aux surfaces du second degré, on trouvera, dans chaque cas particulier, l'équation de la tangente ou du plan tangent pour un point déterminé de cette courbe ou de cette surface, c'est à dire pour le point, dont les coordonnées (toujours rectangulaires) vérifient l'équation donnée de la courbe ou de la surface.

Cependant on peut se servir, pour les courbes et les surfaces du second degré, d'une règle générale, laquelle donne tout de suite l'équation demandée, sans que la differentiation de la proposée soit nécessaire. Voici cette règle, extrémement simple.

Soient α, β, γ les coordonnées du point de contact donné, situé sur une surface du second degré donnée $F = \varphi(x, y, z) = 0$. Changez partout x^2 en αx, y^2 en βy, z^2 en γz; xy en $\frac{1}{2}\alpha y + \frac{1}{2}\beta x$, xz en $\frac{1}{2}\alpha z + \frac{1}{2}\gamma x$, yz en $\frac{1}{2}\beta z + \frac{1}{2}\gamma y$; x en $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\alpha$, y en $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\beta$, z en $\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\gamma$. Développez l'équation, résultante de cette substitution, et joignez y, si cela est besoin, l'équation de condition $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, à laquelle doivent satisfaire les coordonnées α, β et γ. Vous aurez ainsi l'équation du plan tangent démandé. Comme la même règle s'applique aux fonctions du second degré à deux variables, on obtiendra de même l'équation d'une ligne droite, tangente une courbe donnée en un point donné.

Quelques exemples éclairciseront cet énoncé.

1. Soit l'équation d'un cercle

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Les coordonnées d'un point déterminé de la circonférence étant $x' = \alpha$ et $y' = \beta$, on aura d'abord la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2.$$

Puis $\frac{df}{dx} = \frac{d(x^2 + y^2 - r^2)}{dx} = 2x$, $\frac{df}{dy} = 2y$; c'est à dire, relativement au point α, β donné, $\frac{df}{dx} = 2\alpha$, $\frac{df}{dy} = 2\beta$. Ainsi l'équation (2) deviendra, après avoir divisé par 2, et en désignant, pour plus de simplicité par x et y, sans accents, les coordonnées courantes de la droite tangente

$$(y - \beta)\beta + (x - \alpha)\alpha = 0,$$

ou bien

$$\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2,$$

et ayant égard à l'équation de condition, on a finalement pour l'équation de la tangente

$$\alpha x + \beta y = r^2.$$

Maintenant, en suivant la règle énoncée, on doit remplacer x^2 par

αx et y^2 par βy, et l'on aura, sans aucun calcul préliminaire, l'équation de la tangente

$$\alpha x + \beta y = r^2.$$

---

2. Soit l'équation plus générale d'un cercle

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Les équations (1) ou (2) conduiront, pour le point de contact $x' = \alpha$ et $y' = \beta$, à l'équation de la tangente

$$(\beta - b)\ (y-\beta) + (\alpha - a)\ (x-\alpha) = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$y - \beta = \frac{a-\alpha}{\beta - b}\ (x-\alpha).$$

Pour appliquer la règle énoncée plus haut, il faut développer préalablement l'équation donnée, puisque les substitutions dans les termes du second degré diffèrent de celles dans les termes du premier ordre. Ainsi la proposée doit être écrite ainsi

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2.$$

Remplaçant x^2, y^2 par αx, βy; puis x et y dans les termes $-2ax$ et $-2by$ par $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\alpha$ et $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\beta$, on trouve

$$\alpha x - 2a(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\alpha) + a^2 + \beta y - 2b(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\beta) + b^2 = r^2,$$

ou

$$(\alpha - a)x + (\beta - b)y - \alpha a + a^2 - \beta b + b^2 = r^2.$$

Cette équation pourra être considérée comme l'équation cherchée de la tangente. Mais pour la rendre identique avec l'équation ordinaire, il faut en éliminer r^2 au moyen de l'équation de condition

$$(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 = r^2.$$

Or, écrivant celle ci sous la forme

$$\alpha^2 - a\alpha + \beta^2 - \beta b - \alpha a + a^2 - \beta b + b^2 = r^2.$$

et la retranchant de la précédente, on obtient

$$\begin{aligned}(\alpha - a)x - \alpha^2 + a\alpha + (\beta - b)y - \beta^2 + \beta b &\\ = (\alpha - a)x - \alpha(\alpha - a) + (\beta - b)y - \beta(\beta - b)&\\ = (\alpha - a)\ (x-\alpha) + (\beta - b)\ (y - \beta) = 0&\end{aligned}$$

comme on l'a trouvé plus haut.

---

3. Les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$y^2 = px,$$

étant traitées suivant la même règle, donneront de suite les équations des tangentes au point $x'=\alpha$, $y'=\beta$,

$$b^2\alpha x+a^2\beta y=a^2b^2,$$

$$b^2\alpha x-a^2\beta y=a^2b^2,$$

$$\beta y=\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{2}p\alpha,\ \text{ou}\ 2\beta y=px+p\alpha,$$

que l'on obtient, par un calcul moins direct, suivant les équations (1), (2).

L'équation de l'hyperbole, rapportée aux asymptotes, étant

$$xy=c^2,$$

on aura, pour l'équation de la tangente au point $x'=\alpha$, $y'=\beta$.

$$(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\alpha)\,(\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\beta)=c^2.$$

$$(x+\alpha)\,(y+\beta)=4c^2,$$

$$xy+\alpha\beta+\beta x+\alpha y=4c^2;$$

mais $xy=c^2$ et $\alpha\beta=c^2$, donc

$$\beta x+\alpha y=2c^2;$$

comme par l'équation (1) ou (2). Changeant cependant, comme la règle l'indique, xy en $\tfrac{1}{2}\alpha y+\tfrac{1}{2}\beta x$, on a de suite l'équation trouvée.

---

4. Posant encore l'équation générale des lignes du second ordre

$$x^2+axy+by^2+cx+dy+e=0,$$

celle de la droite, tangente au point $x'=\alpha$, $y'=\beta$, sera

$$\alpha x+a(\tfrac{1}{2}\alpha y+\tfrac{1}{2}\beta x)+b\beta y+c(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\alpha)+d(\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}y)+e=0,$$

ou

$$(2\alpha+a\beta+c)x+(2b\beta+a\alpha+d)y+\alpha c+\beta d+2e=0.$$

C'est l'équation connue de la tangente des courbes du second degré. En retranchant l'équation de condition

$$2\alpha^2+2a\alpha\beta+2b\beta^2+2\alpha c+2\beta d+2e=0,$$

on obtient facilement

$$(2\alpha+a\beta+c)\,(x-\alpha)+(2b\beta+a\alpha+d)\,(y-\beta)=0,$$

à la quelle on parvient au moyen des équations (1) ou (2).

---

5. Les équations des surfaces du second degré étant

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

$$b^2c^2x^2-a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

$$pz^2 + p'y^2 - pp'x = 0.$$
$$pz^2 - p'y^2 \mp pp'x = 0,$$

celles des plans, tangents ces surfaces au point $x' = \alpha$, $y' = \beta$. $z' = \gamma$, seront

$$\alpha b^2c^2x + \beta a^2c^2y + \gamma a^2b^2z - a^2b^2c^2 = 0.$$
$$\alpha b^2c^2x + \beta a^2c^2y - \gamma a^2b^2z - a^2b^2c^2 = 0.$$
$$\alpha b^2c^2x - \beta a^2c^2y - \gamma a^2b^2z - a^2b^2c^2 = 0,$$
$$2p\gamma z + 2p'\beta y - pp'x - pp'\alpha = 0,$$
$$2p\gamma z - 2p'\beta y \mp pp'x \mp pp'\alpha = 0;$$

les quelles ne diffèrent de celles, données par l'équation (3) ou (4), quand on élimine les termes constants au moyen des équations de condition.

L'équation générale des surfaces du second degré

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz$$
$$+ 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0$$

étant traitée de la même manière, donne

$$a\alpha x + a'\beta y + a''\gamma z + 2b(\tfrac{1}{2}\alpha y + \tfrac{1}{2}\beta x) + 2b'(\tfrac{1}{2}\gamma x + \tfrac{1}{2}\alpha z) + 2b''(\tfrac{1}{2}\gamma y + \tfrac{1}{2}\beta z)$$
$$+ 2c(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\alpha) + 2c'(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\beta) + 2c''(\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\gamma) + d = 0,$$

ou, en développant,

$$(a\alpha + b\beta + b'\gamma + c)x + (a'\beta + b\alpha + b''\gamma + c')y + (a''\gamma + b'\alpha + b''\beta + c'')z$$
$$+ \alpha c + \beta c' + \gamma c'' + d = 0,$$

comme on la donne dans les traités de géométrie analytique; et en éliminant d, au moyen de l'équation de condition, on l'obtient sous l'autre forme usitée, donnée par l'équation (3) ou (4).

Il y avoit plusieurs années que je m'étois servi de la règle exposée, avant que je connoissois l'ouvrage de Mr. Puissant „Recueil de diverses propositions de Géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique.

Dans le chapitre II. de la seconde section, et dans le chapitre VI. de la troisième section de cet ouvrage (édition de 1824) on trouve exposée une Règle de Mnémonique pour retrouver de suite l'équation d'une tangente et du plan tangent. Cette règle revient au fond à celle, qui est expliquée dans cette note, la quelle néanmoins pourroit paroître plus expéditive et plus complette. Quant à la démonstration, on peut la faire en suivant la marche, indiquée par Mr. Puissant; elle dérive aussi de l'application des équations différentielles (1), (2), (3), (4); enfin, pour les fonctions homogènes du second ordre, on pourroit se servir d'un théorème, mentionné dans le calcul différentiel de M. L'Abbé Moigno, 13 Leçon, art. 64.

II.

Note relative à la construction de la chainette.

Jean Bernoulli, à qui nous devons la première connoissance de l'équation et des propriétés principales de la chainette, donna aussi la construction de cette courbe transcendante ou mécanique. Jacques Bernouilli, Leibnitz et Huigens en ont donnés de même. Les constructions des Bernouillis et de Huigens sont moins simples, ni recommandables pour l'exécution. Le contraire est vrai à l'égard de l'élégante construction de Leibnitz, qui s'est servi, comme d'une courbe auxiliaire, de la logarithmique, ayant pour module le paramètre de la chainette; cette logarithmique étant construite, la demi somme de deux ordonnées, équidistantes, de part et d'autre, de l'ordonnée module, donnera deux ordonnées de la chainette, équidistantes de l'ordonnée paramètre de cette courbe. Pour faciliter l'exécution, on a proposé, il y a quelques années *), l'emploi de deux logarithmiques opposées, ayant le même axe d'abscisses horizontal, et passant par un point, dont la distance à cet axe est égale au paramètre donné de la chainette à construire, c'est à dire passant par le sommet de cette chainette, ou ayant la même ordonnée module; la bissection de toutes les parties des ordonnées, comprises entre ces deux logarithmiques, dirigées en sens contraire, donnera autant de points de la chainette.

La construction de Leibnitz est tirée immédiatement de l'équation exponentielle de la chainette. Il existe encore d'autres constructions, déduites de l'équation (sous forme logarithmique) de cette courbe; mais rien de plus simple ni de plus élégant que la construction de Leibnitz, modifiée comme il vient d'être expliqué.

Cependant quand il fallait construire la courbe sur une grande échelle, la construction préalable des logarithmiques pourroit devenir embarrassante. Toutes les chainettes étant des courbes semblables, on peut se servir, dans ce cas, d'une chainette déjà construite sur une échelle plus petite. On trouve aussi dans plusieurs Traités de Mécanique pratique des tables, donnant, pour un paramètre, égal à 1 ou à 10, les valeurs numériques des ordonnées d'une chainette, pour des abscisses, croissantes en progression arithmétique. Au moyen d'une telle table on construit facilement, par ordonnées, toute chainette, dont on connoit le paramètre, ou de la quelle sont donnés le sommet et les pieds, soit le sommet et les deux points de suspension, qui se trouvent sur une même horizontale; puisque du rapport entre la distance de ces points et la hauteur de la courbe, on déduit le rapport des paramètres de la chainette à construire et de celle, pour la quelle la table a été calculée; donc la multiplication des nombres de la table par ce rapport, donnera les valeurs numériques des coordonnées de la chainette demandeé.

---

*) Originairement dans le Journal de Mr. Crelle, mais on retrouve l'indication de cette construction dans le Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, von L. J. Magnus, S. 294, Aufgabe 102.

$$y_1 = ab = \tfrac{1}{2}\sqrt{2h(2h+c)} \; \ldots\ldots \; (1)$$

On pourroit construire facilement ces valeurs égales des ordonnées moyennes ab, $a'b'$, mais en supposant les dimensions de la courbe plus grandes, que cela convient pour des constructions géométriques, on doit faire le calcul numérique de ces valeurs. Ce calcul fera donc connoitre la longueur de deux ordonnées moyennes égales $y_1 = ab = a'b'$.

La bissection de Oa et Oa' donnera deux autres ordonnées moyennes $y_2 = cd = c'd'$, pour les quelles on aura

$$\frac{ab + OC}{cd} = \frac{2cd}{OC},$$

c'est à dire

$$\frac{y_1 + h}{y_2} = \frac{2y_2}{h},$$

et

$$y_2 = cd = c'd' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2h(y_1 + h)} \; \ldots\ldots \; (2)$$

On peut à présent continuer cette marche, en divisant chaque fois la distance entre deux ordonnées trouvées, en deux parties égales, et menant la ligne de l'ordonnée moyenne, que l'on calculera ensuite; mais il est à remarquer, que le calcul des ordonnées suivantes y_3, y_4 etc. devient plus facile, que celui des deux premières, à cause qu'on ne devra plus faire à chaque fois l'extraction de racines. Car soit divisée la distance aD ou $a'E$ en deux parties égales, et menée la perpendiculaire ef ou $e'f'$, il est clair que les ordonnées ef et cd auront la même distance que les ordonnées OC et ab ou cd et $c'd'$, ou ob et AD; donc

$$\frac{2cd}{OC} = \frac{cd + ef}{ab},$$

ou

$$\frac{2y_2}{h} = \frac{y_2 + y_3}{y_1};$$

ce qui donne

$$y_3 = \frac{y_2}{h}(2y_1 - h). \quad (3)$$

On recommence à présent la même marche, en partant de l'ordonnée OC du sommet; on divise Oc, Oc' en deux parties égales, et, en menant les ordonnées moyennes gh, $g'h'$, on en calcule les longueurs, comme on a calculé, pour la première fois, la longueur des ordonnées ab, $a'b'$, et pour la seconde fois cd et $c'd'$. Ce calcul nécessitera l'extraction d'une racine, ou le service d'une table de racines, mais pour les ordonnées suivantes, menées entre cd et ab, entre ab et ef etc. etc. cette opération ne devra pas être faite; seulement au commencement du calcul de chaque série d'ordonnées moyennes, la valeur de la premiere ordonnée dépendra d'une équation du second degré à deux termes. Il est aisé de voir, que le calcul d'un assez grand nombre d'ordonnées exigera peu de temps, et que, sans recourir à une table calculée, les points de la chainette seront obtenus avec un degré d'exactitude, que les constructions géométriques ne sauroient donner.

Le cercle osculateur au point le plus bas C de la chainette a pour rayon le paramètre h de la Chainette, et ce cercle ne s'écarte pas sensiblement de la chainette, toutes le fois que la flèche CF est moindre que la septième partie de la largeur AB.

La parabole osculatrice au sommet ou au point le plus bas C, a pour équation $y_2 = 2hx$; son paramètre est donc le double du paramètre de la chainette; elle coïncide sensiblement avec la chainette sur une étendue pour la quelle la flèche CF est moindre que la sixième partie de la largueur AB. C'est encore cette même parabole dans la quelle la chainette est transformée pour ainsi dire, quand les forces verticales, qui agissent sur les points de la courbe, ne sont plus proportionnelles aux élémens ds, mais aux élémens dx des abscisses, s dénotant l'arc ou la longueur de la courbe.

Il existe encore une parabole, la quelle, touchant d'abord la chainette au point C, puis s'écartant insensiblement de cette courbe, la coupe ensuite en un point, par le quel passe en même temps l'ordonnée, traversante le foyer de cette parabole. Elle a un paramètre $= 1{,}862 \cdot h$, c'est à dire moindre que celui de la parabole osculatrice, mais, dans l'exécution, elle s'accorderoit sur une plus grande étendue avec la chainette, et ces deux courbes pourroient être censées coïncider en tant que la flèche CF seroit moindre que la quatrième partie de AB.

Ces résultats sont deduits d'un calcul numérique. Ils font voir, que dans l'application qu'on pourroit faire de la théorie de la chainette a la construction des ponts suspendus, on pourroit, sans erreur sensible, prendre la parabole pour la chainette. A la vérité la courbure des chaines d'un tel pont ne peût être celle d'une chainette, mais à la rigueur non plus celle d'une parabole, quoiqu'elle en diffère très peu.

XVII.

Ueber die Auflösung der Delischen Aufgabe.

Von

Herrn Thomas Clausen

zu Altona.

Die Conchoide mit kreisförmiger Basis, obgleich eine Curve vom sechsten und also höhern Grade als die Conchoide des Nicomedes, die nur vom vierten Grade ist: lässt sich zur Auflösung des Delischen Problems sehr einfach anwenden. Da sie sich eben so

einfach mechanisch beschreiben lässt, so schien es mir nicht uninteressant, die geometrische Construction der Auflösung der Aufgabe, oder überhaupt der Cubikwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl durch dieselbe zu entwickeln.

Der Punkt B (Tab. II. Fig. 5.) der Linie AD bewegt sich auf dem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt C ist, während die Linie beständig durch A geht, und der Punkt D auf derselben, dessen Entfernung von B constant ist, beschreibt die Curve.

Es sei $AC = a$, $BC = b$, $BD = 3e$, $DA = r$,

AE (DE ist senkrecht auf AC) $= x$, $\angle DAE = \varphi$.

In dem ebenen Dreiecke ABC ist

$$b^2 = a^2 + 2a(r - 3e)\cos\varphi + (r - 3e)^2,$$

$$r^2 - 6er + 9e^2 + 2ar\cos\varphi - 6ae\cos\varphi + a^2 - b^2 = 0$$

und wenn man mit r multiplicirt und $r\cos\varphi = x$ setzt

$$r^3 - 6er^2 + (a^2 - b^2 + 9e^2 + 2ax)r - 6aex = 0.$$

Es sei diese Gleichung

$$(r - 2e)^3 = me^3,$$

so wird

$$12e^2 = a^2 - b^2 + 9e^2 + 2ax,\ me^3 = 6aex - 8e^3;$$

woraus

$$e^2 = \frac{3(a^2 - b^2)}{1 - m},\ x = \frac{m + 8}{1 - m} \cdot \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Es sei z. B. in der Delischen Aufgabe $m = 16$; so wird wenn man

$$a = 2,\ b = 3 \text{ setzt: } e = 1,\ x = 2.$$

Nach diesen Verhältnissen ist die Figur gezeichnet, es ist nemlich

$$AC = 2 . AF,\ BD = 3 . AF,\ FE = AF,\ AD - AE = AE\sqrt[3]{2}.$$

XVIII.

Aufzulösende geometrische Aufgabe.

Mitgetheilt von

Herrn Thomas Clausen

zu Altona.

Es ist (Tab. II. Fig. 6.) ein Kreis, und auf seiner Peripherie sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, in denen

er von einem übrigens unbekannten Kegelschnitte geschnitten wird. Man soll den Winkel finden, unter dem eine der Hauptachsen des Kegelschnitts irgend eine der Linien, welche die Punkte A, B, C, D zu zweien verbinden, z. B. die Linie AB, schneidet.

XIX.

Zwei allgemeine Summations-Formeln für die dritte Potenz der Glieder der Reihen, deren $n$tes Glied $= \pm [1 + (n-1) \,.\, 2^x]$ ist.

(Ein Nachtrag zu Nr. XLI. in Th. I. Heft 3.)

Von dem

Herrn Doctor Hellerung

zu Wismar.

F. Die Formeln selbst sind:

1) $$1^3 + (1+1\,.\,2^x)^3 + (1+2\,.\,2^x)^3 + (1+3\,.\,2^x)^3 + \ldots\ldots + [1+(n-1)2^x]^3$$
$$= n\,.\,[1+(n-1)2^{x-1}]\,.\,[1+(n-1)\,.\,2^x\,.\,(1+n\,.\,2^{x-1})]$$

2) $$1 - (1+1\,.\,2^x)^3 + (1+2\,.\,2^x)^3 - \ldots\ldots\ldots + [1+(2n-2)2^x]^3 - [1+(2n-1)\,.\,2^x]^3$$
$$= -2n\,.\,[n^2\,.\,2^{3x+1} - 3\,.\,n\,.\,2^{2x}\,.\,(2^{x-1}-1) - 3\,.\,2^{x-1}\,.\,(2^x-1)]$$

Z. B. man erhält:

α) wenn $x = 0$ ist,

aus 1): $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3 = n\,.\,\left(\frac{n+1}{2}\right)\,.\,\left(\frac{n^2+n}{2}\right)$$

aus 2): $$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots\ldots + (2n-1)^3 - (2n)^3 = -n^2(4n+3)$$

β) wenn $x = 1$ ist,

aus 1): $$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots + (2n-1)^3 = n\,.\,(n)\,.\,(2\,.\,n^2 - 1)$$

aus 2): $1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + \ldots + (4n-3)^3 - (4n-1)^3 =$

$$-2n \,.\, (16 \,.\, n^2 - 3)$$

γ), wenn $x = 2$ ist,

aus 1): $1^3 + 5^3 + 9^3 + \ldots\ldots + (4n-3)^3 = n.(2n-1).(8.n^2 - 4n - 3)$

aus 2): $1^3 - 5^3 + 9^3 - 13^3 + \ldots + (8.n-7)^3 - (8.n-3)^3 =$

$$-2n \,.\, (2^7 \,.\, n^2 - 48 \,.\, n - 18)$$

δ). wenn $x = 3$ ist,

aus 1): $1^3 + 9^3 + 17^3 + \ldots\ldots + (8.n-7)^3$

$$= n \,.\, (4n-3) \,.\, (32 \,.\, n^2 - 24 \,.\, n - 7)$$

aus 2): $1^3 - 9^3 + 17^3 - 25^3 + \ldots + (16.n-15)^3 - (16.n-7)^3 =$

$$-2n \,.\, (2^{10} \,.\, n^2 - 9 \,.\, n \,.\, 2^6 - 84)$$

etc. etc.

Der Beweis für die Formel 1) ist ganz derselbe, den wir früher (in *A.* und *B.*) bei $x=0$ und $x=1$ gebrauchten, nemlich:

Die Summe der ersten N oder N_1 Zahlen von der Form $1+\nu.2^{x+1}$ ist $= N.[1+(N-1).2^x]$ oder $= N_1.[1+(N_1-1).2^x]$.

Setzt man aber $N = n.[1+(n-1).2^{x-1}]$

und $N_1 = (n-1).[1+(n-2).2^{x-1}]$;

so erhält man:

$$N.[1+(N-1).2^x] - N_1.[1+(N_1-1).2^x] = [1+(n-1).2^x]^2,$$

$$\text{und } N - N_1 = 1+(n-1).2^x$$

d. h. also, Erstlich:

Die Summe der $1+(n-1).2^x$ auf einander folgenden Zahlen von der Form $1+\nu.2^{x+1}$, von denen die grösste $=1+(N-1).2^{x+1}$, und die kleinste $= 1+N_1.2^{x+1}$, ist $= [1+(n-1).2^x]^2$.

Und Zweitens muss nun auch:

$$S[1+(n-1).2^x]^3 = 1^3 + (1+1.2^x)^3 + (1+2.2^x)^3 + \ldots$$
$$+ (1+(n-1)2^x]^3$$
$$= N^2.[1+(N-1)2^x]$$

sein, woraus die Formel 1) unmittelbar folgt.

Der Beweis für die Formel 2) ist nun eine leichte Folgerung aus dem vorstehenden. Nemlich:

Wenn man von $2.S[1+(n-1).2^{x+1}]^3$ die $S[1+(n-1).2^x]^3$, nachdem man hierin $2.n$ statt n gesetzt hat, abzieht; so erhält man die Formel 2).

G. 1) Wir fanden (in *E.* 1.) $Sn^{2\nu-1} = \varphi\frac{n(n+1)}{2} = \varphi N$; z. B. für $\nu = 5$ war

$$Sn^9 = \tfrac{1}{5}.N^2.(2N-1).(8.N^2-6.N+3);$$

daher ist auch, wenn man $2n$ statt n setzt,

$$S(2n)^{2\nu-1} = \varphi n(2n+1) = \varphi N_2 = \Sigma(2n)^{2\nu-1} + \Sigma(2n-1)^{2\nu-1}.$$

Man hat aber stets:

$$\Sigma(2n)^{2\nu-1} = 2^{2\nu-1} \,.\, S(n)^{2\nu-1} = 2^{2\nu-1} \,.\, \varphi N;$$

daher ist auch:

$$\Sigma(2n-1)^{2\nu-1} = \varphi N_2 - 2^{2\nu-1} \,.\, \varphi N = \varphi' n^2 \text{ (nach } E. \text{ 2.)};$$

und auch:

$$\Sigma(2n-1)^{2\nu-1} - \Sigma(2n)^{2\nu-1} = \varphi N_2 - 2^{2\nu} \,.\, \varphi N$$
$$= 1^{2\nu-1} - 2^{2\nu-1} + 3^{2\nu-1} - \ldots\ldots - (2n)^{2\nu-1}$$

z. B. $1^9 - 2^9 + 3^9 - \ldots\ldots - 14^9 = -7^2 \,.\, 277003903.$

2) Es ist

$$\frac{(an+b)^{2\nu}-(an-b)^{2\nu}}{4\,.\,\nu} = b(an)^{2\nu-1} + \frac{(2\nu-1)\,(2\nu-2)}{2\,.\,3} \,.\, b^3(an)^{2\nu-3} + \ldots$$
$$+ b^{2\nu-1} \,.\, (an)^1$$

Daher muss also auch stets $S(ab+b)^{2\nu} - S(an-b)^{2n} = \varphi N$ sein. Z. B. wenn $a=4$ und $b=1$; so ist:

$$S(4n+1)^2 - S(4n-1)^2 = 16 \,.\, N$$
$$S(4n+1)^4 - S(4n-1)^4 = 2^5 \,.\, N \,.\, (2^4 \,.\, N+1)$$
$$S(4n+1)^6 - S(4n-1)^6 = 2^4 \,.\, N \,.\, (2^{10} \,.\, N^2 - 3 \,.\, 2^5 \,.\, N + 3)$$
$$= -3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - \ldots\ldots$$
$$-(4n-1)^6 + (4n+1)^6$$

etc. etc.

In diesen Gleichungen wird man auf beiden Seiten noch die Einheit addiren.

Dies mag genügen, da hier dem angeblichen Funde von Turner seine vollständige Ausbildung geworden zu sein scheint.

XX.

Historische Bemerkungen über das Princip der Differentialrechnung.

Von dem

Herrn Doctor Gerhardt

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

Die Elemente der Differentialrechnung wurden von Leibnitz gefunden und bekannt gemacht, als die Exhaustionsmethode, wel-

cher jene, wie sich historisch nachweisen lässt, ihren Ursprung zu verdanken hat, sich am weitesten von ihrer ursprünglichen Strenge entfernt hatte. Auch hatte sie schon längst ihr gewohntes Feld, die Geometrie, verlassen, indem man seit den Zeiten Fermat's und Roberval's bei Quadraturen die geometrischen Grössen durch allgemeine Zeichen ausdrückte und so Reihen fand, deren Summen auf irgend eine Weise, ohne an das Princip der Exhaustionsmethode zu denken, bestimmt wurden. Solche Reihen waren es nun auch, durch deren Betrachtung Leibnitz, wie er selbst wiederholt gesteht, die Differentialrechnung fand, und wahrscheinlich liegt hierin der Grund, dass es ihm so schwer wurde, die Elemente seiner neuen Rechnung auf ihr ursprüngliches Princip zurückzuführen und so zu begründen, als man ihm späterhin den Vorwurf machte, dass die Differentialrechnung eines sicheren Fundamentes entbehre. Allein auch hierzu hatte er selbst die Veranlassung gegeben, denn zuerst sprach er sich nirgends deutlich über das Wesen der Differentiale aus und sodann, anstatt ein für alle Mal an einem Beispiele zu zeigen, wie am genügendsten das Differential mittelst der Gränzmethode aufgefasst werden könne, nahm er zu quantitates incomparabiliter parvae seine Zuflucht. Diese von Leibnitz hypothetisch angenommenen *) Grössen sollten nur ein Hülfsmittel zum Beweise der Lehrsätze seiner neuen Rechnung sein; man verstand ihn aber in diesem Punkte falsch, nahm jene für wirkliche Grössen und stellte sie in Vergleich mit den anderen bisher gebrauchten, obgleich sie von ihm späterhin wiederholt für Fictionen erklärt wurden. So entstand die Lehre vom Unendlichen, und als die unausbleiblichen Zweifel über die Deutlichkeit und Bestimmtheit dieser Grössen zur Sprache kamen, fanden Leibnitz's Erinnerungen, dass die Differentialrechnung am sichersten mittelst der Exhaustionsmethode begründet werden könne, keinen Anklang.

Die obige Behauptung, dass die Differentialrechnung der Exhaustionsmethode der alten Geometer ihren Ursprung zu verdanken habe, erhält noch mehr Bestätigung, wenn man die Erfindung der Fluxionen aufmerksam studirt. Ueberall, wo Newton in seinen Schriften über das Princip der Fluxionsrechnung spricht, zeigt sich deutlich, dass er auf dem von Keppler und Cavaleri eingeschlagenen Wege weiter fortschritt und so zu jener Rechnung gelangte, und man kann mit grosser Wahrscheinlichkeit schliessen, dass, wenn Newton einmal ein selbstständiges Werk über die Fluxionen verfasst hätte, er es sicher auf die in seinen berühmten Principiis gebrauchte Methode der ersten und letzten Verhältnisse d. h. auf die Exhaustionsmethode gegründet haben würde. Das Princip der Fluxionen wurzelt in der Geometrie, was am deutlichsten aus den ihnen zu Grunde liegenden Begriffen von Zeit und Bewegung erhellt, und desshalb vermochte auch Maclaurin um so leichter in seiner Treatise of fluxions, ihr Princip rein nach den Grundsätzen der alten Geometrie zu behandeln. — Indessen blieb anfangs die

*) Er bedient sich des Wortes assumere; z. B. in der Abhandlung: Tentamen de motuum coelestium causis (Leib. op. Tom. III. p. 213 sq.): Assumsi inter demonstrandum quantitates incomparabiliter parvas, v. g. differentiam duarum quantitatum communium ipsis quantitatibus incomparabilem. Sic enim, ni fallor, lucidissime exponi possunt. etc.

grösseren oder kleineren Grösse entstanden wären, einen verschiedenen Werth unter einander haben, obgleich sie durch dasselbe Zeichen dargestellt würden. Diese Annahme veranlasste aber bei der Bestimmung der Differentiale vielfache Schwierigkeiten, zumal da Euler durch die Differenzenrechnung und mittelst der Entwickelung der Functionen in Reihen dahin gelangen wollte, und in der That ist die Dunkelheit und Unverständlichkeit, die in den ersten Capiteln der Eulerschen Differentialrechnung herrscht, eine merkwürdige Erscheinung für jeden, der mit der äusserst lichtvollen Darstellung Euler's vertraut ist *).

Euler's Bemühungen, das Princip der Differentialrechnung fest zu begründen, befriedigten keineswegs die allgemeine Erwartung; ja die Verwirrung in dieser Hinsicht wurde immer noch grösser. Man meinte sogar, dass die Differentialrechnung bisher noch nicht von der rechten Seite aufgefasst worden sei, und glaubte namentlich in der so sehr erweiterten und in allen Theilen der Mathematik mit Nutzen gebrauchten Lehre von den Reihen ein Mittel zu einer bessern Bestimmung und Erklärung des Differentials gefunden zu haben. Was überhaupt seit dieser Zeit zur Feststellung des Princips der Differentialrechnung geschah, lässt sich unter zwei allgemeine Gesichtspunkte bringen: entweder behielt man den Begriff und das Zeichen eines Differentials bei, und bestimmte den Begriff so, dass die Widersprüche, auf welche er zu führen schien, beseitigt wurden; oder man verwarf alles bisher Angenommene und suchte auf anderem Wege zu dem zu gelangen, was mittelst der bisherigen Methode gefunden war. Zu dem ersten Fall gehört die sogenannte Gränzmethode, von der weiter unten ausführlicher die Rede sein soll; zu dem zweiten alle die Weisen, in welchen mit Hülfe des Taylorschen Lehrsatzes das Differential einer Function gefunden wird. Unter diesen letzteren nimmt Lagrange's Functionentheorie, die im Jahr 1797 zu Paris erschien, den ersten Platz ein.

Wegen des grossen Beifalls, mit dem sie aufgenommen wurde und zum Theil noch jetzt aufgenommen wird, wollen wir sie hier einer näheren Betrachtung unterwerfen. Schon in dem vollständigen Titel: Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagès de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et reduits à l'analyse algébrique des quantités finies, sind die ganze Tendenz des Werkes und zugleich die Gesichtspunkte angegeben, aus welchen man dasselbe zu betrachten hat. Lagrange will nicht allein eine neue Theorie aufstellen zur Begründung des Princips der Differentialrechnung, sondern auch niedere und höhere Analysis, die bisher völlig gesondert waren, mit einander verbinden. — Nachdem

---

*) Eine Folge von Euler's Theorie war die sogenannte Nullenrechnung, in welcher man die Differentiale als leere, an sich bedeutungslose Zeichen betrachtete, mit denen man aber nach gewissen sinnreich erdachten Gesetzen eine richtige Rechnung führen könne. Man sah den Algorithmus der Differentialrechnung nicht als ein nothwendiges Erzeugniss der Vernunft an, sondern nannte ihn eine heuristische Fiction. Vergl. Joh. Schulz Entwickelung einiger mathematischen Theorien, Königsberg 1803; und Fischer über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis, Berlin 1808.

in allen Fällen zur Bestimmung des Differentials ausreicht, und desshalb durfte es auch nicht an die Spitze einer weit allgemeineren Lehre, als die Diffentialrechnung ist, gestellt werden.

Demnach ist im Grunde mit Lagrange's Functionentheorie nichts gewonnen; andere Schwierigkeiten bei Seite gesetzt, entbehrt das zu Grunde gelegte Princip einer durchgreifenden Allgemeinheit. Dasselbe gilt nun auch von allen übrigen Methoden, von dem Derivationscalcul Arbogast's, von der Exponentialrechnung Pasquich's u. s. w. welche die Differentialrechnung vertreten sollen und in denen mittelst des Taylorschen Satzes das Differential einer Function erhalten wird.

Während dieser mannigfachen Versuche, das Princip der Differentialrechnung fest zu begründen, hatte die Akademie der Wissenschaften zu Berlin für das Jahr 1786 eine sichere, streng wissenschaftliche Theorie des sogenannten mathematisch Unendlichen zum Gegenstand einer Preisaufgabe gemacht. L'Huilier aus Genf gewann den Preis durch seine Exposition élémentaire des principes des calculs suspérieurs, in welcher er zu beweisen suchte, dass das unter den Namen der Exhaustionsmethode bekannte Verfahren der griechischen Geometer gehörig erweitert zu einer Feststellung der Principien der höhern Analysis hinreiche. Im Jahre 1795 erschien von demselben Verfasser zur Vervollständigung jenes Entwurfes ein anderes Werk unter dem Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, das aber über das Princip nichts wesentlich Neues beibringt. L'Huilier hat in beiden Schriften, seinem Vorsatze getreu, eine Zusammenstellung der Theoreme gegeben, die das Fundament der Exhaustionsmethode bilden; jedoch entbehrt dieselbe eines durchgreifenden Zusammenhanges, da die an die Spitze gestellte Definition der Gränze nicht hinlänglich allgemein gefasst ist. Auch bedient er sich bei dem Nachweise, dass die Gränze eines Verhältnisses mit dem Differentialverhältnisse identisch ist, der Entwickelung der Functionen in Reihen mittelst des Taylorschen Lehrsatzes, was zu tadeln ist. Von diesen Ausstellungen jedoch abgesehen verdienten beide Schriften alle Aufmerksamkeit, weil nicht allein das Princip der Differentialrechnung, sondern auch die darauf gegründeten Theorien immer auf den Begriff der Gränze zurückgeführt werden, und die bisher so vielfach gehandhabten Ideen über das Unendliche und Unendlichkleine gerechte Würdigung finden.

Dieser Versuch L'Huilier's jedoch, die Differentialrechnung mittelst des Begriffs der Gränze streng wissenschaftlich zu begründen, blieb im Allgemeinen ohne gehörige Anerkennung, da Lagrange's Functionenlehre, besonders von französischen Mathematikern sehr bereitwillig aufgenommen wurde. Zwar bediente man sich nicht durchgängig ihrer Bezeichnung, aber man huldigte vollkommen den aufgestellten Principien und stimmte willfährig Lagrange's Urtheil über die Theorie der Gränzen bei: sie sei zu schwierig und zu dunkel, als dass sie einer Wissenschaft, wie die höhere Analysis, deren Fundament auf die einfachsten und klarsten Principien gebaut werden müsse, als Grundlage dienen könne; man hütete sich aber wohl an ihrer Richtigkeit zu zweifeln. Da nun um dieselbe Zeit eine durchgreifend neue Behandlungsweise der Mathematik beinahe in allen ihren Theilen von Frankreich aus sich verbreitete, so darf man sich ni[illegible]dern, dass zugleich auch die Lehren

XXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

(Schluss.)

12.

Die Oscillationsgeschwindigkeit v eines geradlinig bewegten Aethertheilchens und sein Abstand vom Ruhepunkt lässt sich unter der Voraussetzung, dass die auf das Theilchen wirkende Kraft der Elastizität der Entfernung vom Ruhepunkte proportional sei, durch einfache Hülfsmittel finden.

Ist in der Entfernung 1 die Kraft der Elastizität $=E$, die Entfernung vom Ruhepunkte $=x$, die grösste Ausweichung vom Ruhepunkte, um welche das Theilchen beim Anfange der Bewegung entfernt ist, $=a$, $a-x=X$, und wird X in n gleiche Theile getheilt, so ist die Kraft F, welche das Aethertheilchen an der Stelle $(a-m\frac{X}{n})$ anregt, $=E.(a-m\frac{X}{n})$. Wird nun angenommen, dass in jedem Raume $\frac{X}{n}$ eine gleichförmig beschleunigte Bewegung stattfinde, die erst im nächsten Raume $\frac{X}{n}$ dem Abstande vom Ruhepunkte proportional sich ändert, aber in einem solchen Raume constant bleibt, so ist

$$v_m . v_m - v_{(m-1)} . v_{(m-1)} = 2E(a-m.\frac{X}{n}).\frac{X}{n}.$$

Legt man jetzt m alle Werthe von $m=1$ bis $m=n$ bei und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bleibt

$$v_n . v_n = 2E[na - \frac{X(n^2+n)}{n\ \ 2}]\frac{X}{n} = E.[2a-(1+\frac{1}{n})X]X.$$

Soll die Bewegung eine continuirliche werden, und bezeichnet v die Geschwindigkeit, so wird

$$v^2 = E(2a-X).X = E.(a+a-X)X = E(a+x)(a-x).$$

Setzt man nun $x=a\cos\vartheta$, so erhält man $v=\sqrt{E}.a\sin\vartheta$ u. s. w. *)

---

*) S. Bohnenberger's Astronomie S. 403.

Zwischen zwölf beliebigen Grössen, die wir im Allgemeinen durch a, a', a'', a'''; b, b', b'', b'''; c, c', c'', c''' bezeichnen wollen, findet immer die folgende Relation Statt:

$$\begin{aligned}(ab'-a'b)\,(a''b'''-a'''b'') \\ +(bc'-b'c)\,(b''c'''-b'''c'') \\ +(ca'-c'a)\,(c''a'''-c'''a'') \\ =(aa''+bb''+cc'')\,(a'a'''+b'b'''+c'c''') \\ -(a'a''+b'b''+c'c'')\,(aa'''+bb'''+cc''').\end{aligned}$$

Für $a=a''$, $b=b''$, $c=c''$ und $a'=a'''$, $b'=b'''$, $c'=c'''$ geht diese Relation in folgende über:

$$\begin{aligned}(ab'-a'b)^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2 \\ =(a^2+b^2+c^2)\,(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2.\end{aligned}$$

Man soll die Richtigkeit der obigen allgemeinen Relation zwischen zwölf Grössen beweisen.

Aufgaben und Lehrsätze. Von Herrn Professor Dr. Oettinger zu Freiburg i. B.

1) Ein Dreieck zu bilden, wenn ein Winkel, die Linie, welche eine der ihm anliegenden Seiten, und die welche die gegenüberstehende Seite in zwei gleiche Theile theilt, gegeben ist.

2) Ein Dreieck zu bilden wenn ein Winkel und die Linien, welche die beiden anliegenden Seiten in zwei gleiche Theile theilen, gegeben sind.

3) Ein Dreieck zu bilden, wenn ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und die Linie, welche eine der anliegenden Seiten in zwei gleiche Theile theilt, gegeben ist.

4) Ein Dreieck zu bilden, wenn die Linien, welche die drei Dreiecksseiten in zwei gleiche Theile theilen, gegeben sind.

Nennt man die Höhen, welche den drei Dreiecksseiten (s_1, s_2, s_3) zugehören, der Reihe nach h_1, h_2, h_3, die Linien, welche die drei Seiten in zwei gleiche Theile theilen, der Reihe nach t_1, t_2, t_3, so gelten folgende zwei Lehrsätze für die Ableitung der Höhen und Halbirungslinien von einander,

$$5)\ h_1=\frac{\sqrt{[(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)(t_1-t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)]}}{\sqrt{(2t_2^2+2t_3^2-t_1^2)}}$$

$$h_2=\frac{\sqrt{[(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)(t_1-t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)]}}{\sqrt{(2t_1^2+2t_3^2-t_2^2)}}$$

$$h_3=\frac{\sqrt{[(t_1+t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)(t_1-t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)]}}{\sqrt{(2t_1^2+2t_2^2-t_3^2)}}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{(2h_1^2h_2^2+2h_1^2h_3^2-h_2^2h_3^2)}}{h_1h_2h_3\sqrt{[(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})]}}$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{(2h_2^2h_1^2+2h_2^2h_3^2-h_1^2h_3^2)}}{h_1h_2h_3\sqrt{[(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})]}}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{(2h_3^2h_1^2+2h_3^2h_2^2-h_1^2h_2^2)}}{h_1h_2h_3\sqrt{[(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3})(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3})]}}$$

Diese Sätze reihen sich an die schon bekannten, welche für die Ableitung der Höhen und Seiten von einander gelten, an.



Aufgaben von dem Herrn Professor Dr. G. J. Verdam zu Leiden.

1. Tous les triangles sphériques, ayant même base et même aire, ont leurs sommets dans la circonférence d'un petit cercle, passant par les deux points, opposés aux extrémités de la base. En outre, le petit cercle, passant par les extrémites de la base, et ayant son centre, diamétralement opposé au centre du premier petit cercle, jouit de la même propriété.

Cette proposition n'est pas nouvelle; on la trouve dans quelques Traités de Trigonométrie sphérique et de Géométrie analytique. Mais pour trouver le centre du premier petit cercle, on a cette construction: Menez un arc de grand cercle, perpendiculairement par le milieu de la base. Le triangle étant, en général, scalène, cet arc coupera un des côtés, adjacents à la base, et sera coupé par le prolongement de l'autre. Du milieu de cet autre côté, décrivez, avec un rayon, soustendant le quart d'un grand cercle, un arc coupant le prolongement de l'arc perpendiculaire. Le point d'intersection sera le centre cherché.

riangles sphériques, ayant même base et même rs sommets dans la circonférence d'un cercle, trouve au milieu de la base. Si la somme des le à deux angles droits, ou plutôt égale à une le lieu des sommets sera évidemment un grand

oint les milieux des côtés opposés d'un té- irrégulier, les trois droites, ainsi menées, se me point, qui sera le centre de gravité du té- raèdre est régulier, les dites droites se coupe- ement au centre de la sphère circonscrite; propriété a également lieu pour le tétraèdre t les plans sont des triangles égaux et sembla- quilateraux ou réguliers.

4. Un quadrilatère plan, dans lequel on a mené les deux diagonales, pouvant être consideré comme la projection d'un quadrilatère gauche, ou d'un tétraèdre soit pyramide triangulaire, ou

„Turri cuique Leidensis ideo adeo sollicite investigavi, „ut eo facilius conjecturam caperem de locis observationum Alcmariae et Bergae ad Zomam; et ad eam „rem Theorema scitum excogitavi, cujus usus in patriâ „nostrâ deinceps permagnus esse possit, cum tot illu„strium locorum intervalla tam accurate sint cognita!!“ Et à la page 203 il énonce son problème en ces verbes „Trium „locorum intervallis inter se datis, quarti distantiam ab „omnibus, unde Stationis, definire.“ Il donne, en premier lieu, la solution graphique de ce problème, par l'intersection de deux segmens de cercle, capable chacun d'un des deux angles, observés dans la station. En second lieu il donne une solution trigonométrique, en faisant usage des triangles rectangles, que l'on obtient, en abaissant, des centres des cercles décrits, des perpendiculaires sur les côtés du triangle donné et sur les cordes, qui vont de la station aux points observés, c'est à dire aux angles de ce triangle. Ensuite il donne de sa solution le calcul numérique (sans employer néanmoins des logarithmes, dont l'invention étoit à peine connue, et desquelles il n'existoit pas encore de table) pour un cas particulier.

Il me paroit ainsi justifié que la première idée de ce problème appartient tout à fait à notre Snellius, et non pas à Pothenot. Dans tous nos Traités de Trigonométrie rectiligne ce problème est
autre par l'épithète de Problème de Snellius.
le Wörterbuch de Klügel, — que vous avez
é avec tant de succès, — dans l'espoir de trouver
ré ou notices historiques, relatives à ce fameux
je n'y trouve rien à cet égard. Enfin je prenois
rs de Mathématique du célèbre Géomètre Allemand
me le volume, intitulé „Anwendungen der
metrie und Trigonometrie, erster Theil,
lung der mathematischen Anfangsgründe.
0!!“ *) je lisois, dans le Vorrede; pag. 4, ce

ch unlängst die Aufgabe der 51 Abhand. S. 303. beim
rd Snellius „Eratosthenes Batavus etc. etc.

. . . .

„Also hat Snellius diese Aufgabe sehr richtig trigonometrisch „aufgelöset, und Pothenot ist nicht der erste Erfinder von ihr, „hat aber vermuthlich von des Snellius Auflösung nichts ge„wusst. Wäre Snellius dem Herrn de Montesson bekannt
hätte er vielleicht gesagt, — Snellius habe
Methode gebraucht!, wie Cassini de
Snellius habe zur Messung eines Grades eben
gebraucht wie die französischen Astronomen
de Paris 1748, pag. 123 **); anstatt zu sagen:
ischen Astr...... wie Snellius. Die rhe-
r heisst, glaube ich, ὕστερον πρότερον! !!“

*) Es sind hier Kästners geometrische Abhandlungen. T. I. gemeint. G.

**) On trouve cette expression de Cassini dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, pour les années 1702 et 1718, et non dans le volume de 1748, ce qui est probablement une faute d'impression, au lieu de 1718.

Wenn das bisher erwähnte schon eine nambafte Verbesserung und Vervollständigung des Instituts genannt zu werden verdient, so ist dagegen noch Mehreres neu hinzugekommen was bisher der Universität ganz fehlte.

Es ist nämlich unmittelbar mit dem Haupt-Gebäude ein Thurm verbunden, der in einer Höhe von 80 Fuss vom Felsengrunde sich erhebt, und auf seiner ebenen Fläche einen Pavillon als Local für astronomische Beobachtungen mit beweglichen Instrumenten darbietet. Freilich kann dieser Einrichtung, vom Standpunkt der heutigen Astronomie aus, der Name Sternwarte nicht beigelegt werden, insofern man damit eine Anstalt bezeichnet, die auf die Ausbildung der Wissenschaft selbst abzweckt. Wohl aber ist durch diesen Thurm der Zweck vollständig erreicht, dass von nun an der Marburger Studirende, in den Vorlesungen über Astronomie, das was er hört auch praktisch belegt sehen, und selbst üben kann.

An Instrumenten enthält dieser Thurm bis jetzt: Ein tragbares Passagen-Instrument von Ertel nebst Uhr, einen Chronometer von Kessels, ein fünffüssiges Frauenhofersches Fernrohr, einen desgleichen Cometensucher, eine parallactische Maschine mit dreifüssigem Fernrohr und einige kleinere Werkzeuge. Zugleich ist der Thurm in der Mitte ganz durchbohrt, so dass für alle physicalischen Versuche, welche eine grössere Höhe erfordern als die Zimmer darbieten, eine freie Fallhöhe von 80 Fuss zu Gebote steht.

Endlich ist auf dem höchsten Punkt des Schlossbergs in einer geradlinigen Entfernung von nicht ganz 160 Ruthen ein ringsum ganz freistehender Pulverthurm zum meteorologischen Thurm hergestellt, der jetzt auch im Bau vollendet, nächsten Sommer seine innere Einrichtung erhalten wird; somit also auch in dieser Hinsicht dem Institute eine grössere Wirksamkeit gesichert.

Bei dem bekannten, und namentlich schon gelegentlich der magnetischen Beobachtungen bewiesenen, Eifer der Marburger Studirenden, steht zu erwarten, dass diese neue wesentliche Verbesserung des Instituts von ihnen gründlich benutzt und somit der Zweck der Kurhessischen Staats-Regierung, welche dieselbe verfügte, recht vollständig werde erreicht werden.

Bemerkungen und Aufgaben von Herrn Scherling, Lehrer am Gymnasium zu Lübeck.

Bezeichnet $\mathfrak{z}$ den Zinsfuss (d. h. die Zinsen vom Kapital $=1$), k das Kapital, k_n den künftigen Werth desselben nach n Jahren bei zusammengesetzten Zinsen, und setzen wir $1+\mathfrak{z}=x$, so hat man, wenn jährlich die Summe r zugelegt wird,

$$\text{I.}\quad k_n = kx^n + \frac{r}{\mathfrak{z}}(x^n - 1)$$

und, wenn jährlich die Summe r weggenommen wird,

$$\text{II.}\quad k_n = kx^n - \frac{r}{\mathfrak{z}}(x^n - 1).$$

Um I. zur ununterbrochenen logarithmischen Berechnung tauglich zu machen, nehme man

$$k_n = kz^n\ [1 + \frac{r}{\mathfrak{z}k}\ (1 - \frac{1}{z^n})]$$

setze, da $z > 1$ ist, (1) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{z^n}}$; so erhält man

$$k_n = kz^n[1 + \frac{r}{\mathfrak{z}k}\ (\cos\ \varphi)^2].$$

Nun setze man ferner (2) $\mathrm{tg}\ \psi = \cos\ \varphi\ \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{z}k}}$, so erhält man

$$k_n = kz^n(1 + (\mathrm{tg}\ \psi)^2) = kz^n\ (\sec\ \varphi)^2$$

$$\text{oder (3) } k_n = \frac{kz^n}{(\cos\ \psi)^2}.$$

II. lässt sich nur dann auf diese Weise zur ununterbrochenen logarithmischen Berechnung tauglich machen, wenn die jährliche Wegnahme die Zinsen des Kapitals nicht übersteigt. Unter dieser Voraussetzung nehme man wieder, wie vorhin,

$$(1)\ \sin\ \varphi = \sqrt{\frac{1}{z^n}}$$

so erhält man $k_n = kz^n[1 - \frac{r}{\mathfrak{z}k}\ (\cos\ \varphi)^2]$. Da nun unter der gemachten Voraussetzung ganz gewiss $\frac{r}{\mathfrak{z}k}\ (\cos\ \varphi)^2 < 1$ ist, so nehme man

$$(2)\ \sin\ \psi = \cos\ \varphi\ \sqrt{\frac{r}{\mathfrak{z}k}}$$

und erhält dann

$$(3)\ k_n = kz^n\ (\cos\ \psi)^2.$$

Nennt man ferner k die **Mise** und r die jährliche **Rente**, so hat man

zur Bestimmung der Mise III. $k = \frac{r(z^n - 1)}{\mathfrak{z}z^n}$.

zur Bestimmung der Rente IV. $r = \frac{k\mathfrak{z}z^n}{z^n - 1}$.

Um diese Ausdrücke zur logarithmischen Berechnung tauglich zu machen, nehme man

$$k = \frac{r}{\mathfrak{z}}\ (1 - \frac{1}{z^n}).$$

Setzt man nun (1) $\sin\ \varphi = \sqrt{\frac{1}{z^n}}$, so erhält man

$$(2)\qquad k = \frac{r}{\mathfrak{z}}\ (\cos\ \varphi)^2.$$

Ferner forme man IV. so um:

$$r = \frac{k_{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{x^n}}.$$

Nimmt man nun wieder (1) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{x^n}}$, so erhält man

$$(2) \qquad r = \frac{k_{\frac{1}{2}}}{(\cos\varphi)^2}.$$

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, durch Algebra lösbar.

Die beiden Katheten sollen a, b, die Hypotenuse c, und das von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel soll h heissen.

1) b und c zu bestimmen aus a, h.

Man bestimme die Projectionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse einzeln und addire die Resultate, so erhält man $c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$, und aus $ab = ch$ bestimmt sich b. Beide Ausdrücke sind bequem zu construiren.

2) a, b, c zu bestimmen aus h und $c : b = m : n$.

b ist ein geometrisches Mittel; davon ausgehend, gelangt man zunächst zur Bestimmung von $b = \frac{mh}{\sqrt{m^2 - n^2}}$, worauf sich c und a bestimmen lassen.

3) Aehnlich ist die Aufgabe: aus h und $b : h = m : n$ die andern Stücke zu bestimmen.

4) Aus $a \pm b = s$ und h die andern Linien zu bestimmen.

Man quadrire $a \pm b = s$, so bekommt man c in die Gleichung, worauf man zu beachten hat, dass $ab = ch$: das Resultat giebt $c = \mp h \pm \sqrt{s^2 + h^2}$. Es ist klar, dass in beiden Fällen nur das Zeichen $+$ vor der Wurzel gebraucht werden kann.

5) Aus $a + b = s$ und c die übrigen Linien zu bestimmen.

Man verfahre zunächst, wie vorhin, mache dann a zur gesuchten Grösse, so findet man $a = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{3s^2 - 2c^2})$, woraus b und h zu bestimmen sind.

6) Aus $a - b = d$ und c die übrigen Linien zu bestimmen.

7) Aus $c + a = s$ und b die Linien zu bestimmen.

Man verfahre auf ähnliche Art wie in 5., eliminire c, so bestimmt sich $a = \frac{s^2 - b^2}{2s}$.

8) Aus $c - a = d$ und b dieselbe Bestimmung zu machen.

Kurze und einfache Ableitung der ganzen ebenen Trigonometrie aus den beiden Eigenschaften des ebenen Dreiecks, dass die Summe der drei Winkel 180° be-

$$14.\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}C = \frac{a-b}{a+b}$$

oder

$$15.\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2}C$$

folgt.

Aus 10. und 11. und aus 9. und 12. folgt durch Multiplication

$$16.\quad \frac{\sin \tfrac{1}{2}A^2 \sin B}{\sin C} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4c^2},$$

$$17.\quad \frac{\cos \tfrac{1}{2}A^2 \sin B}{\sin C} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4c^2};$$

also, weil

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

ist,

$$18.\quad \sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}},$$

$$19.\quad \cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}};$$

und folglich durch Division

$$20.\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}},$$

und durch Multiplication

$$21.\quad \sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b+c)}.$$

Ferner ergiebt sich aus 18. und 19. leicht

$$22.\quad \cos \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc},$$

$$23.\quad \sin \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc};$$

also, wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt, nach einer bekannten goniometrischen Formel,

$$\cos A = \frac{(b+c)^2+(b-c)^2-2a^2}{4bc},$$

woraus man nach gehöriger Entwickelung sogleich

$$24.\quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

erhält.

Aus 4. erhält man auch leicht die beiden Gleichungen

$$25.\quad (a+b)^2 \sin \tfrac{1}{2}C^2 + (a-b)^2 \cos \tfrac{1}{2}C^2 = c^2$$

und

$$26.\quad \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \sin(B+\tfrac{1}{2}C)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \cos(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = 1.$$

Setzt man in der letzten Gleichung zuerst

$$\cos(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = 1 - \sin(B+\tfrac{1}{2}C)^2,$$

dann

$$\sin(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = 1 - \cos(B+\tfrac{1}{2}C)^2;$$

so erhält man

$$27.\quad \sin(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = \frac{1-\left(\frac{c}{a-b}\right)^2}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{c}{a-b}\right)^2},$$

$$28.\quad \cos(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = -\frac{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{c}{a-b}\right)^2};$$

und hieraus

$$29.\quad \operatorname{tang}(B+\tfrac{1}{2}C)^2 = -\frac{1-\left(\frac{c}{a-b}\right)^2}{1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}.$$

Nach leichter Rechnung erhält man aber hieraus ferner

$$30.\quad \sin(B+\tfrac{1}{2}C) = \frac{a+b}{2c}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{ab}},$$

$$31.\quad \cos(B+\tfrac{1}{2}C) = \frac{a-b}{2c}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}},$$

wobei man zu bemerken hat, dass wegen der zweiten der beiden Gleichungen 4. die Grössen $a-b$ und $\cos(B+\frac{1}{2}C)$ immer gleiche Vorzeichen haben. Aus 30. und 31. folgt endlich durch Division

$$32.\quad \operatorname{tang}(B+\tfrac{1}{2}C) = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{(a+b+c)(a+b-c)}}.$$

Wenn man den Winkel C des Dreiecks ABC durch eine gerade Linie halbirt, so wird man sogleich die geometrische Bedeutung des Winkels $B+\frac{1}{2}C$ erkennen.

Dass im Obigen eine vollständige Abhandlung der ebenen Trigonometrie enthalten ist, wird man sogleich übersehen. Von der gewöhnlichen Entwickelung der obigen Formeln unterscheidet sich dieselbe dadurch, dass man bei der ersteren von der Formel 24. ausgeht, und diese Formel mit Hülfe einer Construction, bei der bekanntlich mehrere Fälle zu unterscheiden sind, beweist. Bei der obigen Entwickelung gelangt man zu dieser und zu allen zur Auflösung der Dreiecke nöthigen Formeln, wenn man nur erst den Satz, dass sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten bewiesen hat, welches bekanntlich äusserst leicht ist, auf rein analytischem Wege und durch ganz allgemeine Schlüsse,

weshalb ich der obigen Methode vor der gewöhnlichen den Vorzug geben möchte, da dieselbe überdies sehr leicht und mit sehr geringem Zeitaufwande zum Zwecke führt.

Nouvelle batterie galvanique.
(Académie des sciences de Bruxelles. Séance du 6 Février 1841.*)

M. M. Crahay et Quetelet font un rapport favorable sur une nouvelle batterie galvanique, présentée dans une précédente séance par M. J. A. Van Nelsen de Maestricht. Cette pile revient pour le fond à la modification apportée par M. Faraday à la pile de Wollaston, si ce n'est que M. Van Nelsen emploie, pour séparer les cuivres des couples successifs, des carreaux de verre au lieu de papier verni dont M. Faraday fait usage dans le même but. En outre, M. Van Nelsen a adopté le zinc amalgamé. Comme les résultats qu'il en a obtenus, depuis deux ans qu'il en fait usage, sont très satisfaisants, et que cette pile produit, à égalité de nature et de grandeur des éléments, des effets plus énergiques que ceux que l'on obtient des piles ordinairement employées, il ne sera pas sans utilité d'en donner ici la description, et de faire connaître quelques-uns de ses effets.

Les élements, cuivre et zinc, sont disposées ainsi que nous l'avons dits, comme dans la combinaison de Wollaston; c'est-à-dire que le cuivre, soudé au zinc dans chaque couple, va embrasser le zinc du couple suivant, de manière à être en regard avec les deux faces de cette plaque, mais sans contact avec elle. Elle diffère de la pile de Wollaston en ce que les lames métalliques sont beaucoup plus rapprochées les unes des autres que dans cette dernière; elles ne s'y trouvent qu'à deux millimètres de distance, et sont maintenues ainsi par des morceaux de liège interposés entre les plaques de zinc et celles de cuivre, tandis que les plaques de cuivre des éléments consécutifs sont séparées par des carreaux de verre de même étendue que les plaques. Elle se distingue encore de la pile de Wollaston en ce que, au lieu de faire plonger chaque paire dans un vase particulier contenant de liquide acidulé, la pile entière est immergée dans une seule auge continue, sans cloisons. Tous les couples sont placés dans une espèce de cadre de bois, soigneusement verni, dans lequel ils sont facilement retenus, sans qu'il soit nécessaire de les attacher par des vis à une barre de bois, ainsi qu'on est obligé de le faire dans la combinaison à la Wollaston. Cette disposition présente encore l'avantage de faciliter beaucoup le désassemblage des éléments. Les couples, réunis dans le cadre, sont descendus tous à la fois dans le liquide acidulé renfermé dans l'auge; on ajoute encore que les lames de zinc sont amalgamées avec soin. La pile que l'auteur construisit, il y a deux ans, consiste en 19 couples, dont les lames de zinc ont 11½ centimètres de longueur sur 8 de largeur. Celles de cuivre ont la même largeur sur une longueur à peu près double, pour se replier autour des la-

---

*) L'Institut 1re Sect. No. 385. 18. Mai 1841.

egregia ista calculi subsidia, quae ad eius solutionem requiruntur, unternommen habe.

In einem in meinen Händen befindlichen Manuscript hat Johann Friedrich Pfaff sich die folgende noch weit allgemeinere Aufgabe vorgelegt:

Wenn die Summe a von μ Gliedern einer geometrischen Reihe und die Summe b der $r$ten Potenzen dieser Glieder gegeben ist: die Reihe zu bestimmen, d. h. ihr erstes Glied und ihren Exponenten zu finden;
und hat zugleich einige, wie es mir scheint, sehr bemerkenswerthe allgemeine Gesichtspunkte angegeben, welche zu einer zweckmässigen Auflösung dieses Problems führen können. Indem ich den Lesern des Archivs über die von Pfaff aufgezeichneten Bemerkungen im Folgenden einige Mittheilungen mache, möchte ich mir zugleich erlauben, dieselben zu dem Versuche einer vollständigen Auflösung des in Rede stehenden allgemeinen Problems auf dem von dem genannten, der Wissenschaft leider zu früh entrissenen grossen Mathematiker vorgezeichneten Wege, und zu der Mittheilung derselben in dem Archive aufzufordern.

Bezeichnen wir mit Pfaff das erste Glied der gesuchten Reihe mit x, ihren Exponenten mit y, so ist die gesuchte Reihe

$$x,\ xy,\ xy^2,\ xy^3, \ldots xy^{\mu-1};$$

und nach den Bedingungen der Aufgabe haben wir daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$x(1+y+y^2+y^3+\ldots+y^{\mu-1})=a,$$
$$x^r(1+y^r+y^{2r}+y^{3r}+\ldots+y^{(\mu-1)r})=b;$$

oder

$$x\,.\,\frac{1-y^\mu}{1-y}=a,\quad x^r\,.\,\frac{1-y^{\mu r}}{1-y^r}=b.$$

Erhebt man die beiden Seiten der ersten Gleichung auf die $r$te Potenz, und dividirt dann die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man die folgende bloss noch die unbekannte Grösse y enthaltende Gleichung:

$$\left(\frac{1-y^\mu}{1-y}\right)^r.\,\frac{1-y^r}{1-y^{\mu r}}=\frac{a^r}{b},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\frac{a^r}{b}=c$ setzen,

$$\left(\frac{1-y^\mu}{1-y}\right)^{r-1}.\,\frac{(1-y^r):(1-y)}{(1-y^{\mu r}):(1-y^\mu)}=c,$$

also nach einem bekannten Satze

$$(1+y+y^2+\ldots+y^{\mu-1})^{r-1}\,(1+y+y+y^2+\ldots+y^{r-1})$$
$$=c\{1+y^\mu+y^{2\mu}+\ldots+y^{(r-1)\mu}\}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} c\{1+y^\mu+y^{2\mu}+\ldots+y^{(r-1)\mu}\} \\ -(1+y+y^2+\ldots+y^{\mu-1})^{r-1}\,(1+y+y^2+\ldots+y^{r-1}) \end{array}\right\}=0.$$

Diese Gleichung, mittelst welcher der gesuchte Exponent y bestimmt werden muss, ist offenbar vom Grade $(r-1)\mu$, hat aber

eine Eigenschaft, welche es möglich macht. sie auf einen niedrigern Grad zu reduciren. Bezeichnet man nämlich die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens im Allgemeinen durch $f(y)$, so dass also die obige Gleichung die Form

$$f(y)=0$$

erhält, und setzt nun $\frac{1}{y}$ für y, so wird diese Gleichung, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$\frac{f(y)}{y^{(r-1)\mu}}=0.$$

Wenn aber überhaupt die Function

$$F(x)=Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{B}x+\mathfrak{A}$$

einer Gleichung

$$F(x)=0$$

des $n$ten Grades die Eigenschaft hat, dass sie, wenn man $\frac{1}{x}$ für x setzt, in $\frac{F(x)}{x^n}$ übergeht, so ist jederzeit

$$A=\mathfrak{A},\ B=\mathfrak{B},\ C=\mathfrak{C},\ \text{u. s. w.};$$

d. h. die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Coefficienten der Gleichung sind einander gleich, welches auf folgende Art leicht im Allgemeinen bewiesen werden kann.

Nach der Voraussetzung ist für jedes x

$$\frac{A}{x^n}+\frac{B}{x^{n-1}}+\frac{C}{x^{n-2}}+\ldots+\frac{\mathfrak{C}}{x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{x}+\mathfrak{A}$$
$$=\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{B}x+\mathfrak{A}}{x^n},$$

und folglich für jedes x, wenn man mit x^n auf beiden Seiten multiplicirt,

$$A+Bx+Cx^2+\ldots+\mathfrak{C}x^{n-2}+\mathfrak{B}x^{n-1}+\mathfrak{A}x^n$$
$$=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\ldots+Cx^{n-2}+Bx^{n-1}+Ax^n;$$

also nach einem bekannten Satze

$$A=\mathfrak{A},\ B=\mathfrak{B},\ C=\mathfrak{C},\ \text{u. s. w.}$$

wie behauptet wurde.

Daher hat auch unsere obige Gleichung, aus welcher der Exponent y bestimmt werden muss, die Eigenschaft, dass die Coefficienten der vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder einander gleich sind.

Nun hat aber schon Euler in den Commentariis Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. VI. (M. s. auch Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt von Joh. Andr. Christ. Michelsen. Thl. III. Berlin. 1791. S. 13) gezeigt, dass solche Gleichungen, in denen je zwei vom Anfange und Ende gleich weit abstehende Glieder gleiche Coefficienten haben, sich immer vom $(2n+1)$sten und vom $2n$ten Grade auf den $n$ten herabbringen lassen, worüber Folgendes zu bemerken ist.

Wenn die Gleichung zuerst vom $(2n+1)$sten Grade ist, und also im Allgemeinen die Form

$$Ax^{2n+1}+Bx^{2n}+\ldots+Kx^{n+1}+Kx^{n}+\ldots+Bx+A=0$$

hat, so kann man dieselbe auch auf folgende Art darstellen:

$$A(x^{2n+1}+1)+B(x^{2n-1}+1)x+\ldots+K(x+1)x^{n}=0,$$

und man kann also, weil bekanntlich überhaupt

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}=x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\ldots-x+1$$

ist, in die Function auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit $x+1$ ohne Rest dividiren, wodurch man eine Gleichung des $2n$ten Grades erhält, in welcher, wie sich bei näherer Untersuchung zeigt, noch die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben. Wenn sich also zeigen lässt, dass jede Gleichung des $2n$ten Grades, in welcher die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben, auf den $n$ten Grad herabgebracht werden kann, so wird dies auch von jeder Gleichung des $(2n+1)$sten Grades von der in Rede stehenden Beschaffenheit bewiesen sein.

Um aber zu zeigen, dass jede Gleichung des $2n$ten Grades, in welcher die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder gleiche Coefficienten haben, auf den $n$ten Grad herabgebracht werden kann, verfährt Euler a. a. O. auf folgende Art.

Betrachten wir zuerst die Gleichung des vierten Grades

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Ax+1=0,$$

und denken uns dieselbe auf die Form

$$(x^2+\alpha x+1)(x^2+\beta x+1)=0$$

oder, wie man nach leichter Rechnung findet, auf die Form

$$x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta+2)x^2+(\alpha+\beta)x+1=0$$

gebracht, so haben wir zur Bestimmung von α und β die beiden Gleichungen

$$\alpha+\beta=A,\ \alpha\beta+2=B \text{ oder } \alpha+\beta=A,\ \alpha\beta=B-2;$$

und nach einer bekannten Eigenschaft der Gleichungen sind folglich α und β die beiden Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades

$$u^2-Au+B-2=0,$$

können also durch Auflösung dieser Gleichung gefunden werden. Hat man aber auf diese Weise α und β gefunden, so erhält man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung des vierten Grades durch Auflösung der beiden Gleichungen des zweiten Grades

$$x^2+\alpha x+1=0,\ x^2+\beta x+1=0.$$

Betrachten wir ferner die Gleichung des sechsten Grades

$$x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Bx^2+Ax+1=0$$

und denken uns dieselbe auf die Form

$$(x^2+\alpha x+1)(x^2+\beta x+1)(x^2+\gamma x+1)=0$$

oder auf die Form

$$\left.\begin{array}{l}x^6+(\alpha+\beta+\gamma)x^5\\ \quad+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+3)x^4\\ \quad+(2\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha\beta\gamma)x^3\\ \quad+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+3)x^2\\ \quad+(\alpha+\beta+\gamma)x+1\end{array}\right\}=0$$

gebracht, so haben wir zur Bestimmung von α, β, γ die drei Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma=A,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+3=B,\ 2\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha\beta\gamma=C$$

oder

$$\alpha+\beta+\gamma=A,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=B-3,\ \alpha\beta\gamma=C-2A;$$

und α, β, γ sind also nach einem bekannten Satze von den Gleichungen die drei Wurzeln der Gleichung des dritten Grades

$$u^3-Au^2+(B-3)u-C+2A=0.$$

Hat man aber durch Auflösung dieser Gleichung α, β, γ gefunden, so erhält man die sechs Wurzeln der gegebenen Gleichung des sechsten Grades durch Auflösung der drei folgenden quadratischen Gleichungen

$$x^2+\alpha x+1=0,\ x^2+\beta x+1=0,\ x^2+\gamma x+1=0.$$

Mehrere Mittheilungen zu machen, verbietet jetzt die Beschränktheit des Raums. Dass aber die vorhergehenden Andeutungen zu vielfachen fernern Entwickelungen Veranlassung geben können, liegt deutlich vor Augen. Vorzüglich würde es natürlich auf die Auffindung allgemeiner Gesetze ankommen, und zwar zunächst auf eine völlig allgemeine Entwickelung der Gleichung des $n$ten Grades, durch welche bei einer gegebenen Gleichung des $2n$ten Grades die Hülfsgrösse u besimmt wird. Ohne Beweis giebt Euler a. a. O. die Coefficienten der neun ersten Glieder dieser Gleichung auf folgende Art an:

$$1;\ -A;\ B-n;\ -C+(n-1)A;\ D-(n-2)B+\frac{n(n-3)}{1\,.\,2};$$

$$-E+(n-3)C-\frac{(n-1)\,(n-4)}{1\,.\,2}A;$$

$$F-(n-4)D+\frac{(n-2)\,(n-5)}{1\,.\,2}B-\frac{n(n-4)\,(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3};$$

$$-G+(n-5)E-\frac{(n-3)\,(n-6)}{1\,.\,2}C+\frac{(n-1)\,(n-5)\,(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}A;$$

$$H-(n-6)F+\frac{(n-4)\,(n-7)}{1\,.\,2}D-\frac{(n-2)\,(n-6)\,(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3}B$$
$$+\frac{n(n-5)\,(n-6)\,(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

Auf jeden Fall scheint eine neue Untersuchung dieses Gegenstandes und der obigen Aufgabe über die geometrischen Reihen wünschenswerth zu sein. G.

XXIII.

Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes.

Von dem

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

§. 1.

Sind in einer Ebene vier beliebige Punkte A, B, C, D (Taf. III. Fig. 1.) gegeben, von denen nie mehr als zwei in derselben Geraden liegen, so wird der Inbegriff der sechs geraden Linien, welche durch diese Punkte gelegt werden können, ein vollständiges Viereck genannt, und die gegebenen Punkte Hauptecken desselben. Je zwei jener Geraden, welche keine Hauptecke gemein haben, heissen Gegenseiten des Viereckes, ihr von den Hauptecken verschiedener Durchschnittspunkt ein zugeordneter Punkt, und der in dem letzteren von den beiden Gegenseiten gebildete Winkel der charakteristische Winkel dieser Seiten. Es hat demnach jedes vollständige Viereck drei Paare von Gegenseiten: AD und BC, AB und CD, und AC und BD; ferner drei zugeordnete Punkte E, F, G; und drei charakterische Winkel: AED, AFB, und HGD. Ferner sollen die drei Verbindungslinien je zweier der zugeordneten Punkte zugeordnete Seiten, das von ihnen gebildete Dreieck zugeordnetes Dreieck und die Winkel des letzteren zugeordnete Winkel genannt werden, während dagegen die durch die Hauptecken gehenden Geraden Hauptseiten und die von irgend zweien derselben gebildeten Winkel Hauptwinkel heissen mögen. Zwischen den Haupt- und zugeordneten Punkten oder Ecken findet übrigens der wesentliche Unterschied statt, dass in den ersteren sich immer drei Hauptseiten, in den letzteren dagegen nur zwei derselben schneiden.

Verbindet man die vier Hauptecken eines vollständigen Viereckes durch einen stetigen Zug, so dass keine derselben übergangen, aber auch keine zwei Mal berührt wird, so lassen sich dadurch, in welcher Ordnung auch diese Punkte auf einander folgen

Die nachfolgenden Untersuchungen werden sich ausschliesslich auf die vollständigen Vierecke erster Classe gründen, und so weit sie ein einfaches Viereck in Betrachtung ziehen müssen, stets das erster Form zu Grunde legen. Die so entwickelten Formeln werden theils die Vierecke der drei übrigen Formen unmittelbar umfassen, theils, wo dies nicht der Fall sein sollte, auf dieselben leicht übergetragen werden können. Um endlich die Vorzeichen in den Formeln hinlänglich bestimmen zu können, soll in der zu Grunde gelegten Construktion (Taf. III. Fig. 1.) die Hauptecke A, auf deren vorwärts verlängerten Schenkeln die zugeordneten Punkte F und G liegen, als erste Ecke angenommen und dabei festgesetzt werden, dass die Summe der Hauptwinkel BAD und BCD kleiner als 2 Rechte sei.

§. 3.

Man führe nunmehr folgende Bezeichnung ein: 1) für die Seiten und ihre Verlängerungen und Abschnitte:

$$AD=a,\quad FD=a_2,\quad AB=b,\quad GB=b_2$$

$$BC=a_1,\quad FC=a_3,\quad CD=b_1,\quad GC=b_3$$

$$AC=c,\quad AE=c_2$$

$$BD=c_1,\quad DE=c_3$$

2) für die charakteristischen Winkel:

$$A\hat{F}B=A,\quad H\hat{G}D=B,\quad A\hat{E}D=C;$$

3) für die Hauptwinkel:

$$B\hat{A}D=(ab),\quad A\hat{D}C=(ab_1),\quad C\hat{A}D=(ac)$$

$$B\hat{C}D=(a_1b_1),\quad A\hat{B}C=(a_1b),\quad C\hat{B}D=(a_1c_1)$$

u. s. w. so dass jeder Hauptwinkel durch die ihn einschliessenden Seiten angedeutet wird;

4) für die zugeordneten Seiten und Winkel:

$$GE=\alpha,\quad FE=\beta,\quad FG=\gamma$$

$$G\hat{F}E=(\beta\gamma),\quad F\hat{G}E=(\alpha\gamma),\quad F\hat{E}G=(\alpha\beta).$$

5) Ferner sollen die von drei Hauptecken gebildeten Dreiecke **Hauptdreiecke** heissen und ihr Flächeninhalt in nachstehender Weise bezeichnet werden:

$$ABD=T_1,\quad ACD=T_3$$

$$BCD=T_2,\quad ACB=T_4;$$

dagegen mögen die von zwei Hauptecken und einem zugeordneten Punkte gebildeten Dreiecke **Nebendreiecke** heissen und, da es ihrer 12 sind, durch ein T angedeutet werden, dem die Hauptseite, auf welcher das Dreieck steht, und die Nummer des zugeordneten Punktes in seiner Spitze beigesetzt ist; wobei man die Punkte F, G, E beziehungsweise als ersten, zweiten und dritten Punkt betrachtet. Demnach wäre z. B.

$$AED = T_{3a_2},\ ABF = T_{1b},\ BDG = T_{2c_1} \text{ u. s. w.}$$

6) Den Flächeninhalt des zugeordneten Dreieckes EFG wollen wir mit Δ bezeichnen; dagegen sollen die Flächeninhalte der in Taf. III. Fig. 1. enthaltenen einfachen Vierecke

$$ABCDA = F,\ ADBCA = F',\ ABDCA = F''$$

gesetzt werden. Mit Hülfe dieser Bezeichnungen und Benennungen, deren Zweckmässigkeit sich durch das Nachfolgende rechtfertigen wird, können nunmehr die trigonometrischen Relationen des vollständigen Viereckes leicht und übersichtlich entwickelt werden.

§. 4.

Jede Hauptseite gehört als Vierecksseite zu zwei einfachen Vierecken, und als Dreiecksseite zu zwei Hauptdreiecken. Nun ist aber aus den Elementen der ebenen Trigonometrie und Tetragonometrie bekannt, dass jede Seite eines geradlinigen Dreiecks gleich der Summe der auf sie bezogenen Projektionen der beiden anderen Dreiecksseiten, und dass jede Vierecksseite gleich der Summe der auf sie bezogenen Projektionen der drei übrigen Vierecksseiten ist, gleichviel von welcher Form das Viereck ist; also wird zuvörderst:

$$\left.\begin{aligned}
a &= b\cos(ab) + b_1\cos(ab_1) + a_1\cos A = b\cos(ab) + c_1\cos(ac_1)\\
&= c\cos(ac) + c_1\cos(ac_1) - a_1\cos A = c\cos(ac) + b_1\cos(ab_1)\\
a_1 &= b\cos(a_1b) + b_1\cos(a_1b_1) + a\cos A = b\cos(a_1b) + c\cos(a_1c)\\
&= c\cos(a_1c) + c_1\cos(a_1c_1) - a\cos A = c_1\cos(a_1c_1) + b_1\cos(a_1b_1)\\
b &= c\cos(bc) + c_1\cos(bc_1) + b_1\cos B = c\cos(bc) + a_1\cos(a_1b)\\
&= a\cos(ab) + a_1\cos(a_1b) - b_1\cos B = a\cos(ab) + c_1\cos(bc_1)\\
b_1 &= c\cos(b_1c) + c_1\cos(b_1c_1) + b\cos B = c_1\cos(b_1c_1) + a_1\cos(a_1b_1)\\
&= a\cos(ab_1) + a_1\cos(a_1b_1) - b\cos B = c\cos(b_1c) + a\cos(ab_1)\\
c &= a\cos(ac) + a_1\cos(a_1c) + c_1\cos C = a\cos(ac) + b_1\cos(b_1c)\\
&= b\cos(bc) + b_1\cos(b_1c) - c_1\cos C = b\cos(bc) + a_1\cos(a_1c)\\
c_1 &= a\cos(ac_1) + a_1\cos(a_1c_1) + c\cos C = a\cos(ac_1) + b\cos(bc_1)\\
&= b\cos(bc_1) + b_1\cos(b_1c_1) - c\cos C = b_1\cos(b_1c_1) + a_1\cos(a_1c_1)
\end{aligned}\right\}\ 1.$$

Werden diese 6 Gleichungen beziehungsweise mit $aa_1 bb_1 cc_1$ multiplicirt, so erhält man linker Hand die Quadrate der Hauptseiten. Je zwei derselben addirt und mit einer entsprechenden dritten verglichen geben die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
a^2 &= bc\cos(bc) + b_1c_1\cos(b_1c_1) + bb_1\cos B - cc_1\cos C \\
&= b^2 + c_1^2 - 2bc_1\cos(bc_1) = b_1^2 + c^2 - 2b_1c\cos(b_1c) \\
a_1^2 &= bc_1\cos(bc_1) + b_1c\cos(b_1c) + bb_1\cos B - cc_1\cos C \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos(bc) = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos(b_1c_1) \\
b^2 &= ac\cos(ac) + a_1c_1\cos(a_1c_1) + cc_1\cos C - aa_1\cos A \\
&= a^2 + c_1^2 - 2ac_1\cos(ac_1) = a_1^2 + c^2 - 2a_1c\cos(a_1c) \\
b_1^2 &= ac_1\cos(ac_1) + a_1c\cos(a_1c) + cc_1\cos C - aa_1\cos A \\
&= a^2 + c^2 - 2ac\cos(ac) = a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1\cos(a_1c_1) \\
c^2 &= ab\cos(ab) + a_1b_1\cos(a_1b_1) + aa_1\cos A - bb_1\cos B \\
&= a^2 + b_1^2 - 2ab_1\cos(ab_1) = a_1^2 + b^2 - 2a_1b\cos(a_1b) \\
c_1^2 &= ab_1\cos(ab_1) + a_1b\cos(a_1b) + aa_1\cos A - bb_1\cos B \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos(ab) = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos(a_1b_1)
\end{aligned}\right\}\ 2.$$

Demnach können jede zwei Gegenseiten auf drei verschiedene Arten aus vier übrigen Hauptseiten und den 6 von ihnen gebildeten Hauptwinkeln gefunden werden. Führt man endlich noch drei Hülfsgrössen $\delta_1\delta_2\delta_3$ ein, so dass man

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1^2 &= bc\cos(bc) + bc_1\cos(bc_1) + b_1c\cos(b_1c) + b_1c_1\cos(b_1c_1) \\
\delta_2^2 &= ac\cos(ac) + ac_1\cos(ac_1) + a_1c\cos(a_1c) + a_1c_1\cos(a_1c_1) \\
\delta_3^2 &= ab\cos(ab) + ab_1\cos(ab_1) + a_1b\cos(a_1b) + a_1b_1\cos(a_1b_1)
\end{aligned}\right\}\ 3.$$

hat, so ergiebt sich auch noch:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1^2 &= b^2 + b_1^2 - 2bb_1\cos B = c^2 + c_1^2 + 2cc_1\cos C \\
\delta_2^2 &= c^2 + c_1^2 - 2cc_1\cos C = a^2 + a_1^2 + 2aa_1\cos A \\
\delta_3^2 &= a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos A = b^2 + b_1^2 + 2bb_1\cos B
\end{aligned}\right\}\ 4.$$

§. 5.

Die geometrische Bedeutung der Hülfsgrössen $\delta_1\delta_2\delta_3$ ergiebt sich sofort, wenn man die Ausdrücke Nr. 4. construirt. Man ziehe nämlich Taf. III. Fig. 3. aus der Hauptecke B die Gerade $BN \# AC$ und verbinde D und N durch eine Gerade, so ist $DN = \delta_1$. Zieht man ferner aus D die Gerade $DM \# AC$ und verbindet B und M, so wird die Gerade $BM = \delta_2$; und macht man $BP \# AD$ und $DP \# AB$ und verbindet C und P, so ist die Gerade $CP = \delta_3$. Diese Construktion zeigt erstens, dass die Hülfsgrössen $\delta_1\delta_2\delta_3$ die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten sind, und zweitens, dass sie sich sämmtlich in einem und demselben Punkte schneiden und gegenseitig halbiren müssen. Bezeichnet man von den Winkeln, welche je zwei der Linien $\delta_1\delta_2\delta_3$ mit einander an ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte machen, diejenigen, die den Seiten $a\ b\ c$ gegenüberliegen, beziehungsweise mit (δ_{23}) (δ_{13}) (δ_{12}), so hat man noch:

$$\left.\begin{aligned}
4a^2 &= \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 - 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}) \\
4b^2 &= \delta_1{}^2 + \delta_3{}^2 - 2\delta_1\delta_3 \cos(\delta_{13}) \\
4c^2 &= \delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 - 2\delta_1\delta_2 \cos(\delta_{12}) \\
4a_1{}^2 &= \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 + 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}) \\
4b_1{}^2 &= \delta_1{}^2 + \delta_3{}^2 + 2\delta_1\delta_3 \cos(\delta_{13}) \\
4c_1{}^2 &= \delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + 2\delta_1\delta_2 \cos(\delta_{12})
\end{aligned}\right\} 5.$$

Aus den bisher gefundenen Formeln ergeben sich nun durch zweckmässige Verbindung derselben folgende neue Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 &= 2(c^2 + c_1{}^2) \\
\delta_1{}^2 + \delta_3{}^2 &= 2(b^2 + b_1{}^2) \\
\delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 &= 2(a^2 + a_1{}^2)
\end{aligned}\right\} 6.$$

Demnach ist in jedem vollständigen Vierecke die doppelte Summe der Quadrate zweier Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der doppelten Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten der beiden anderen Paare von Gegenseiten.

Unmittelbar ergiebt sich hieraus:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1{}^2 &= -a^2 - a_1{}^2 + b^2 + b_1{}^2 + c^2 + c_1{}^2 \\
\delta_2{}^2 &= a^2 + a_1{}^2 - b^2 - b_1{}^2 + c^2 + c_1{}^2 \\
\delta_3{}^2 &= a^2 + a_1{}^2 + b^2 + b_1{}^2 - c^2 - c_1{}^2 \\
2(b^2 + b_1{}^2 + c^2 + c_1{}^2) &= 2\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 \\
2(c^2 + c_1{}^2 + a^2 + a_1{}^2) &= \delta_1{}^2 + 2\delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 \\
2(a^2 + a_1{}^2 + b^2 + b_1{}^2) &= \delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + 2\delta_3{}^2 \\
\delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 &= a^2 + a_1{}^2 + b^2 + b_1{}^2 + c^2 + c_1{}^2
\end{aligned}\right\} 7.$$

welches die bekannten von **Euler** gefundenen Sätze sind. Für die verschiedenen hier vorkommenden Winkel ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_2{}^2 - \delta_3{}^2 &= 4aa_1 \cos A, & a_1{}^2 - a^2 &= \delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23}) \\
\delta_3{}^2 - \delta_1{}^2 &= 4bb_1 \cos B, & b_1{}^2 - b^2 &= \delta_1\delta_3 \cos(\delta_{13}) \\
\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2 &= 4cc_1 \cos C, & c_1{}^2 - c^2 &= \delta_1\delta_2 \cos(\delta_{12})
\end{aligned}\right\} 8.$$

$$\left.\begin{aligned}
a^2 + a_1{}^2 &= b^2 + b_1{}^2 - 2cc_1 \cos C = c^2 + c_1{}^2 + 2bb_1 \cos B \\
b^2 + b_1{}^2 &= c^2 + c_1{}^2 - 2aa_1 \cos A = a^2 + a_1{}^2 + 2cc_1 \cos C \\
c^2 + c_1{}^2 &= a^2 + a_1{}^2 - 2bb_1 \cos B = b^2 + b_1{}^2 + 2aa_1 \cos A \\
0 &= aa_1 \cos A + bb_1 \cos B + cc_1 \cos C
\end{aligned}\right\} 9.$$

Ferner erhält man durch Addition von (2) und (4) und gehörige Substitution aus (1) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
a^2 + \delta_1{}^2 &= b^2 + c^2 + 2b_1c_1 \cos(b_1c_1) \\
&= b_1{}^2 + c_1{}^2 + 2bc \cos(bc) \\
a_1{}^2 + \delta_1{}^2 &= b^2 + c_1{}^2 + 2b_1c \cos(b_1c) \\
&= b_1{}^2 + c^2 + 2bc_1 \cos(bc_1) \\
b^2 + \delta_2{}^2 &= c^2 + a^2 + 2a_1c_1 \cos(a_1c_1) \\
&= c_1{}^2 + a_1{}^2 + 2ac \cos(ac) \\
b_1{}^2 + \delta_2{}^2 &= c_1{}^2 + a^2 + 2ca_1 \cos(a_1c) \\
&= c^2 + a_1{}^2 + 2ac_1 \cos(ac_1) \\
c^2 + \delta_3{}^2 &= a^2 + b^2 + 2a_1b_1 \cos(a_1b_1) \\
&= a_1{}^2 + b_1{}^2 + 2ab \cos(ab) \\
c_1{}^2 + \delta_3{}^2 &= a^2 + b_1{}^2 + 2a_1b \cos(a_1b) \\
&= a_1{}^2 + b^2 + 2ab_1 \cos(ab_1)
\end{aligned}\right\} 10.$$

Sind daher die 9 Geraden $aa_1bb_1cc_1\delta_1\delta_2\delta_3$ gegeben, so lassen sich aus je sechsen von ihnen immer zwei Hauptwinkel finden. Sind die Hauptseiten allein gegeben, so reichen diese hin, alle drei charakteristischen Winkel zu berechnen; sollen hingegen die 4 Viereckswinkel irgend eines einfachen Viereckes gefunden werden, so muss ausser den 6 Hauptseiten auch noch eine der Grössen δ und zwar diejenige gegeben sein, welche zu den Diagonalen dieses Viereckes gehört. Demnach ist also z. B.

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= \frac{c^2 + c_1{}^2 - b^2 - b_1{}^2}{2aa_1} = \frac{\delta_2{}^2 - \delta_3{}^2}{4aa_1} \\
\cos B &= \frac{a^2 + a_1{}^2 - c^2 - c_1{}^2}{2bb_1} = \frac{\delta_3{}^2 - \delta_1{}^2}{4bb_1} \\
\cos C &= \frac{b^2 + b_1{}^2 - a^2 - a_1{}^2}{2cc_1} = \frac{\delta_1{}^2 - \delta_2{}^2}{4cc_1}
\end{aligned}\right\} 11.$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\cos(ab) &= \frac{c^2 + \delta_3{}^2 - a_1{}^2 - b_1{}^2}{2ab}, \quad \cos(ab_1) = \frac{c_1{}^2 + \delta_3{}^2 - a_1{}^2 - b^2}{2ab_1} \\
\cos(a_1b_1) &= \frac{c^2 + \delta_3{}^2 - a^2 - b^2}{2a_1b_1}, \quad \cos(a_1b) = \frac{c_1{}^2 + \delta_3{}^2 - a^2 - b_1{}^2}{2a_1b}
\end{aligned}\right\} 12.$$

u. s. w.

§. 6.

Neben den in §. 4. unter Nr. 1. zusammengestellten Fundamentalgleichungen giebt es aber bekanntlich noch eine zweite, in welcher die Sinusse der Winkel vorkommen, und die gewöhnlich unter der Form: $0 = m \sin P + n \sin Q + p \sin R$ für das Viereck, und $m \sin P = n \sin Q$ für das Dreieck, dargestellt wird. Der Kürze halber sollen im Folgenden beide gleich zusammengezogen werden; dies giebt die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
a \sin(ac_1) &= b \sin(bc_1) = c \sin C - a_1 \sin(a_1c_1) \\
&= c \sin C - b_1 \sin(b_1c_1) \\
a \sin(ac) &= b_1 \sin(b_1c) = c_1 \sin C - a_1 \sin(a_1c) \\
&= c_1 \sin C - b \sin(bc) \\
a \sin(ab_1) &= c \sin(b_1c) = b \sin B + a_1 \sin(a_1b_1) \\
&= b \sin B + c_1 \sin(b_1c_1) \\
a \sin(ab) &= c_1 \sin(bc_1) = b_1 \sin B + a_1 \sin(a_1b) \\
&= b_1 \sin B + c \sin(bc) \\
b \sin(a_1b) &= c \sin(a_1c) = a \sin A + b_1 \sin(a_1b_1) \\
&= a \sin A + c_1 \sin(a_1c_1) \\
b \sin(ab) &= c_1 \sin(ac_1) = a_1 \sin A + b_1 \sin(ab_1) \\
&= a_1 \sin A + c \sin(ac)
\end{aligned}\right\} 13.$$

Multiplicirt man diese sechs Gleichungen ihrer Ordnung nach mit den Grössen $c_1 c b_1 b a_1 a$, so erhält man durchgängig die Produkte je zweier Hauptseiten in den Sinus des eingeschlossenen Haupt- oder charakteristischen Winkels. Werden daher statt dieser Produkte die entsprechenden Flächenräume gesetzt und zugleich die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}
aa_1 \sin A &= 2F'' \\
bb_1 \sin B &= 2F' \\
cc_1 \sin C &= 2F
\end{aligned}\right\} 14.$$

eingeführt, so ergiebt sich bei gehöriger Vergleichung:

$$\left.\begin{aligned}
F &= T_1 + T_2 = T_3 + T_4 \\
F' &= T_1 - T_4 = T_3 - T_2 \\
F'' &= T_1 - T_3 = T_4 - T_2
\end{aligned}\right\} 15.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dass die Grössen $FF'F''$ die Flächeninhalte der einfachen Vierecke erster, zweiter und dritter Form sein müssen, und ein Blick auf Taf. III. Fig. 3. giebt unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned}
\text{Dreieck } BCP &= F'' = \tfrac{1}{2}aa_1 \sin A = \tfrac{1}{4}\delta_2\delta_3 \sin(\delta_{23}) \\
\text{Dreieck } DCP &= F' = \tfrac{1}{2}bb_1 \sin B = \tfrac{1}{4}\delta_1\delta_3 \sin(\delta_{13}) \\
\text{Dreieck } DBM &= F = \tfrac{1}{2}cc_1 \sin C = \tfrac{1}{4}\delta_1\delta_2 \sin(\delta_{12})
\end{aligned}\right\} 16.$$

Durch gehörige Verbindung der Ausdrücke in (14) und (15) findet man noch die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
F + F' &= T_1 + T_3, \quad F - F' = T_2 + T_4 \\
F + F'' &= T_1 + T_4, \quad F - F'' = T_2 + T_3 \\
F' + F'' &= T_1 - T_2, \quad F' - F'' = T_3 - T_4
\end{aligned}\right\} 17.$$

ingleichen

$$\left.\begin{array}{l} 2T_1 = F + F' + F'' \\ 2T_3 = F + F' - F'' \\ 2T_4 = F - F' + F'' \\ 2T_2 = F - F' - F'' \end{array}\right\} 18.$$

§. 7.

Wie wir bisher Relationen zwischen den Seiten, ingleichen zwischen den verschiedenen Flächenräumen zusammengestellt haben, so lassen sich auch Relationen zwischen den verschiedenen Winkeln angeben. Zu dem Ende setze man:

$$\left.\begin{array}{l} (ab) + (a_1 b_1) = \psi \\ (ac_1) - (a_1 c) = \psi' \\ (bc_1) - (b_1 c) = \psi'' \end{array}\right\} 19.$$

so ist zuvörderst klar, dass, wenn $\psi \lessgtr 180^\circ$ wird, ψ' und $\psi'' \gtrless 0^\circ$ werden muss, weshalb denn unter allen Umständen

$$\psi + \psi' + \psi'' = 180^\circ \quad (20)$$

ist. Auch zeigt ein Blick auf Taf. III. Fig. 1., dass ψ die Summe zweier gegenüberliegender Hauptwinkel im einfachen Vierecke der ersten Form, $360^\circ + \psi'$ und $360^\circ + \psi''$ hingegen dasselbe für die einfachen Vierecke zweiter und dritter Form ist. Mit Hülfe dieser drei Winkel nun so wie der drei charakteristischen Winkel des Viereckes können alle 12 Hauptwinkel auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{array}{l} (ab) = \tfrac{1}{2}(\psi - A + B) - 90^\circ \\ (a_1 b_1) = \tfrac{1}{2}(\psi + A - B) + 90^\circ \\ (ab_1) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(-\psi + A + B) \\ (a_1 b) = 270^\circ - \tfrac{1}{2}(\psi + A + B) \end{array}\right\} 21.$$

$$\left.\begin{array}{ll} (ac) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(A + C + \psi'), & (bc) = \tfrac{1}{2}(B + C - \psi'') - 90^\circ \\ (a_1 c_1) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(A + C - \psi'), & (b_1 c_1) = \tfrac{1}{2}(B + C + \psi'') - 90^\circ \\ (ac_1) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(A - C + \psi'), & (bc_1) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(-B + C + \psi'') \\ (a_1 c) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(-A + C + \psi'), & (b_1 c) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(B - C + \psi'') \end{array}\right\} 22.$$

Es sind daher allgemein in jedem einfachen Vierecke die vier Viereckswinkel bekannt, wenn die Summe zweier gegenüberliegender, und die beiden zu den Vierecksseiten gehörigen charakteristischen Winkel gegeben sind. Mit Hülfe dieser Ausdrücke lassen sich eine ungemein grosse Masse von Relationen zwischen den einzelnen Winkeln des vollständigen Viereckes bilden. Im Folgenden sollen einige derselben zusammengestellt werden, da wir sie späterhin in Anwendung bringen müssen.

$$\left.\begin{array}{l} \cos(ab)\cos(a_1 b_1) + \cos(ab_1)\cos(a_1 b) = +\cos\psi - \cos A \cos B \\ \cos(ab)\cos(a_1 b) + \cos(a_1 b_1)\cos(ab_1) = -\cos A + \cos\psi \cos B \\ \cos(ab)\cos(ab_1) + \cos(a_1 b_1)\cos(a_1 b) = +\cos B - \cos\psi \cos A \end{array}\right\} 23.$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(ab)\sin(a_1b_1)+\sin(ab_1)\sin(a_1b)&=-\cos\psi-\cos A\cos B\\
\sin(ab)\sin(a_1b)+\sin(a_1b_1)\sin(ab_1)&=+\cos A+\cos\psi\cos B\\
\sin(ab)\sin(ab_1)+\sin(a_1b_1)\sin(a_1b)&=-\cos B-\cos\psi\cos A
\end{aligned}\right\}\quad 24.$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(ab)\cos(a_1b_1)-\cos(ab_1)\cos(a_1b)&=-\sin A\sin B\\
\cos(ab)\cos(a_1b)-\cos(a_1b_1)\cos(ab_1)&=-\sin\psi\sin B\\
\cos(ab)\cos(ab_1)-\cos(a_1b_1)\cos(a_1b)&=-\sin\psi\sin A
\end{aligned}\right\}\quad 25.$$

u. s. w. Nimmt man hingegen linker Hand immer nur die Hälften der Hauptwinkel, so wird:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\tfrac{1}{2}(ab)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b_1)-\cos\tfrac{1}{2}(ab_1)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b)\\
&\qquad=\cos\tfrac{1}{2}\psi-\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\\
&\cos\tfrac{1}{2}(ab)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b)-\cos\tfrac{1}{2}(a_1b_1)\cos\tfrac{1}{2}(ab_1)\\
&\qquad=\sin\tfrac{1}{2}A-\cos\tfrac{1}{2}\psi\cos\tfrac{1}{2}B\\
&\cos\tfrac{1}{2}(ab)\cos\tfrac{1}{2}(ab_1)-\cos\tfrac{1}{2}(a_1b_1)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b)\\
&\qquad=\cos\tfrac{1}{2}B-\cos\tfrac{1}{2}\psi\sin\tfrac{1}{2}A
\end{aligned}\right\}\quad 26.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\tfrac{1}{2}(ab)\sin\tfrac{1}{2}(a_1b_1)-\sin\tfrac{1}{2}(ab_1)\sin\tfrac{1}{2}(a_1b)\\
&\qquad=\cos\tfrac{1}{2}\psi+\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\\
&\sin\tfrac{1}{2}(ab)\sin\tfrac{1}{2}(a_1b)-\sin\tfrac{1}{2}(a_1b_1)\sin\tfrac{1}{2}(ab_1)\\
&\qquad=\sin\tfrac{1}{2}A+\cos\tfrac{1}{2}\psi\cos\tfrac{1}{2}B\\
&\sin\tfrac{1}{2}(ab)\sin\tfrac{1}{2}(ab_1)-\sin\tfrac{1}{2}(a_1b_1)\sin\tfrac{1}{2}(a_1b)\\
&\qquad=\cos\tfrac{1}{2}B+\cos\tfrac{1}{2}\psi\sin\tfrac{1}{2}A
\end{aligned}\right\}\quad 27.$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(ab)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b_1)+\cos\tfrac{1}{2}(ab_1)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b)&=\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\\
\cos\tfrac{1}{2}(ab)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b)+\cos\tfrac{1}{2}(a_1b_1)\cos\tfrac{1}{2}(ab_1)&=\sin\tfrac{1}{2}\psi\sin\tfrac{1}{2}B\\
\cos\tfrac{1}{2}(ab)\cos\tfrac{1}{2}(ab_1)+\cos\tfrac{1}{2}(a_1b_1)\cos\tfrac{1}{2}(a_1b)&=\sin\tfrac{1}{2}\psi\cos\tfrac{1}{2}A
\end{aligned}\right\}\quad 28.$$

u. s. w. Wollte man alle möglichen Combinationen der vorliegenden Gattung unter den 12 Hauptwinkeln entwickeln, so würde dies 72 verschiedene Systeme von Ausdrücken geben, deren jedes aus drei einzelnen Gleichungen bestände. Es lohnt jedoch nicht der Mühe, mehr von diesen Formeln hier aufzuführen, da sie, sobald man ihrer bedarf, aus den Gleichungen (21) und (22) unmittelbar gefunden werden können.

§. 8.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun dazu übergehen, andere verstektere Relationen zwischen den Bestandtheilen des vollständigen Viereckes aufzusuchen, zu welchem Ende wir folgendes trigonometrische Theorem vorausschicken, das wir an einem anderen Orte (M. s. Nr. XIV. im 2. Hefte) näher entwickelt und begründet haben. Sind nämlich kmn die drei Seiten, KMN die ihnen gegenüberliegenden Winkel und Θ der Flächeninhalt irgend eines beliebigen Dreieckes, und werden für ein anderes, ebenfalls ganz beliebiges, Dreieck dieselben Grössen beziehungsweise mit $k_1 m_1 n_1$ $K_1 M_1 N_1 \Theta_1$ bezeichnet;

so finden für den Fall, dass $n = n_1$ ist, stets folgende Gleichungen statt:

$$\left.\begin{aligned} k^2k_1^2 + m^2m_1^2 - 2kk_1mm_1 \cos(N \pm N_1) &= n^2(k_1^2 + m^2 - 2k_1m \cos(K \pm M_1)) \\ &= n^2(k^2 + m_1^2 - 2km_1 \cos(M \pm K_1)) \\ k^2m_1^2 + k_1^2m^2 - 2kk_1mm_1 \cos(N \pm N_1) &= n^2(k^2 + k_1^2 - 2kk_1 \cos(M \pm M_1)) \\ &= n^2(m^2 + m_1^2 - 2mm_1 \cos(K \pm K_1)) \end{aligned}\right\} 29.$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2{}_{km} &= (k + k_1 + m - m_1)(k + k_1 - m + m_1)(k - k_1 + m + m_1)(-k + k_1 + m + m_1) - 8kk_1mm_1 \\ &= 16(\Theta \pm \Theta_1)^2 + 8kk_1mm_1 \cos(N \pm N_1) \\ &= 16\left(\frac{\Theta(m_1^2 - k_1^2) \pm \Theta_1(m^2 - k^2)}{n^2}\right)^2 + 8kk_1mm_1 \cos[(M - K) \pm (M_1 - K_1)] \end{aligned}\right\} 30.$$

$$\left.\begin{aligned}2\Theta_{,} &= k_1 m \sin K \cos M_1 + k m_1 \cos K_1 \sin M \\ &= k k_1 \sin M \cos M_1 + m m_1 \sin K \cos K_1 \\ 2\Theta_1 &= k_1 m \cos K \sin M_1 + k m_1 \sin K_1 \cos M \\ &= k k_1 \cos M \sin M_1 + m m_1 \cos K \sin K_1\end{aligned}\right\} 31.$$

§. 9.

Die vorstehenden Ausdrücke gestatten nun eine unmittelbare Anwendung auf das Viereck, da in diesem jede Hauptseite auch zu zwei Hauptdreiecken gehört. Setzt man daher zuerst $c = n$ und dann $c_1 = n$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}c^2 c_1^2 &= a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 - 2aa_1 bb_1 \cos\psi \\ c^2 f_1^2 &= a^2 b^2 + a_1^2 b_1^2 - 2aa_1 bb_1 \cos\psi \\ c_1^2 f_2^2 &= a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 - 2aa_1 bb_1 \cos\psi\end{aligned}\right\} 32.$$

$$\left.\begin{aligned}c^2 \delta_2^2 &= a^2 b^2 + a_1^2 b_1^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A+B) \\ c_1^2 \delta_2^2 &= a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A-B) \\ c^2 \eta_1^2 &= a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A+B) \\ c_1^2 \eta_2^2 &= a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + 2aa_1 bb_1 \cos(A-B)\end{aligned}\right\} 33.$$

die vier Grössen $f_1 f_2 \eta_1 \eta_2$ bestimmen sich durch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}f_1^2 &= a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos(C+\psi') = b^2 + b_1^2 - 2bb_1 \cos(C-\psi'') \\ f_2^2 &= a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos(C-\psi') = b^2 + b_1^2 - 2bb_1 \cos(C+\psi'') \\ \eta_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos[(bc) - (ac)] \\ &= a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos[(b_1 c) - (a_1 c)] \\ \eta_2^2 &= a^2 + b_1^2 - 2ab_1 \cos[(ac_1) - (b_1 c_1)] \\ &= a_1^2 + b^2 - 2a_1 b \cos[(bc_1) - (a_1 c_1)]\end{aligned}\right\} 34.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Hülfsgrössen ist folgende. Denkt man sich (Taf. III. Fig. 4.) in dem einfachen Vierecke aba_1b_1 die beiden über der Diagonale c stehenden Seiten b und a_1 mit einander vertauscht, so erhält man ein neues Viereck von der Ordnung aa_1bb_1. In diesem ist die eine Diagonale c unverändert geblieben; statt der anderen Diagonale c_1 aber des ursprünglichen Viereckes ist eine neue Diagonale entstanden, welche gleich f_1 ist. Die doppelte Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Diagonalen c und f_1 ist dann gleich der Grösse η_1. Hätte man dagegen in Taf. III. Fig. 4. die beiden Seiten a_1b_1 über der Diagonale c_1 mit einander vertauscht, so erhielte man ein neues Viereck von der Ordnung abb_1a_1 und in diesem würden c_1 und f_2 die beiden Diagonalen und η_2 die doppelte Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte sein. Uebrigens ist klar, dass in beiden abgeänderten Vierecken die Grössen F und ψ ihren Werth nicht ändern. — Endlich findet man mittelst des Theorems Nr. 30. noch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\varphi^2{}_{ab} &= (a+a_1+b-b_1)(a+a_1-b+b_1)(a-a_1+b+b_1)\times \\ &\quad \times(-a+a_1+b+b_1)-8aa_1bb_1 \\ &= 16F^2+8aa_1bb_1 \cos\psi \\ &= 16(F'\pm F'')^2-8aa_1bb_1 \cos(A\mp B) \\ &= 16\left(\frac{T_1(b_1{}^2-a_1{}^2)-T_2(b^2-a^2)}{c_1{}^2}\right)^2-8aa_1bb_1 \cos(A+B) \\ &= 16\left(\frac{T_1(b^2-a_1{}^2)-T_4(b_1{}^2-a^2)}{c^2}\right)-8aa_1bb_1 \cos(A-B)\end{aligned}\right\} 35.$$

§. 10.

Wendet man das allgemeine Theorem auf diejenigen Hauptdreiecke an, welche über den Seiten b und b_1 stehen, d. h. setzt man $b=n$ und dann $b_1=n$, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}b^2b_1{}^2 &= a^2a_1{}^2+c^2c_1{}^2-2aa_1cc_1 \cos\psi' \\ b^2c_1{}^2 &= a^2c^2+a_1{}^2c_1{}^2-2aa_1cc_1 \cos\psi' \\ b_1{}^2c_2{}^2 &= a^2c_1{}^2+a_1{}^2c^2-2aa_1cc_1 \cos\psi'\end{aligned}\right\} 36.$$

$$\left.\begin{aligned}b^2\delta_2{}^2 &= a^2c^2+a_1{}^2c_1{}^2+2aa_1cc_1 \cos(A-C) \\ b_1{}^2\delta_2{}^2 &= a^2c_1{}^2+a_1{}^2c^2+2aa_1cc_1 \cos(A+C) \\ b^2\zeta_1{}^2 &= a^2a_1{}^2+c^2c_1{}^2+2aa_1cc_1 \cos(A-C) \\ b_1{}^2\zeta_2{}^2 &= a^2a_1{}^2+c^2c_1{}^2+2aa_1cc_1 \cos(A+C)\end{aligned}\right\} 37.$$

$$\left.\begin{aligned}e_1{}^2 &= a^2+a_1{}^2-2aa_1 \cos(\psi+B)=c^2+c_1{}^2+2cc_1 \cos(B-\psi'') \\ e_2{}^2 &= a^2+a_1{}^2-2aa_1 \cos(\psi-B)=c^2+c_1{}^2+2cc_1 \cos(B+\psi'') \\ \zeta_1{}^2 &= a^2+c^2-2ac \cos[(ab)+(bc)] \\ &= a_1{}^2+c_1{}^2-2a_1c_1 \cos[(bc_1)+(a_1b)] \\ \zeta_2{}^2 &= a^2+c_1{}^2-2a_1c \cos[(ab_1)+(b_1c_1)] \\ &= a_1{}^2+c^2-2a_1c \cos[(a_1b_1)+(b_1c)]\end{aligned}\right\} 38.$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi^2{}_{ac} &= (a+a_1+c-c_1)(a+a_1-c+c_1)(a-a_1+c+c_1)\times \\ &\quad \times(-a+a_1+c+c_1)-8aa_1cc_1 \\ &= 16F'^2+8aa_1cc_1 \cos\psi' \\ &= 16(F\pm F'')^2-8aa_1cc_1 \cos(A\mp C) \\ &= 16\left(\frac{T_1(c^2-a_1{}^2)+T_4(c_1{}^2-a^2)}{b^2}\right)^2-8aa_1cc_1 \cos(A+C) \\ &= 16\left(\frac{T_3(c_1{}^2-a_1{}^2)+T_2(c^2-a^2)}{b_1{}^2}\right)^2-8aa_1cc_1 \cos(A-C)\end{aligned}\right\} 39.$$

Vertauscht man (Taf. III. Fig. 5.) über der Diagonale b die beiden Vierecksseiten a_1 und c, so erhält man ein neues Viereck, in welchem b und e_1 die Diagonalen und ζ_1 die doppelte Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der letzteren sind; vertauscht man dagegen die beiden Seiten a_1 und c_1 über der Diagonale b_1, so werden b_1 und e_2 die neuen Diagonalen, und ζ_2 die doppelte Verbindungslinie zwischen deren Mittelpunkten.

§. 11.

Wendet man endlich das allgemeine Theorem auf die Hauptdreiecke über den Seiten a und a_1 an, so ergeben sich für $a = n$ und $a_1 = n$ die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} a^2a_1^2 &= b^2b_1^2 + c^2c_1^2 - 2bb_1cc_1 \cos\psi'' \\ a^2d_1^2 &= b^2c^2 + b_1^2c_1^2 - 2bb_1cc_1 \cos\psi'' \\ a^2d_2^2 &= b^2c_1^2 + b_1^2c^2 - 2bb_1cc_1 \cos\psi'' \end{aligned}\right\} 40.$$

$$\left.\begin{aligned} a^2\delta_1^2 &= b^2c^2 + b_1^2c_1^2 + 2bb_1cc_1 \cos(B-C) \\ a_1^2\delta_1^2 &= b^2c_1^2 + b_1^2c^2 + 2bb_1cc_1 \cos(B+C) \\ a^2\varepsilon_1^2 &= b^2b_1^2 + c^2c_1^2 + 2bb_1cc_1 \cos(B-C) \\ a_1^2\varepsilon_2^2 &= b^2b_1^2 + c^2c_1^2 + 2bb_1cc_1 \cos(B+C) \end{aligned}\right\} 41.$$

$$\left.\begin{aligned} d_1^2 &= c^2+c_1^2-2cc_1 \cos(A+\psi') = b^2+b_1^2+2bb_1 \cos(\psi-A) \\ d_2^2 &= c^2+c_1^2-2cc_1 \cos(A-\psi') = b^2+b_1^2+2bb_1 \cos(\psi+A) \\ \varepsilon_1^2 &= b^2+c^2-2bc \cos[(ac)+(ab)] \\ &= b_1^2+c_1^2-2b_1c_1 \cos[(ac_1)+(ab_1)] \\ \varepsilon_2^2 &= b^2+c_1^2-2bc_1 \cos[(a_1b)+(a_1c_1)] \\ &= b_1^2+c^2-2b_1c \cos[(a_1c)+(a_1b)] \end{aligned}\right\} 42.$$

Hier entstehen d_1 und ε_1 auf die bekannte Weise, wenn über a in Taf. III. Fig. 6. die Seiten b und c_1 vertauscht werden; hingegen erhält man die Diagonale d_2 und die Verbindungslinie ε_2, wenn man über b_1 die Seiten a_1 und c_1 verwechselt. Endlich ist noch:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2_{bc} &= (b+b_1+c-c_1)(b+b_1-c+c_1)(b-b_1+c+c_1)\times \\ &\qquad \times(-b+b_1+c+c_1) - 8bb_1cc_1 \\ &= 16F'''^2 + 8bb_1cc_1 \cos\psi'' \\ &= 16(F \pm F')^2 - 8bb_1cc_1 \cos(B \mp C) \\ &= 16\left(\frac{T_3(b^2-c_1^2)+T_1(b_1^2-c^2)}{a^2}\right)^2 - 8bb_1cc_1 \cos(B+C) \\ &= 16\left(\frac{T_4(b^2-c^2)+T_2(b_1^2-c_1^2)}{a_1^2}\right)^2 - 8bb_1cc_1 \cos(B-C) \end{aligned}\right\} 43.$$

§. 12.

Von den gefundenen Ausdrücken wollen wir nun zuerst folgende zusammenstellen:

$$\left.\begin{aligned} a^2a_1^2 &= b^2b_1^2 + c^2c_1^2 - 2bb_1cc_1 \cos\psi'' \\ b^2b_1^2 &= a^2a_1^2 + c^2c_1^2 - 2aa_1cc_1 \cos\psi' \\ c^2c_1^2 &= a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - 2aa_1bb_1 \cos\psi \end{aligned}\right\} 44.$$

Es ist demnach in jedem einfachen Vierecke das Quadrat des Produktes beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Produkte je zweier Gegenseiten, vermindert um das doppelte Produkt sämmtlicher vier Seiten in den Cosinus der Summe zweier Gegenwinkel. Dieser

Satz bildet den Ptolemäischen Lehrsatz in seiner grössten Allgemeinheit; er geht in den letzteren über, wenn $\psi = 180^\circ$ wird, wo dann $\psi' = \psi'' = 0^\circ$ ist. Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} 16F^2 &= (a+a_1+b-b_1)(a+a_1-b+b_1)(a-a_1+b+b_1)\times \\ &\quad \times(-a+a_1+b+b_1) - 16aa_1bb_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi \\ 16F'^2 &= (a+a_1+c-c_1)(a+a_1-c+c_1)(a-a_1+c+c_1)\times \\ &\quad \times(-a+a_1+c+c_1) - 16aa_1cc_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi' \\ 16F''^2 &= (b+b_1+c-c_1)(b+b_1-c+c_1)(b-b_1+c+c_1)\times \\ &\quad \times(-b+b_1+c+c_1) - 16bb_1cc_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi'' \end{aligned}\right\} 45.$$

Demnach ist der vierfache Flächeninhalt jedes einfachen Viereckes gleich der Quadratwurzel aus einem Unterschiede, dessen Minuendus aus dem Produkte der vier Ueberschüsse je dreier Seiten über die vierte besteht, und dessen Subtrahendus gleich ist dem 16fachen Produkte der vier Seiten in das Quadrat des Cosinus von der halben Summe zweier Gegenwinkel.

Sind daher vier Seiten gegeben, um daraus ein einfaches Viereck zu bilden, so wird dies den grössten oder kleinsten Flächenraum erhalten, wenn es beziehungsweise ein Sehnenviereck erster oder zweiter Form bildet.

§. 13.

Die Gleichungen Nr. 44. zeigen ferner, dass, wenn man die Produkte je zweier Gegenseiten eines vollständigen Viereckes als die Werthe der Seiten eines geradlinigen Dreieckes betrachtet, alsdann die Winkel $\psi\ \psi'\ \psi''$ die Winkel dieses Dreieckes sein müssen. Wendet man daher auf diese Ausdrücke die bekannten Transformationen der ebenen Trigonometrie an, so erhält man sogleich, wenn zur Abkürzung $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 2ss_1$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} aa_1bb_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi &= ss_1(ss_1 - cc_1) \\ aa_1cc_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi' &= ss_1(ss_1 - bb_1) \\ bb_1cc_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}\psi'' &= ss_1(ss_1 - aa_1) \end{aligned}\right\} 46.$$

$$\left.\begin{aligned} \tan^2 \tfrac{1}{2}\psi &= \frac{(ss_1 - aa_1)(ss_1 - bb_1)}{ss_1(ss_1 - cc_1)} \\ \tan^2 \tfrac{1}{2}\psi' &= \frac{(ss_1 - aa_1)(ss_1 - cc_1)}{ss_1(ss_1 - bb_1)} \\ \tan^2 \tfrac{1}{2}\psi'' &= \frac{(ss_1 - bb_1)(ss_1 - cc_1)}{ss_1(ss_1 - aa_1)} \end{aligned}\right\} 47.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos \frac{1}{2}(\psi'' - \psi')}{\sin \frac{1}{2}\psi} &= \frac{aa_1 + bb_1}{cc_1} \\ \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi'' - \psi')}{\cos \frac{1}{2}\psi} &= \frac{aa_1 - bb_1}{cc_1} \end{aligned}\right\} 48.$$

Die Gleichung (46) zeigt übrigens, dass so lange nicht $\psi = 180^\circ$ ist, immer

$$\left.\begin{array}{l} aa_1 + bb_1 > cc_1 \\ aa_1 + cc_1 > bb_1 \\ bb_1 + cc_1 > aa_1 \end{array}\right\} 49.$$

sein muss, d. h. in jedem vollständigen Vierecke ist die Summe der Rechtecke aus je zwei Paaren von Gegenseiten grösser als das Rechteck aus dem dritten Paare derselben. — Wir wollen ferner den Flächeninhalt des Dreieckes, welches die Grössen aa_1 bb_1 cc_1 zu Seiten hat, mit E^2 bezeichnen und E die excentrische Fläche des Viereckes nennen, so findet man für dieselbe:

$$\left.\begin{array}{l} E^4 = \frac{1}{16}(aa_1 + bb_1 + cc_1)(aa_1 + bb_1 - cc_1)(aa_1 - bb_1 + cc_1) \\ \qquad \times(-aa_1 + bb_1 + cc_1) \\ \pm E^2 = \frac{1}{2}aa_1bb_1 \sin\psi = \frac{1}{2}aa_1cc_1 \sin\psi' = \frac{1}{2}bb_1cc_1 \sin\psi'' \\ \quad = \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2}{\cot\psi + \cot\psi' + \cot\psi''} = \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - c^2c_1^2}{\cot\psi} \\ \quad = \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2a_1^2 - b^2b_1^2 + c^2c_1^2}{\cot\psi'} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2}{\cot\psi''} \end{array}\right\} 50.$$

Diese Fläche ist positiv, Null, oder negativ, je nachdem ψ kleiner, gleich oder grösser als 180° ist. Sie drückt demnach gewissermaassen die Grösse der Abweichung des Viereckes von einem Sehnenviereck aus, weshalb der oben für sie gewählte Name nicht ganz unpassend sein möchte. Uebrigens lässt sich E noch auf mehrere andere Arten ausdrücken. So erhält man z. B.

$$8E^2 = \frac{aa_1(d_1^2 - d_2^2)}{\sin A} = \frac{bb_1(e_1^2 - e_2^2)}{\sin B} = \frac{cc_1(f_2^2 - f_1^2)}{\sin C} \quad 51.$$

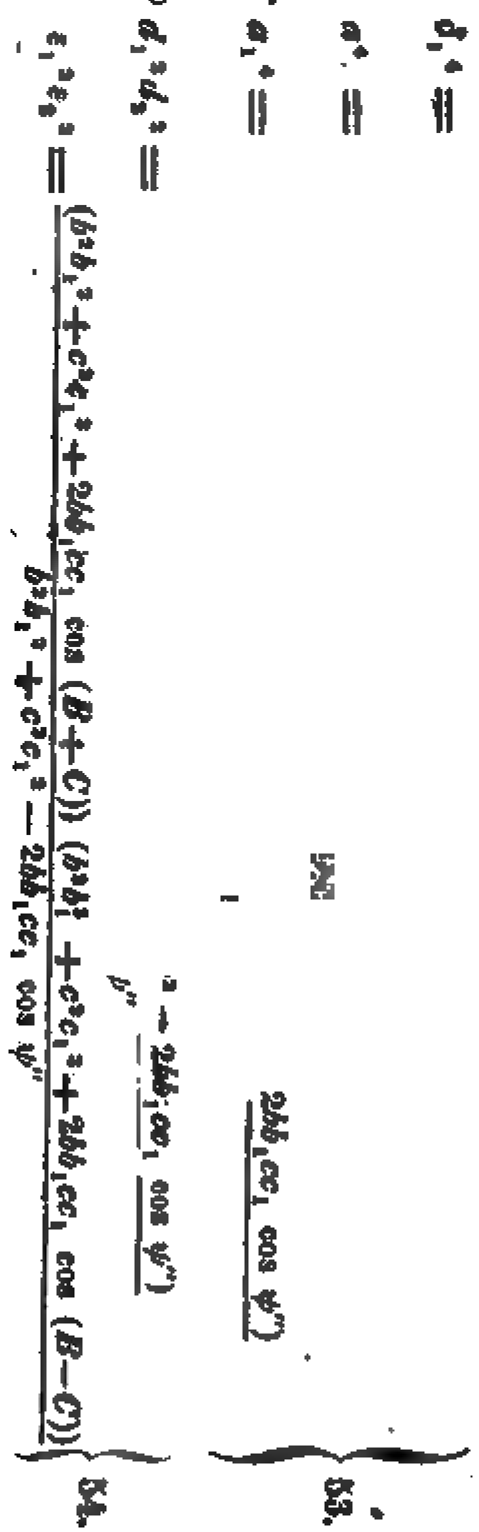
oder auch:

$$\left.\begin{array}{l} E^4 = \frac{1}{16}(ab + a_1b_1 + cf_1)\ (ab + a_1b_1 - cf_1) \\ \qquad \times(ab - a_1b_1 + cf_1)\ (-ab + a_1b_1 + cf_1) \\ \quad = \frac{1}{16}(ab_1 + a_1b + c_1f_2)\ (ab_1 + a_1b - c_1f_2) \\ \qquad \times(ab_1 - a_1b + c_1f_2)\ (-ab_1 + a_1b + c_1f_2) \\ \quad = \frac{1}{16}(ac + a_1c_1 + be_1)\ (ac + a_1c_1 - be_1) \\ \qquad \times(ac - a_1c_1 + be_1)\ (-ac + a_1c_1 + be_1) \\ \quad = \frac{1}{16}(ac_1 + a_1c + b_1e_2)\ (ac_1 + a_1c - b_1e_2) \\ \qquad \times(ac_1 - a_1c + b_1e_2)\ (-ac_1 + a_1c + b_1e_2) \\ \quad = \frac{1}{16}(bc + b_1c_1 + ad_1)\ (bc + b_1c_1 - ad_1) \\ \qquad \times(bc - b_1c_1 + ad_1)\ (-bc + b_1c_1 + ad_1) \\ \quad = \frac{1}{16}(bc_1 + b_1c + a_1d_2)\ (bc_1 + b_1c - a_1d_2) \\ \qquad \times(bc_1 - b_1c + a_1d_2)\ (-bc_1 + b_1c + a_1d_2) \end{array}\right\} 52.$$

Die letztern Gleichungen zeigen, dass das Maass der Abweichung des Viereckes vom Sehnenvierecke stets dasselbe bleibt, wenn man auch über irgend einer beliebigen Hauptseite zwei andere Hauptseiten verwechselt; so dass hiernach eine und dieselbe excentrische Fläche zu neun verschiedenen Vierecken gehört.

§. 14.

Aus den. in den vorletzten drei Paragraphen gefundenen Au drücken können nun eine ziemliche Zahl anderer abgeleitet werde von denen indessen nur einige beispielsweise hier Platz finden solle



$$\frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2c^2 + b_1^2c_1^2 + 2bb_1cc_1 \cos(B-C)}{b^2c_1^2 + b_1^2c^2 + 2bb_1cc_1 \cos(B+C)} = \frac{d_2^2 + \varepsilon_2^2 - \delta_1^2}{d_1^2 + \varepsilon_1^2 - \delta_1^2} \quad (55$$

u. s. w. Ferner ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 + \delta_1^2 = d_2^2 + \varepsilon_2^2, & a_1^2 + \delta_1^2 = d_1^2 + \varepsilon_1^2 \\ b^2 + \delta_2^2 = e_2^2 + \zeta_2^2, & b_1^2 + \delta_2^2 = e_1^2 + \zeta_1^2 \\ c^2 + \delta_3^2 = f_2^2 + \eta_2^2, & c_1^2 + \delta_3^2 = f_1^2 + \eta_1^2 \end{array}\right\} 56.$$

so wie:

$$\left.\begin{aligned}
a^2+\varepsilon_1{}^2 &= b^2+b_1{}^2+2cc_1 \cos(A+\psi') \\
&= c^2+c_1{}^2-2bb_1 \cos(\psi-A) \\
a_1{}^2+\varepsilon_2{}^2 &= b^2+b_1{}^2+2cc_1 \cos(A-\psi') \\
&= c^2+c_1{}^2-2bb_1 \cos(\psi+A) \\
b^2+\zeta_1{}^2 &= c^2+c_1{}^2+2aa_1 \cos(\psi+B) \\
&= a^2+a_1{}^2-2cc_1 \cos(B-\psi'') \\
b_1{}^2+\zeta_2{}^2 &= c^2+c_1{}^2+2aa_1 \cos(\psi-B) \\
&= a^2+a_1{}^2-2cc_1 \cos(B+\psi'') \\
c^2+\eta_1{}^2 &= a^2+a_1{}^2+2bb_1 \cos(C-\psi'') \\
&= b^2+b_1{}^2-2aa_1 \cos(C+\psi') \\
c_1{}^2+\eta_2{}^2 &= a^2+a_1{}^2+2bb_1 \cos(C+\psi'') \\
&= b^2+b_1{}^2-2aa_1 \cos(C-\psi')
\end{aligned}\right\} 57.$$

Endlich ist auch noch:

$$\left.\begin{aligned}
16F'^2 &= 4c^2c_1{}^2-(-a^2-a_1{}^2+b^2+b_1{}^2)^2 \\
16F''^2 &= 4b^2b_1{}^2-(\ \ a^2+a_1{}^2-c^2-c_1{}^2)^2 \\
16F'''^2 &= 4a^2a_1{}^2-(-b^2-b_1{}^2+c^2+c_1{}^2)^2
\end{aligned}\right\} 58.$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
4F' &= (-a^2-a_1{}^2+b^2+b_1{}^2) \operatorname{tang} C \\
4F'' &= (\ \ a^2+a_1{}^2-c^2-c_1{}^2) \operatorname{tang} B \\
4F''' &= (-b^2-b_1{}^2+c^2+c_1{}^2) \operatorname{tang} A
\end{aligned}\right\} 59.$$

Andere Ausdrücke wie z. B.

$$\left.\begin{aligned}
16F'F'' &= c_1{}^2\eta_2{}^2-c^2\eta_1{}^2 \\
16FF''' &= b^2\zeta_1{}^2-b_1{}^2\zeta_2{}^2 \\
16FF' &= a^2\eta_1{}^2-a_1{}^2\eta_2{}^2
\end{aligned}\right\} 60.$$

sind zwar nicht ohne Interesse, führen jedoch auf zu specielle Betrachtungen, als dass wir sie hier näher erörtern könnten.

§. 15.

Es ist nun zunächst noch übrig, das zugeordnete Dreieck mit seinen Seiten und Winkeln zu betrachten, was mit Hülfe des allgemeinen Ptolemäischen Lehrsatzes auf sehr einfache Weise geschehen kann. Zuvörderst erhält man durch Anwendung des bekannten Satzes, dass Dreiecke von gleichen Höhen sich wie ihre Grundlinien verhalten, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
a+a_2 &= a\,.\,\frac{T_4}{F''}, \quad a_1+a_2 = a_1\,.\,\frac{T_1}{F'} \\
b+b_2 &= b\,.\,\frac{T_3}{F}, \quad b_1+b_2 = b_1\,.\,\frac{T_2}{F} \\
c-c_2 &= c\,.\,\frac{T_2}{F}, \quad c_1-c_2 = c_1\,.\,\frac{T_4}{F}
\end{aligned}\right\} 61.$$

und

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a \cdot \frac{T_2}{F''}, & b_2 &= b \cdot \frac{T_2}{F'}, & c_2 &= c \cdot \frac{T_1}{F} \\ a_3 &= a_1 \cdot \frac{T_3}{F'''}, & b_3 &= b_1 \cdot \frac{T_4}{F'}, & c_3 &= c_1 \cdot \frac{T_3}{F} \end{aligned}\right\} 62.$$

Bemerkt man sodann, dass jede zugeordnete Seite als Diagonale eines einfachen Viereckes angesehen werden kann, in welchem die von ihr, oder ihrer Verlängerung geschnittene Hauptseite die andere Diagonale bildet, so giebt das Theorem Nr. 44. augenblicklich folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} &F^2 F''^2 a_1^2 \alpha^2 \\ &= b^2c^2 \; T_2^4 + b_1^2 c_1^2 T_4^4 + 2bb_1cc_1 T_2^2 T_4^2 \cos (B-C) \\ &F^2 F''^2 a^2 \alpha^2 \\ &= b^2 c_1^2 T_3^4 + b_1^2 c^2 \; T_1^4 + 2bb_1cc_1 T_1^2 T_3^2 \cos (B+C) \\ &F^2 F''^2 b_1^2 \beta^2 \\ &= a^2c^2 \; T_2^4 + a_1^2 c_1^2 T_3^4 + 2aa_1cc_1 T_2^2 T_3^2 \cos (C-A) \\ &F^2 F''^2 b^2 \; \beta^2 \\ &= a^2 c_1^2 T_4^4 + a_1^2 c^2 \; T_1^4 + 2aa_1cc_1 T_1^2 T_4^2 \cos (C+A) \\ &F^2 F''^2 c_1^2 \gamma^2 \\ &= a^2 b^2 \; T_2^4 + a_1^2 b_1^2 T_1^4 + 2aa_1bb_1 T_1^2 T_2^2 \cos (A+B) \\ &F^2 F''^2 c^2 \; \gamma^2 \\ &= a^2 b_1^2 T_4^4 + a_1^2 b^2 \; T_3^4 + 2aa_1bb_1 T_3^2 T_4^2 \cos (A-B) \end{aligned}\right\} 63.$$

Diese Gleichungen gestatten nun eine grosse Masse von Umformungen. Setzt man z. B. in den beiden obersten $2T_2 = b_1c_1 \sin (b_1c_1)$ und $2T_4 = bc \sin (bc)$, und lösst F und F' nach Nr. 16. auf, so fällt der gemeinschaftliche Faktor $b^2 b_1^2 c^2 c_1^2$ ganz heraus und man bekommt:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\sin^2 B \sin^2 C \; a_1^2 \alpha^2 &= \sin^2 (b_1c_1) T_2^2 + \sin^2 (bc) \; T_4^2 \\ &\quad + 2\sin (b_1c_1) \sin (bc) \; T_2 T_4 \cos (B-C) \\ \tfrac{1}{4}\sin^2 B \sin^2 C \; a^2 \; \alpha^2 &= \sin^2 (b_1c) \; T_3^2 + \sin^2 (bc_1) T_1^2 \\ &\quad + 2\sin (b_1c) \; \sin (bc_1) T_1 T_3 \cos (B+C) \end{aligned}\right\} 64.$$

u. s. w. Dann könnte man auch rechter Hand in der oberen Gleichung den Faktor a_1^2 und in der unteren den Faktor a^2 ausscheiden; indessen würde die weitere Verfolgung dieser Umformungen hier zu viel Platz einnehmen, und muss daher wegbleiben.

Jede zugeordnete Seite gehört ferner zu 4 Dreiecken, welche ihre Endpunkte und eine der vier Hauptecken zu Spitzen haben. Dies giebt für die zugeordneten Seiten Ausdrücke von folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} &F^2 F'^2 \alpha^2 \\ &= b^2 \; F^2 T_2^2 + c_1^2 F'^2 T_4^2 - 2bc_1 \; FF' T_2 T_4 \sin \tfrac{1}{2}(-B+C+\psi'') \\ &= b_1^2 F^2 T_4^2 + c^2 \; F'^2 T_2^2 + 2b_1c \; FF' T_2 T_4 \sin \tfrac{1}{2}(B-C+\psi'') \\ &= b^2 \; F^2 T_3^2 + c^2 \; F'^2 T_1^2 - 2bc \; FF' T_1 T_3 \sin \tfrac{1}{2}(B+C-\psi'') \\ &= b_1^2 F^2 T_1^2 + c_1^2 F'^2 T_3^2 - 2b_1c_1 FF' T_1 T_3 \sin \tfrac{1}{2}(B+C+\psi'') \end{aligned}\right\} 65.$$

u. s. w. Auch diese Gleichungen lassen bemerkenswerthe Umformungen zu. Setzt man z. B. in der ersten derselben $2T_2 = a_1 b_1 \sin(a_1 b_1)$ und $2T_4 = a_1 c \sin(a_1 c)$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a_1^2\left(\frac{\sin^2(a_1 b_1)}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2(a_1 c)}{\sin^2 C} + \frac{2\sin(a_1 b_1)\sin(a_1 c)\cos(bc_1)}{\sin B \sin C}\right) \\ &= a_1^2\left(\frac{\sin^2(a_1 b)}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2(a_1 c_1)}{\sin^2 C} + \frac{2\sin(a_1 b)\sin(a_1 c_1)\cos(b_1 c)}{\sin B \sin C}\right) \end{aligned}\right\} 66.$$

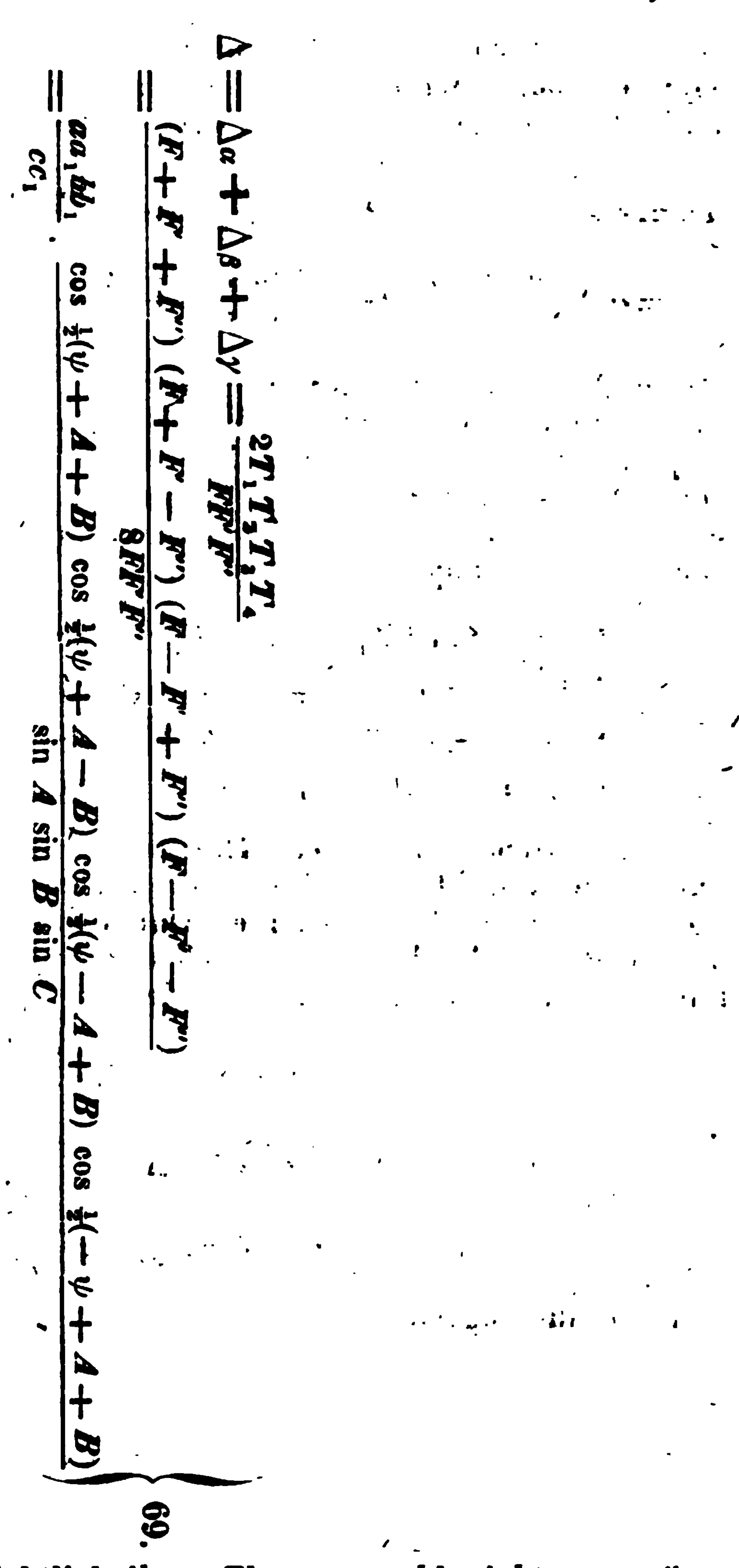
Diese Ausdrücke würden wichtig sein, wenn es gelänge, die in den Parenthesen stehenden Winkelaggregate auf irgend eine Weise bequem zusammenzuziehen. Mit den bis jetzt gefundenen Formeln scheint dies jedoch nicht gelingen zu wollen. — Wichtiger sind dagegen die Werthe, welche sich durch Anwendung dieses Verfahrens für die Hauptseiten ergeben. Für diese ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} F^2 a^2 &= c^2 T_1^2 + c_1^2 T_3^2 - 2cc_1 T_1 T_3 \cos C \\ F'^2 a^2 &= b^2 T_3^2 + b_1^2 T_1^2 + 2bb_1 T_1 T_3 \cos B \\ F^2 a_1^2 &= c^2 T_2^2 + c_1^2 T_4^2 - 2cc_1 T_2 T_4 \cos C \\ F'^2 a_1^2 &= b^2 T_2^2 + b_1^2 T_4^2 + 2bb_1 T_2 T_4 \cos B \end{aligned}\right\} 67.$$

u. s. w. Demnach ist jede Hauptseite des vollständigen Viereckes durch ein Paar Gegenseiten, ihren charakteristischen Winkel und die zwei über der gesuchten Hauptseite stehenden Hauptdreiecke bestimmt. — Sucht man endlich den Flächenraum des zugeordneten Dreieckes, so hat man zuvörderst:

$$\left.\begin{aligned} \text{Dreieck } CGE &= \Delta\alpha = \frac{T_2 T_3 T_4}{FF'} \\ \text{Dreieck } CFE &= \Delta\beta = \frac{T_2 T_3 T_1}{FF'} \\ \text{Dreieck } CFG &= \Delta\gamma = \frac{T_2 T_1 T_4}{FF'} \end{aligned}\right\} 68.$$

und hieraus sogleich:



$$\left.\begin{aligned}\Delta &= \Delta_\alpha + \Delta_\beta + \Delta_\gamma = \frac{2T_1T_2T_3T_4}{FF'F''}\\ &= \frac{(F+F'+F'')(F+F'-F'')(F-F'+F'')(F-F'-F'')}{8FF'F''}\\ &= \frac{aa_1bb_1}{cc_1}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\psi+A+B)\cos\frac{1}{2}(\psi+A-B)\cos\frac{1}{2}(\psi-A+B)\cos\frac{1}{2}(-\psi+A+B)}{\sin A\sin B\sin C}\end{aligned}\right\} \quad 69.$$

Ausdrücke, welche hinsichtlich ihrer Eleganz wohl nichts zu wünschen übrig lassen. Was endlich die Winkel des zugeordneten Dreieckes betrifft, so würden sich zwar dieselben aus den drei Seiten desselben in Verbindung mit dem Flächeninhalte Δ ableiten lassen; indessen sind die so erhaltenen Ausdrücke sehr weitläufig und unbehülflich. Da wir die Werthe dieser Winkel im Folgenden auf eine andere Weise bestimmen werden, so mögen dieselben vor der Hand ausfallen.

§. 16.

Es bleibt nur noch übrig, die Aufgabe zu lösen: aus irgend fünf von einander unabhängigen Stücken des vollstän-

digen **Vierecks alle in dieser Figur vorkommenden Seiten und Winkel zu bestimmen.** Die Lösung dieses Problems wird uns eine allgemeine Tafel von Werthen verschaffen, wie sie Carnot in seiner Geometrie der Stellung zu entwickeln verlangt, um durch Combination der in ihr enthaltenen Ausdrücke jeden beliebigen Bestandtheil der Construktion in seinen Beziehungen zu den übrigen Bestandtheilen übersehen zu können. Als die fünf gegebenen Bestimmungsstücke mögen im Folgenden die vier Abschnitte der Hauptseiten c und c_1 zwischen ihrem zugeordneten Punkte E (Taf. III. Fig. 1.) und den vier Hauptpunkten $ABCD$, und der zugehörige charakteristische Winkel C angenommen werden. Um die Bezeichnung ganz unabhängig zu halten, sollen folgende Benennungen eingeführt werden:

$$\left.\begin{array}{l} AE = p_1,\quad DE = q_1, \\ CE = p_2,\quad BE = q_2, \end{array} \quad A\hat{E}D = C \right\} \quad 70.$$

Hiermit wird nun sofort erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 = p_1{}^2 + q_1{}^2 - 2p_1q_1 \cos C, & b^2 = p_1{}^2 + q_2{}^2 + 2p_1q_2 \cos C \\ a_1{}^2 = p_2{}^2 + q_2{}^2 - 2p_2q_2 \cos C, & b_1{}^2 = p_2{}^2 + q_1{}^2 + 2p_2q_1 \cos C \end{array}\right\} \quad 71.$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2T_1 = p_1(q_1 + q_2) \sin C, & \\ 2T_2 = p_2(q_1 + q_2) \sin C, & 2F = (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) \sin C \\ 2T_3 = q_1(p_1 + p_2) \sin C, & 2F' = (p_1q_1 - p_2q_2) \sin C \\ 2T_4 = q_2(p_1 + p_2) \sin C, & 2F'' = (p_1q_2 - p_2q_1) \sin C \end{array}\right\} \quad 72.$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a_1{}^2 + b^2 + b_1{}^2 = (p_1{}^2 + p_2{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2) \\ \qquad\qquad - 2(p_1 - p_2)(q_1 - q_2) \cos C \\ -a^2 + a_1{}^2 + b^2 + b_1{}^2 = 2(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) \cos C \end{array}\right\} \quad 73.$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2a_1{}^2 = (p_1p_2 + q_1q_2)^2 + (p_1q_2 + p_2q_1)^2 - 4p_1p_2q_1q_2 \sin^2 C \\ \qquad - 2(p_1p_2 + q_1q_2)(p_1q_2 + p_2q_1) \cos C \\ b^2b_1{}^2 = (p_1p_2 + q_1q_2)^2 + (p_1q_1 + p_2q_2)^2 - 4p_1p_2q_1q_2 \sin^2 C \\ \qquad + 2(p_1p_2 + q_1q_2)(p_1q_1 + p_2q_2) \cos C \end{array}\right\} \quad 74.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = a \cos(ac) + q_1 \cos C = b \cos(bc) - q_2 \cos C \\ p_2 = a_1 \cos(a_1c) + q_2 \cos C = b_1 \cos(b_1c) - q_1 \cos C \\ q_1 = a \cos(ac_1) + p_1 \cos C = b_1 \cos(b_1c_1) - p_2 \cos C \\ q_2 = a_1 \cos(a_1c_1) + p_2 \cos C = b \cos(bc_1) - p_1 \cos C \end{array}\right\} \quad 75.$$

Durch gehörige Verbindung und mit Hülfe von Nr. 72. findet man hieraus:

$$\left.\begin{array}{l} ab \cos(ab) = (p_1{}^2 - q_1q_2) - p_1(q_1 - q_2) \cos C \\ a_1b_1 \cos(a_1b_1) = (p_2{}^2 - q_1q_2) + p_2(q_1 - q_2) \cos C \\ ab_1 \cos(ab_1) = (q_1{}^2 - p_1p_2) - q_1(p_1 - p_2) \cos C \\ a_1b \cos(a_1b) = (q_2{}^2 - p_1p_2) + q_2(p_1 - p_2) \cos C \end{array}\right\} \quad 76.$$

$$\left.\begin{aligned} aa_1 \sin A &= (p_1 q_2 - p_2 q_1) \sin C \\ bb_1 \sin B &= (p_1 q_1 - p_2 q_2) \sin C \\ aa_1 \cos A &= (p_1 p_2 + q_1 q_2) - (p_1 q_2 + p_2 q_1) \cos C \\ -bb_1 \cos B &= (p_1 p_2 + q_1 q_2) + (p_1 q_1 + p_2 q_2) \cos C \end{aligned}\right\} 77.$$

$$\left.\begin{aligned} aa_1 bb_1 \sin \psi &= (p_1 + p_2)(q_1 + q_2)(p_1 p_2 - q_1 q_2) \sin C \\ aa_1 bb_1 \cos \psi &= (p_1 p_2 + q_1 q_2)^2 - p_1 p_2 (q_1 + q_2)^2 - q_1 q_2 (p_1 + p_2)^2 \\ &\quad + 4 p_1 p_2 q_1 q_2 \cos^2 C \\ &\quad + (p_1 p_2 + q_1 q_2)(p_1 - p_2)(q_1 - q_2) \cos C \end{aligned}\right\} 78.$$

$$\left.\begin{aligned} aa_1 \sin \psi' &= (p_1 p_2 - q_1 q_2) \sin C \\ bb_1 \sin \psi'' &= (p_1 p_2 - q_1 q_2) \sin C \\ aa_1 \cos \psi' &= (p_1 q_2 + p_1 q_2) - (p_1 p_2 + q_1 q_2) \cos C \\ bb_1 \cos \psi'' &= (p_1 q_1 + p_2 q_2) + (p_1 p_2 + q_1 q_2) \cos C \end{aligned}\right\} 79.$$

Da man ferner

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a \cdot \frac{p_2(q_1 + q_2)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, & b_2 &= b \cdot \frac{p_2(q_1 + q_2)}{p_1 q_1 - p_2 q_2} \\ a_2 &= a_1 \cdot \frac{q \cdot (p_1 + p_2)}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, & b_2 &= b_1 \cdot \frac{q_2(p_1 + p_2)}{p_1 q_1 - p_2 q_2} \end{aligned}\right\} 80.$$

findet, so ergiebt sich nunmehr aus den Gleichungen $a^2 = b_2{}^2 + p_2{}^2 + 2b_2 p_2 \cos(b_1 c)$ u. s. w. nach einigen allerdings ziemlich weitläufigen Reduktionen, für die zugeordneten Seiten:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^2 &= \\
\beta^2 & \\
\gamma^2 &= \frac{(p_1+p_2)^2\,(q_1+q_2)^2\,\{p_1{}^2p_2{}^2(q_1-q_2)^2+q_1{}^2q_2{}^2(p_1-p_2)^2-2p_1p_2q_1q_2(p_1-p_2)\,(q_1-q_2)\cos C\}}{(p_1q_1-p_2q_2)^2\,(p_1q_2-p_2q_1)^2}
\end{aligned}\right\}\quad 81.$$

Ausdrücke, welche durch ihren symmetrischen Bau sehr bemerkenswerth sind. Führt man die Flächenräume T und F ein, so gehen dieselben in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
FF''\beta\cos(\beta c) &= c\,T_1T_2 - c_1T_3T_4\cos C\\
FF''\beta\cos(\beta c_1) &= c_1T_3T_4 - c\,T_1T_2\cos C\\
F^2F''\beta\alpha\cos(\beta\alpha) &= c^2T_1{}^2T_2 + c_1{}^2T_3{}^2T_4\\
&\quad - cc_1T_1T_3(T_2+T_4)\cos C\\
F^2F''\beta\alpha_1\cos(\beta\alpha_1) &= c^2T_1T_2{}^2 + c_1{}^2T_3T_4{}^2\\
&\quad - cc_1T_2T_4(T_1+T_3)\cos C
\end{aligned}\right\}\ 86.$$

$$\left.\begin{aligned}
F^3F'F''\gamma\alpha\cos(\gamma\alpha) &= c_1{}^2T_3{}^2T_4(T_1-T_2)+c^2T_1{}^2T_2(T_3-T_4)\\
&\quad - cc_1T_1T_3\{T_4(T_1-T_2)+T_2(T_3-T_4)\}\cos C\\
F^3F'F''\gamma\alpha_1\cos(\gamma\alpha_1) &= c_1{}^2T_3T_4{}^2(T_1-T_2)+c^2T_1T_2{}^2(T_3-T_4)\\
&\quad - cc_1T_2T_4\{T_3(T_1-T_2)+T_1(T_3-T_4)\}\cos C\\
F^3F'F''\gamma b\cos(\gamma b) &= c_1{}^2T_3T_4{}^2(T_1-T_2)-c^2T_1{}^2T_2(T_3-T_4)\\
&\quad - cc_1T_1T_4\{T_3(T_1-T_2)-T_2(T_3-T_4)\}\cos C\\
F^3F'F''\gamma b_1\cos(\gamma b_1) &= c_1{}^2T_3{}^2T_4{}^2(T_1-T_2)-cT_1T_2{}^2(T_3-T_4)\\
&\quad - cc_1T_2T_3\{T_4(T_1-T_2)-T_1(T_3-T_4)\}\cos C
\end{aligned}\right\}\ 87.$$

Ferner setze man

$$\left.\begin{aligned}
GMF &= (\alpha a) & GPF &= (\beta b) & ERS &= (\gamma c)\\
GNF &= (\alpha a_1) & GQF &= (\beta b_1) & ESR &= (\gamma c_1)
\end{aligned}\right\}\ 88.$$

so wird noch:

$$\left.\begin{aligned}
F^3F'aa\cos(\alpha a) &= c^2T_1{}^2T_2 - c_1{}^2T_3{}^2T_4 + cc_1T_1T_3F''\cos C\\
F^3F'aa_1\cos(\alpha a_1) &= c^2T_1T_2{}^2 - c_1{}^2T_3T_4{}^2 - cc_1T_2T_4F''\cos C\\
F^3F''\beta b\cos(\beta b) &= c^2T_1{}^2T_2 - c_1{}^2T_3T_4{}^2 - cc_1T_1T_4F'\cos C\\
F^3F''\beta b_1\cos(\beta b_1) &= c^2T_1T_2{}^2 - c_1{}^2T_3{}^2T_4 + cc_1T_2T_3F'\cos C
\end{aligned}\right\}\ 89.$$

$$\left.\begin{aligned}
FF'F''\gamma\cos(\gamma c) &= c\,T_1T_2(T_3-T_4) - c_1T_3T_4(T_1-T_2)\cos C\\
FF'F''\gamma\cos(\gamma c_1) &= c_1T_3T_4(T_1-T_2) - c\,T_1T_2(T_3-T_4)\cos C
\end{aligned}\right\}\ 90.$$

Setzt man endlich

$$\left.\begin{aligned}
ME &= \alpha_3 & PE &= \beta_3 & SG &= \gamma_3\\
NE &= \alpha_2 & QE &= \beta_2 & GR &= \gamma_2\\
NG &= \alpha_1 & QF &= \beta_1 & FR &= \gamma_1
\end{aligned}\right\}\ 91.$$

so ergiebt sich alsbald noch:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{\alpha F}{F-F'}, & \beta_3 &= \frac{\beta F''}{F-F''}, & \gamma_3 &= \frac{\gamma F'}{F-F'}\\
\alpha_2 &= \frac{\alpha F}{F+F'}, & \beta_2 &= \frac{\beta F''}{F+F''}, & \gamma_2 &= \frac{\gamma F'}{F+F'}\\
\alpha_1 &= \frac{\alpha F}{F+F'}, & \beta_1 &= \frac{\beta F}{F+F''}, & \gamma_1 &= \frac{\gamma F}{F+F'}
\end{aligned}\right\}\ 92.$$

$$\left.\begin{aligned} p_1p_2 - q_1q_2 &= \frac{E^2}{F} \\ a_2(a+a_2) - a_1(a_1+a_1) &= \frac{E^2}{F'} \\ b_2(b+b_2) - b_1(b+b_1) &= \frac{E^2}{F''} \end{aligned}\right\} 95.$$

Demnach verhalten sich in jedem vollständigen Vierecke die Unterschiede der Rechtecke aus den Abschnitten je zweier Gegenseiten umgekehrt wie die Flächeninhalte derjenigen einfachen Vierecke, zu denen jene Gegenseiten als Diagonalen gehören. Endlich folgt auch aus Vorstehendem noch der einfache Satz: dass in jedem einfachen Vierecke die excentrische Fläche die mittlere Proportionalfläche zwischen der Fläche des Viereckes und dem Unterschiede der Rechtecke aus den Abschnitten beider Diagonalen ist.

§. 18.

Wir gehen nun dazu über, einige der bemerkenswertheren Fälle zusammenzustellen, in welchen ein Viereck durch 5 Stücke vollständig bestimmt ist. Zuerst zeigen die Formeln des §. 16. unmittelbar:

1) dass ein Viereck durch die vier Abschnitte eines Paares Gegenseiten und deren charakteristischen Winkel vollständig und unzweideutig bestimmt ist.

Die blosse Ansicht der gedachten Formeln zeigt aber auch ferner, dass es zur vollständigen Bestimmung ebenfalls hinreicht, wenn die ganzen Seiten c und c_1 mit ihrem charakteristischen Winkel C und ausserdem noch ein Dreieck aus jeder der beiden Complexionen T_1T_2 und T_3T_4 gegeben ist. Denn man würde zuerst $2F = cc_1 \sin C$ und dann aus den Gleichungen $F = T_1 + T_2 = T_3 + T_4$ die beiden anderen nicht gegebenen Hauptdreiecke berechnen, aus diesen dann nach Nr. 15. F' und F'' suchen und hieraus sodann die übrigen Stücke des Viereckes nach den Formeln des §. 16. bestimmen. Demnach ist

2) ein Viereck durch ein Paar Gegenseiten, deren charakteristischen Winkel und ein über jeder der gegebenen Seiten liegendes Hauptdreieck vollständig bestimmt.

Da übrigens nach Nr. 18. jedes der Hauptdreiecke T durch die drei Vierecksflächen $FF'F''$ bestimmt ist, so kann man auch diese als gegeben betrachten, und dann eine der Grössen c und c_1 wegfallen lassen, indem die weggelassene sich aus der Gleichung $2F = cc_1 \sin C$ sofort finden lässt. Demnach ist ferner

3) ein Viereck durch die Flächenräume der drei in ihm enthaltenen einfachen Vierecke, eine Hauptseite und deren charakteristischen Winkel vollständig bestimmt.

Wollte man im vorliegenden Falle statt der einen Hauptseite lieber den charakteristischen Winkel C weglassen, so würde die Auflösung zweideutig sein, da C aus der Gleichung $2F = cc_1 \sin C$ bestimmt werden müsste. Ferner ist

[illegible] [illegible] Paare von Gegenseiten und [illegible] [illegible]kteristischen Winkel des letzten Paares [illegible] bestimmt. Wären gegeben [illegible] und C, [illegible] man zuvörderst aus Nr. 11. und [illegible]:

$$[illegible]\ \frac{c_1^2 - a^2 - a_1^2}{2\cos C}, \quad \text{tang}^2\ \tfrac{1}{2}\psi = \frac{[illegible]}{[illegible]} \text{ u. s. w.}$$

[illegible] hiermit ψ, ψ' und ψ'' gefunden, so erhält man durch Division [illegible] (32) durch (34) den Werth:

$$c^2 = \frac{a^2b^2 + a_1^2b_1^2 - 2aa_1bb_1 \cos\psi}{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (C + \psi)}$$

wodurch sofort auch c_1 gegeben ist. Wenn aber alle 6 Seiten des vollständigen Viereckes bekannt sind, so findet man nach Nr. 10. sofort die Winkel A und B, wodurch wegen Nr. 14. auch die Flächen $FF'F''$ bestimmt sind, mithin die Aufgabe gelöst ist.

Wären dagegen die Grössen aa_1bb_1 und A gegeben, so giebt die Gleichung Nr. 4. zuerst

$$\delta_2^2 = a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos A \text{ und}$$

$$\cos B = \frac{\delta_2^2 - b^2 - b_1^2}{2bb_1}$$

worauf man aus Nr. 34. augenblicklich:

$$c^2\delta_2^2 = a^2b^2 + a_1^2b_1^2 + 2aa_1bb_1 \cos (A + B)$$
$$c_1^2\delta_2^2 = a^2b_1^2 + a_1^2b^2 + 2aa_1bb_1 \cos (A - B)$$

findet. Es ist daher ganz allgemein

5) **ein Viereck aus zwei Paaren von Gegenseiten und einem ihrer charakteristischen Winkel vollständig bestimmt.**

Die vorstehenden Gleichungen zeigen übrigens, dass statt A auch die Grösse δ_2 gegeben sein kann. Es ist nämlich ganz allgemein auch

6) **ein Viereck durch zwei Paare von Gegenseiten und die Verbindungslinie der Mittelpunkte eines der drei Paare vollständig bestimmt.**

Sind aa_1bb_1, δ_2 gegeben, so ist nach der vorigen Auflösung A unmittelbar durch die Gleichung $2aa_1 \cos A = a^2 + a_1^2 - \delta_2^2$ bestimmt und die Aufgabe daher auf die vorige reducirt.

Ist hingegen statt δ_2 eine der Grössen δ_1 oder δ_3 gegeben, z. B. δ_1, so wird nach Nr. 4.:

$$\cos B = \frac{b^2 + b_1^2 - \delta_1^2}{2bb_1}$$

mithin die Aufgabe gleichfalls auf die vorhergehende zurückgebracht.

7) **Ein Viereck ist durch zwei Paare von Gegenseiten vollständig bestimmt, wenn zugleich in dem von ihnen gebildeten einfachen Vierecke die Summe zweier Gegenwinkel bekannt ist.**

Ist aa_1bb_1 und ψ bekannt, so hat man zuerst aus Nr. 48.:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(\psi'' - \psi) = \frac{aa_1 - bb_1}{aa_1 + bb_1}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\psi$$

woraus wegen $\frac{1}{2}(\psi''+\psi)=90-\frac{1}{2}\psi$ die beiden Winkel ψ'' und ψ' gefunden werden; dann erhält man cc_1 durch eine der Gleichungen:

$$cc_1=(aa_1-bb_1)\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}(\psi''-\psi')}=(aa_1+bb_1)\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\cos\frac{1}{2}(\psi''-\psi')},$$

und nun aus Nr. 11. den Winkel C aus der Gleichung $2cc_1\cos C=b^2+b_1^2-a^2-a_1^2$. Ist aber einmal C gefunden, so lässt sich das Andere durch die Formeln der Aufgabe 4) finden.

8) **Sind von den 6 Stücken, nämlich den drei Rechtecken je zweier Gegenseiten und den drei charakteristischen Winkeln, 5 gegeben, so ist das Viereck dadurch vollständig bestimmt.**

Welches von den genannten 6 Stücken auch fehlen mag, doch wird es immer aus der Gleichung Nr. 9.

$$0=aa_1\cos A+bb_1\cos B+cc_1\cos C$$

ohne Zweideutigkeit gefunden werden können. Alsdann geben zuvörderst die Gleichungen (47) die Werthe:

$$\tang^2\frac{1}{2}\psi=\frac{(ss_1-aa_1)(ss_1-bb_1)}{ss_1(ss_1-cc_1)}\text{ u. s. w.}$$

und die Gleichungen Nr. 14.:

$$2F''=aa_1\sin A,\quad 2F'=bb_1\sin B,\quad 2F=cc_1\sin C,$$

woraus man endlich mit Hülfe von (18) und (22) die Formeln

$$a^2=\frac{-(F+F'+F'')(F+F'-F'')}{bb_1\cos\frac{1}{2}(-\psi+A+B)\cos\frac{1}{2}(\psi-A+B)}$$

$$b^2=\frac{(F+F'+F'')(F-F'+F'')}{aa_1\cos\frac{1}{2}(\psi+A+B)\cos\frac{1}{2}(\psi-A+B)}$$

$$c^2=\frac{(F+F'+F'')(F-F'+F'')}{aa_1\cos\frac{1}{2}(A+C+\psi')\cos\frac{1}{2}(-A+C+\psi')}$$

entwickelt, aus denen abc und folglich auch $a_1b_1c_1$ gefunden werden können.

9) **Ein Viereck ist durch die drei Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten je zweier Gegenseiten und zwei der Winkel, unter denen sich diese Linien schneiden, vollständig bestimmt.**

Sind $\delta_1\delta_2\delta_3$ und zwei von den drei Winkeln (δ_{12}) (δ_{13}) (δ_{23}) gegeben, so findet man zuvörderst den dritten Winkel aus der Gleichung $(\delta_{13})+(\delta_{23})=180^\circ+(\delta_{12})$, und sodann aus Nr. 5. die 6 Hauptseiten, womit die Aufgabe als gelöset anzusehen ist.

10) **Ein Viereck ist durch die drei Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten je zweier Gegenseiten und zwei der charakteristischen Winkel vollständig bestimmt.**

Wären also $\delta_1\delta_2\delta_3$ und z. B. A und B gegeben, so suche man aus Nr. 6. und Nr. 11.

$$\tfrac{1}{2}(\delta_2^2+\delta_3^2)=a^2+a_1^2,\quad \tfrac{1}{2}(\delta_1^2+\delta_3^2)=b^2+b_1^2$$

$$\frac{\delta_3^2-\delta_2^2}{2\cos A}=2aa_1,\quad \frac{\delta_3^2-\delta_1^2}{2\cos B}=2bb_1;$$

dann wird:

$$(a+a_1)^2 \cos A = \delta_2^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}A - \delta_1^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}A$$
$$(a-a_1)^2 \cos A = \delta_1^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}A - \delta_2^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}A$$
$$(b+b_1)^2 \cos B = \delta_2^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}B - \delta_1^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B$$
$$(b-b_1)^2 \cos B = \delta_1^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}B - \delta_2^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B$$

woraus sich sofort die Werthe von aa_1bb_1 ergeben und die Aufgabe demnach als gelöst zu betrachten ist.

11) **Ein Viereck ist durch die vier Seiten eines seiner einfachen Vierecke und durch einen in dem letzteren liegenden Viereckswinkel vollständig bestimmt.**

Sollte man z. B. aus aa_1bb_1 und dem Winkel (ab) das Viereck bestimmen, so hätte man aus Nr. 10. und Nr. 2.:

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(ab)$$
$$2a_1b_1 \cos(a_1b_1) = a_1^2 + b_1^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cos(ab)$$

fände hieraus $\psi = (ab) + (a_1b_1)$ und mit diesem Werthe aus (44)

$$c^2 = \frac{a^2a_1^2 + b^2b_1^2 - 2aa_1bb_1 \cos\psi}{a^2 + b^2 - ab\cos(ab)}.$$

12) **Ein Viereck ist durch drei an einander liegende Hauptseiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Hauptwinkel bestimmt.**

Wären also z. B. die drei Seiten bab_1 und die Hauptwinkel (ab) und (ab_1) gegeben, so fände man aus Nr. 2.:

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(ab)$$
$$c^2 = a^2 + b_1^2 - 2ab_1 \cos(ab_1);$$

alsdann wäre $B = (ab) + (ab_1)$ und aus Nr. 9.:

$$a_1^2 = c^2 + c_1^2 - a^2 + 2bb_1 \cos B,$$

womit die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist.

Es mag an diesen Aufgaben genügen, da aus ihnen zur Genüge erhellt, wie man in ähnlichen Fällen zu verfahren haben wird. Immer wird es möglich sein, eine solche Combination der gefundenen Formeln anzugeben, dass das Viereck aus fünf unabhängigen Stücken sich bestimmen lässt, dafern nur eine solche Bestimmung überhaupt stattfinden kann. — Uebrigens ist jedoch zu bemerken, dass in allen den Fällen, in welchen die Grösse ψ durch eine trigonometrische Funktion gefunden wird, wie dies z. B. in der 4ten und 8ten Aufgabe der Fall war, die Auflösung nur dann wirklich bestimmt ist, wenn sich anderswoher entscheiden lässt, ob $\psi \lessgtr 180^\circ$ ist. Kann eine solche Entscheidung nicht erhalten werden, so thun in der That immer zwei Vierecke der Aufgabe Genüge.

§. 19.

Zum Schlusse wollen wir die gefundenen allgemeinen Formeln noch auf das Sehnenviereck anwenden. Da in diesem bekanntlich $\psi = 180^\circ$, $\psi' = \psi'' = 0^\circ$ ist, so ergiebt sich sofort, dass:

$$\left.\begin{array}{l}(ac)=(a_1c_1)=90^\circ-\tfrac{1}{2}(A+C)\\ (ac_1)=(a_1c)\;\;=90^\circ-\tfrac{1}{2}(-A+C)\\ (bc)=(b_1c_1)=\tfrac{1}{2}(B+C)-90^\circ\\ (bc_1)=(b_1c)\;\;=90^\circ-\tfrac{1}{2}(B-C)\\ (ab)=180^\circ-(a_1b_1)=\tfrac{1}{2}(B-A)\\ (ab_1)=180^\circ-(a_1b)\;\;=\tfrac{1}{2}(B+A)\end{array}\right\}\;96.$$

wird; folglich geben die Gleichungen 34, 38 und 42, wenn man statt der jetzt gleich werdenden Grössen f_1 und f_2, e_1 und e_2, d_1 und d_2 bloss die Zeichen fed ohne Index schreibt:

$$\left.\begin{array}{l}f^2=a^2+a_1^2+2aa_1\cos C=b^2+b_1^2-2bb_1\cos C\\ e^2=c^2+c_1^2+2cc_1\cos B=a^2+a_1^2+2aa_1\cos B\\ d^2=b^2+b_1^2-2bb_1\cos A=c^2+c_1^2-2cc_1\cos A\end{array}\right\}\;97.$$

Demnach gehören zu jedem einfachen Sehnenvierecke drei Diagonalen, von denen zwei unmittelbar durch die Figur, die dritte hingegen dann gefunden werden, wenn man irgend zwei beliebige neben einander liegende Seiten des Viereckes mit einander vertauscht. Ferner wird aus (32) erhalten:

$$\left.\begin{array}{l}cc_1=aa_1+bb_1\\ cf\;=ab\;+a_1b_1\\ c_1f=ab_1+a_1b\end{array}\right\}\;98.$$

d. h. in jedem einfachen Sehnenviereck erster Form ist das Rechteck aus beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus je zweien der Gegenseiten. Eben so findet man aus Nr. 36. und 40., unter der Voraussetzung dass $a>a_1$ und $b>b_1$:

$$\left.\begin{array}{ll}bb_1=cc_1-aa_1, & aa_1=cc_1-bb_1\\ be\;=ac\;-a_1c_1, & ad\;=bc\;-b_1c_1\\ b_1e=ac_1-a_1c, & a_1d=bc_1-b_1c\end{array}\right\}\;99.$$

d. h. in jedem Sehnenviereck zweiter oder dritter Form ist das Rechteck aus beiden Diagonalen gleich dem Ueberschusse des Rechteckes aus beiden sich schneidenden Seiten über das Rechteck aus beiden sich nicht schneidenden Seiten. Endlich wird, wenn man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l}2s\;\;=a+a_1+b+b_1\\ 2s'\;=a+a_1+c+c_1\\ 2s''=b+b_1+c+c_1\end{array}\right\}\;100.$$

schreibt; nach Nr. 45.

$$\left.\begin{array}{l}F^2\;\;=(s\;-a)\;(s\;-a_1)\;(s\;-b)\;(s\;-b_1)\\ F'^2\;=(s'-a)\;(s'-a_1)\;(s'-c)\;(s'-c_1)-aa_1cc_1\\ F''^2=(s''-b)\;(s''-b_1)\;(s''-c)\;(s''-c_1)-bb_1cc_1\end{array}\right\}\;101.$$

Durch schickliche Verbindungen der Gleichungen (98) findet man ferner:

$$aa_1 + bb_1 + ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1 = cc_1 + cf + c_1f \quad . \; . \quad 102.$$

d. h. die Summe der sechs Rechtecke aus je zweien Seiten eines einfachen Sehnenviereckes erster Form ist gleich der Summe der drei Rechtecke aus je zweien seiner drei Diagonalen.

$$\left.\begin{array}{ll} c^2 = \dfrac{(aa_1 + bb_1)(ab + a_1b_1)}{ab_1 + a_1b}, & \dfrac{c}{c_1} = \dfrac{ab + a_1b_1}{ab_1 + a_1b} \\ c_1{}^2 = \dfrac{(aa_1 + bb_1)(ab_1 + a_1b)}{ab + a_1b_1}, & \dfrac{c}{f} = \dfrac{aa_1 + bb_1}{ab_1 + a_1b} \\ f^2 = \dfrac{(ab + a_1b_1)(ab_1 + a_1b)}{aa_1 + bb_1}, & \dfrac{c_1}{f} = \dfrac{aa_1 + bb_1}{ab + a_1b_1} \end{array}\right\} \; 103.$$

$$\left.\begin{array}{l} c^2c_1{}^2f^2 = (aa_1 + bb_1)(ab + a_1b_1)(ab_1 + a_1b) \\ f(c \pm c_1) = (a \pm a_1)(b \pm b_1) \\ c_1(c \pm f) = (a \pm b)(a_1 \pm b_1) \\ c(c_1 \pm f) = (a \pm b_1)(a_1 \pm b) \end{array}\right\} \; 104.$$

Die Gleichungen (103) lassen sich auch als unmittelbares Ergebniss der Formeln (53) und (54) betrachten. Auf die nehmlige Weise kann nun auch jede Seite des Vierecks bestimmt werden. Denn nach (99.) ist:

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 = \dfrac{(cc_1 - bb_1)(bc - b_1c_1)}{bc_1 - b_1c}, & b^2 = \dfrac{(cc_1 - aa_1)(ac - a_1c_1)}{ac_1 - a_1c} \\ a_1{}^2 = \dfrac{(cc_1 - bb_1)(bc_1 - b_1c)}{bc - b_1c_1}, & b_1{}^2 = \dfrac{(cc_1 - aa_1)(ac_1 - a_1c)}{ac - a_1c_1} \end{array}\right\} \; 105.$$

ingleichen:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{bc - b_1c_1}{bc_1 - b_1c}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{ac - a_1c_1}{ac_1 - a_1c} \quad . \; . \; . \; . \quad 106.$$

u. s. w. Ferner ist nach Nr. 2. auch

$$\left.\begin{array}{rl} -a^2 + a_1{}^2 - b^2 + b_1{}^2 = 2(ab + a_1b_1) & \cos(a_1b_1) \\ = 2cf & \cos(a_1b_1) \\ -a^2 + a_1{}^2 + b^2 - b_1{}^2 = 2(ab_1 + a_1b) & \cos(a_1b) \\ = 2c_1f & \cos(a_1b) \end{array}\right\} \; 107.$$

und hieraus folgt durch Vergleichung mit Nr. 11. sofort, dass die Durchschnittswinkel der Diagonalen cf und c_1f nothwendig resp. gleich (a_1b_1) und (a_1b) sein müssen. Es ergiebt sich demnach auch wegen Nr. 96. und Nr. 11.:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2 - a_1{}^2 + b^2 - b_1{}^2}{2(ab + a_1b_1)} = \cos \tfrac{1}{2}(B - A) \\ \dfrac{a^2 - a_1{}^2 - b^2 + b_1{}^2}{2(ab_1 + a_1b)} = \cos \tfrac{1}{2}(B + A) \\ \dfrac{b^2 + b_1{}^2 - a^2 - a_1{}^2}{2(aa_1 + bb_1)} = \cos C \end{array}\right\} \; 108.$$

und hieraus auf bekannte Weise die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2 \tfrac{1}{2}(B-A) &= \frac{(s-a)(s-b)}{cf}, & \cos^2 \tfrac{1}{2}(B-A) &= \frac{(s-a_1)(s-b_1)}{cf}\\
\sin^2 \tfrac{1}{2}(B+A) &= \frac{(s-a)(s-b_1)}{c_1 f}, & \cos^2 \tfrac{1}{2}(B+A) &= \frac{(s-a_1)(s-b)}{c_1 f}\\
\sin^2 \tfrac{1}{2}C &= \frac{(s-b)(s-b_1)}{cc_1}, & \cos^2 \tfrac{1}{2}C &= \frac{(s-a)(s-a_1)}{cc_1}
\end{aligned}\right\} 109.$$

ingleichen:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(B-A) &= \frac{(s-a)(s-b)}{(s-a_1)(s-b_1)}\\
\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(B+A) &= \frac{(s-a)(s-b_1)}{(s-a_1)(s-b)}\\
\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}C &= \frac{(s-b)(s-b_1)}{(s-a)(s-a_1)}
\end{aligned}\right\} 110.$$

Zugleich aber ist auch, wenn man den Halbmesser des dem Viereck umgeschriebenen Kreises R nennt,

$$\left.\begin{aligned}
2F &= cc_1 \sin C = cf \sin \tfrac{1}{2}(B-A) = c_1 f \sin \tfrac{1}{2}(B+A)\\
R &= \frac{f}{2\sin C} = \frac{c_1}{2\sin \tfrac{1}{2}(B-A)} = \frac{c}{2\sin \tfrac{1}{2}(B+A)} = \frac{cc_1 f}{4F}\\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(aa_1+bb_1)(ab+a_1b_1)(ab_1+a_1b)}{(s-a)(s-b)(s-a_1)(s-b_1)}}
\end{aligned}\right\} 111.$$

Es verhalten sich demnach die drei Diagonalen des einfachen Sehnenviereckes, wie die Sinus der in den zugehörigen Kreisabschnitten liegenden Peripheriewinkel, oder wie die Sinus der Winkel, unter denen sich die beiden anderen Diagonalen schneiden. — Zugleich ist auch das rechtwinkliche Prisma, das den Flächeninhalt des Viereckes zur Grundfläche und den Radius des umschriebenen Kreises zur Höhe hat, gleich dem vierten Theile des rechtwinklichen Parallelepipedums aus den drei Diagonalen desselben.

Durch einfache Multiplication findet man aus 109.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin \tfrac{1}{2}(B-A) \sin \tfrac{1}{2}(B+A)}{\sin \tfrac{1}{2}C} &= \frac{s-a}{f}\\
\frac{\cos \tfrac{1}{2}(B-A) \cos \tfrac{1}{2}(B+A)}{\sin \tfrac{1}{2}C} &= \frac{s-a_1}{f}\\
\frac{\sin \tfrac{1}{2}(B+A) \cos \tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos \tfrac{1}{2}C} &= \frac{s-b_1}{f}\\
\frac{\cos \tfrac{1}{2}(B+A) \sin \tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos \tfrac{1}{2}C} &= \frac{s-b}{f}
\end{aligned}\right\} 112.$$

u. s. w. woraus unmittelbar auch:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin \tfrac{1}{2}B}{\cos \tfrac{1}{2}C} &= \frac{a+a_1}{f}, & \frac{\cos \tfrac{1}{2}B}{\sin \tfrac{1}{2}C} &= \frac{a-a_1}{f}\\
\frac{\sin \tfrac{1}{2}A}{\cos \tfrac{1}{2}C} &= \frac{b-b_1}{f}, & \frac{\cos \tfrac{1}{2}A}{\sin \tfrac{1}{2}C} &= \frac{b+b_1}{f}
\end{aligned}\right\} 113.$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C&=\frac{a+a_1}{a-a_1}\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C&=\frac{b-b_1}{b+b_1}\end{aligned}\right\}\ 114.$$

folgt. Ferner ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}R&=\frac{s-a}{4\sin\frac{1}{4}(B+A)\sin\frac{1}{4}(B-A)\cos\frac{1}{2}C}\\ &=\frac{s-a_1}{4\cos\frac{1}{4}(B+A)\cos\frac{1}{4}(B-A)\cos\frac{1}{2}C}\\ &=\frac{s-b}{4\cos\frac{1}{4}(B+A)\sin\frac{1}{4}(B-A)\sin\frac{1}{2}C}\\ &=\frac{s-b_1}{4\sin\frac{1}{4}(B+A)\cos\frac{1}{4}(B-A)\sin\frac{1}{2}C}\end{aligned}\right\}\ 115.$$

Es ist ganz unverkennbar, dass die Formeln von Nr. 108. bis 115. das Analogon zu den Formeln für das geradlinige Dreieck bilden. Trotz ihrer grossen Einfachheit und Eleganz scheinen sie doch bis jetzt noch gar nicht gekannt zu sein, weshalb die ausführliche Mittheilung derselben hier nicht am unrechten Platze sein möchte. Die Untersuchung über die Eigenschaften der Sehnenvierecke aber noch weiter zu treiben dürfte kaum der Mühe lohnen; die gehörige Verbindung der hier entwickelten Formeln wird fast immer hinreichen, jede verlangte Untersuchung zu Ende zu führen. Nur folgende Ausdrücke mögen hier noch Platz finden, da sie bei vorzunehmenden Transformationen gute Dienste leisten:

$$\left.\begin{aligned}0&=aa_1\cos\tfrac{1}{2}(A+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-C)+bb_1\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\\ 0&=aa_1\sin\tfrac{1}{2}(B+A)\sin\tfrac{1}{2}(B-A)+cc_1\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\\ 0&=bb_1\sin\tfrac{1}{2}(B+A)\sin\tfrac{1}{2}(B-A)-cc_1\cos\tfrac{1}{2}(A+C)\cos\tfrac{1}{2}(A-C)\end{aligned}\right\}\ 116$$

Mit ihrer Hülfe findet man für den Flächenraum D des von den drei Diagonalen gebildeten Dreieckes die merkwürdige Gleichung:

$$D^2-F^2=R^4\sin(A+C)\sin(B+C)\sin(C-A)\sin(B-C)\quad 117.$$

§. 20.

Endlich sind noch die Werthe zu bemerken, welche beim Sehnenviereck für die einzelnen Bestandtheile des zugeordneten Dreieckes erhalten werden. Man findet zuvörderst aus Nr. 64.:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\delta_1\,.\,\frac{a\cos^2\frac{1}{2}(B+C)}{a_1\sin B\sin C}=\delta_1\,\frac{a_1\cos^2\frac{1}{2}(B-C)}{a\sin B\sin C}\\ \beta&=\delta_2\,.\,\frac{b\cos^2\frac{1}{2}(C+A)}{b_1\sin A\sin C}=\delta_2\,\frac{b_1\cos^2\frac{1}{2}(C-A)}{b\sin A\sin C}\\ \gamma&=\delta_3\,.\,\frac{c\sin^2\frac{1}{2}(B-A)}{c_1\sin A\sin B}=\delta_3\,.\,\frac{c_1\sin^2\frac{1}{2}(B+A)}{c\sin A\sin B}\end{aligned}\right\}\ 118.$$

also auch:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \delta_1 \,.\, \frac{\cos \tfrac{1}{2}(B+C) \cos \tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin B \sin C}\\ \beta &= \delta_2 \,.\, \frac{\cos \tfrac{1}{2}(C+A) \cos \tfrac{1}{2}(C-A)}{\sin A \sin C}\\ \gamma &= \delta_3 \,.\, \frac{\sin \tfrac{1}{2}(B+A) \sin \tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin A \sin B}\end{aligned}\right\} 119.$$

Ferner wird nach Nr. 69.:

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= \frac{aa_1bb_1}{cc_1} \,.\, \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2}(A+B) \sin^2 \tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin A \sin B \,\mathrm{sn}\, C}\\ &= \frac{bb_1cc_1}{aa_1} \,.\, \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}(B+C) \cos^2 \tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin A \sin B \sin C}\\ &= \frac{aa_1cc_1}{bb_1} \,.\, \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}(C+A) \cos^2 \tfrac{1}{2}(C-A)}{\sin A \sin B \sin C}\end{aligned}\right\} 120.$$

woraus denn mit Hülfe von 116. sogleich:

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2 &= \delta_1^2 \,.\, \frac{\Delta F''}{2FF'} = \frac{\Delta \delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2}{32FF'F''} \,.\, \sin^2 (\delta_{23})\\ \beta^2 &= \delta_2^2 \,.\, \frac{\Delta F'}{2FF''} = \frac{\Delta \delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2}{32FF'F''} \,.\, \sin^2 (\delta_{13})\\ \gamma^2 &= \delta_3^2 \,.\, \frac{\Delta F}{2F'F''} = \frac{\Delta \delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2}{32FF'F''} \,.\, \sin^2 (\delta_{12})\end{aligned}\right\} 121.$$

$$\left.\begin{aligned}\sin (\alpha\beta) &= \frac{4F}{\delta_1\delta_2} = \sin (\delta_{12})\\ \sin (\alpha\gamma) &= \frac{4F'}{\delta_1\delta_3} = \sin (\delta_{13})\\ \sin (\beta\gamma) &= \frac{4F''}{\delta_2\delta_3} = \sin (\delta_{23})\end{aligned}\right\} 122.$$

folgt. Man erhält dadurch unmittelbar den merkwürdigen Satz:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\beta) &= (\delta_{12})\\ (\alpha\gamma) &= 180 - (\delta_{13})\\ (\beta\gamma) &= 180 - (\delta_{23})\end{aligned}\right\} 123.$$

so dass im Sehnenvierecke die zugeordneten Winkel unmittelbar aus den Winkeln gefunden werden können, unter denen sich je zwei Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten der Gegenseiten schneiden.

Wie nun im Vorstehenden die allgemeinen Formeln auf das Sehnenviereck angewendet worden sind, so könnte das auch in Bezug auf das Tangentenviereck geschehen. Indessen würde dadurch theils die gegenwärtige Untersuchung allzuweit ausgedehnt werden, theils erfordert das Tangentenviereck noch eigenthümliche, von den bisher geführten, ziemlich abweichende Erörterungen. Ich spare daher diesen Gegenstand für eine andere Zeit auf, wo ich dann zugleich auch die Eigenschaften der vier merkwürdigen Punkte der Haupt- und Nebendreiecke näher betrachten werde.

Es sei also M der Mittelpunkt der Curve (Taf. IV. Fig. 2.); MQ und MP die Axen der x und y; ABC ein in der Curve eingeschriebenes Dreieck; die Seite AB mit MP, und die Seite AC mit MQ parallel. Die Coordinaten des Punkts A seien ξ, v; die Coordinaten des Punkts B seien ξ', v'; die Coordinaten des Punkts C seien; ξ'', v''; so ist offenbar $v = v'' = AD$, und $\xi = \xi' = -DM$.

Ich nehme an dass keiner der Punkte A, B, C unendlich weit entfernt liege, oder dass weder AB noch AC mit einer Asymptote der Hyperbel parallel sei; in welchem Falle BC mit derselben Asymptote parallel wäre, oder unendlich weit entfernt läge. Die Linie AC, deren Gleichung $y = v = AD$ ist, schneidet also die Curve in zwei Punkten; eben so AB, deren Gleichung $x = \xi = -DM$. Demnach können weder a noch c der Gleichung (1) verschwinden. Es sei nun die erste willkührliche mit MQ parallele Seite des Dreiecks AC gezogen und $AD = v$, so werden die beiden Werthe von x, die diesem Werthe von y entsprechen, $\xi = -MD$, und $\xi'' = ME$ die Wurzeln der Gleichung

$$axx + 2bxv + cvv + f = 0$$

$$\xi = -\frac{bv}{a} - \frac{1}{a} Y$$

$$\xi'' = -\frac{bv}{a} + \frac{1}{a} Y$$

wenn man Y positiv nimmt und $YY = (bb - ac)vv - af$ setzt.

Die beiden Werthe $v = DA$ und $v' = DB$ sind die Wurzeln y der Gleichung $cyy + 2b\xi y + a\xi\xi + f = 0$, also ist

$$v + v' = -\frac{2b\xi}{c}; \text{ oder}$$

$$v' = \left(\frac{2bb}{ac} - 1\right) v + \frac{2b}{ac} Y.$$

Die Gleichung der durch B und C gelegten Linie ist:

$$(v'' - v')x + (\xi' - \xi'')y + \xi''v' - \xi'v'' = 0$$

der offenbar durch Substitution der Coordinaten von B: $x = \xi'$, $y = v'$; und von C: $x = \xi''$, $y = v''$ Genüge geleistet wird. Substituirt man in diese die für $\xi' = \xi$, ξ'', v' und $v'' = v$ gefundenen Werthe, so findet man die allgemeine Gleichung für die Linie BC:

$$\{(bb - ac)v + bY\}x + c \,.\, Y \,.\, y + bf = 0. \quad (2)$$

Der Berührungspunkt mit der Curve, die alle diese Linien berühren, ist der Durchschnitt von einer beliebigen mit einer unendlich wenig verschiedenen derselben. Es sei die Gleichung einer Tangente

$$Ax + By + C = 0$$

so ist die Gleichung der unendlich wenig verschiedenen Tangente:

$$\left\{A + \left(\frac{dA}{dv}\right)dv\right\}x + \left\{B + \left(\frac{dB}{dv}\right)dv\right\} y + C + \left(\frac{dC}{dv}\right)dv = 0$$

deren Durchschnittspunkt mit dem Durchschnittspunkte der beide

$$Ax + By + C = 0$$

$$a\{bc-ad+bY\}x+b^2Y.y-bv(bc-ad)-cd+dY.$$

Es ist also

$$A=a(bc-ad+bY);\; B=b^2Y;\; C=-bv(bc-ad)-cd+dY,$$

und da

$$\frac{dY}{dy}=\frac{a(bc-ad)}{Y} \text{ ist:}$$

$$\frac{Y}{bc-ad}\cdot\left(\frac{dA}{dv}\right)=a^2b;\; \frac{Y}{bc-ad}\left(\frac{dB}{dv}\right)=ab^2;\; \frac{Y}{bc-ad}\cdot\left(\frac{dC}{dv}\right)=ad-bY;$$

also
$$x'=-\frac{c}{a^2}-\frac{bv}{a}$$

$$y'=\frac{bc-ad}{ab^2}+v+\frac{Y}{ab}$$

$$(ax'+by')^2+2cx'+2dy'=-\left(\frac{bc-ad}{ab}\right)^2.$$

Beide Curven sind demnach auch zugleich *Parabeln mit gleichem Parameter, deren Hauptaxen zusammenfallen.*

3. Hiernach ist es leicht in jedem Kegelschnitte, wenn es möglich ist, ein Dreieck zu beschreiben, dessen zwei Seiten mit gegebenen Linien parallel sind, und dessen dritte Seite durch einen gegebenen Punkt geht. Man beschreibe nemlich ein willkürliches Dreieck A_1BC, dessen Seiten A_1B und A_1C mit den gegebenen Graden parallel sind, und dessen Spitzen A_1BC auf dem Umfange der gegebenen Curve liegen. Mit BC parallel (Taf. IV. Fig. 3.) ziehe man, wenn es möglich ist, die Tangente $B'C'$ an die gegebene Curve. Vom Mittelpunkte M der Curve ziehe man eine Linie an den Berührungspunkt T', die die Linie BC in T schneidet; so ist T der Berührungspunkt der zweiten Curve, die mit der gegebenen ähnlich, ähnlichliegend und concentrisch ist. Es ist $MT':MT$ $=\frac{b}{\sqrt{ac}}:1$ für alle eingeschriebene Dreiecke constant. Es sei A der Punkt, der auf der gesuchten Tangente AU an die zweite Curve liegen soll; zieht man mit dieser parallel $A'U'$, die die gegebene Curve in U' tangirt, und die Linie MA in A' schneidet; so ist ebenfalls $MU:MU'=MA:MA'=MT:MT'$. Folglich müssen AT und $A'T'$ auch parallel sein. Man ziehe demnach, nachdem T und T' bestimmt sind, TA und die Parallele $T'A'$, die die Linie MA in A' schneidet, und von A', wenn er nicht innerhalb der gegebenen Curve liegt, in welchem Falle die Construction unmöglich ist, eine Tangente an die gegebene Curve, so ist die durch A gezogene mit ihr parallele die gesuchte Linie.

In der Hyperbel ist keine mit BC parallele Tangente möglich, wenn BC beide Aeste schneidet. Die Hyperbel, die alle Linien BC berührt, liegt in diesem Falle in den Nebenwinkeln der Asymptoten. Es sei die Gleichung der gegebenen Hyperbel auf ihre Asymptoten

$$x_2y_2=f_2 \quad (4)$$

so ist in diesem Falle die Gleichung der von BC berührten Curve

$$x_2y_2=-mf_2 \quad (5)$$

wo m positiv ist. Beschreibt man die zu dieser Hyperbel supple-

in der Theorie der bestimmten Integrale ausführlich Nachricht ertheilen, überhaupt mit der Zeit eine vollständige Theorie der bestimmten Integrale zu liefern suchen werden. Dem Zwecke dieser Zeitschrift gemäss beginnen wir mit einer kurzen Darstellung der wichtigsten allgemeinen Hauptsätze von den bestimmten Integralen, auf welchen alle folgenden Untersuchungen vorzüglich beruhen, und einer kurzen Entwickelung einiger sonst schon bekannten bestimmten Integrale, die bei andern Untersuchungen besonders häufig in Anwendung gebracht werden.

I.

Die wichtigsten allgemeinen Hauptsätze von den bestimmten Integralen.

§. 1.

Wenn überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x)$$

gesetzt wird, wo, wie wir offenbar anzunehmen berechtigt sind, die willkührliche Constante in der Function $\varphi(x)$ schon eingeschlossen sein soll; so nennt man die Differenz

$$\varphi(b) - \varphi(a)$$

das von $x = a$ bis $x = b$ genommene Integral $\int f(x)dx$, und bezeichnet diese Differenz am besten und einfachsten durch

$$\int_a^b f(x)dx,$$

so dass also

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

ist. Auch nennt man

$$\int_a^b f(x)dx$$

das zwischen den Gränzen a und b, für a als untere und b als obere Gränze, genommene Integral $\int f(x)dx$. Ein jedes solches zwischen bestimmten Gränzen genommenes Integral wird aber überhaupt ein bestimmtes Integral genannt.

§. 2.

1. Weil, indem wir immer wie vorher überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x)$$

setzen, nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

und

$$\int_b^a f(x)dx = \varphi(a) - \varphi(b)$$

ist; so ist offenbar jederzeit

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

oder

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

2. Weil ferner nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^\alpha f(x)dx = \varphi(\alpha) - \varphi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

$$\int_\beta^\gamma f(x)dx = \varphi(\gamma) - \varphi(\beta),$$

u. s. w.

$$\int_\lambda^\mu f(x)dx = \varphi(\mu) - \varphi(\lambda),$$

$$\int_\mu^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(\mu)$$

ist; so ist jederzeit, wie man sogleich findet, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen addirt,

$$\int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_\lambda^\mu f(x)dx + \int_\mu^b f(x)dx$$
$$= \varphi(b) - \varphi(a),$$

und folglich, weil nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ist, jederzeit

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$= \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + \int_\lambda^\mu f(x)dx + \int_\mu^b f(x)dx,$$

wie gross auch die Anzahl der durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu$ bezeichneten Grössen sein mag.

3. Wenn A eine constante Grösse bezeichnet, so ist bekanntlich jederzeit

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx = A\varphi(x),$$

und folglich

$$\int_a^b Af(x)dx = A\varphi(b) - A\varphi(a) = A\{\varphi(b) - \varphi(a)\},$$

also, weil nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ist, immer

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

4. Wenn, indem A, A_1, A_2, ... A_n lauter constante Grössen bezeichnen,

$$F(x) = Af(x) + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x)$$

ist; so ist bekanntlich jederzeit

$$\int F(x)dx = A \int f(x)dx + A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + A_n \int f_n(x)dx,$$

und folglich, wenn wir überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x),$$
$$\int f_1(x)dx = \varphi_1(x),$$
$$\int f_2(x)dx = \varphi_2(x),$$

u. s. w.

$$\int f_n(x)dx = \varphi_n(x)$$

setzen,

$$\int F(x)dx = A\varphi(x) + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x),$$

also nach dem vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)dx = \; & A\{\varphi(b) - \varphi(a)\} \\ & + A_1\{\varphi_1(b) - \varphi_1(a)\} \\ & + A_2\{\varphi_2(b) - \varphi_2(a)\} \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + A_n\{\varphi_n(b) - \varphi_n(a)\},\end{aligned}$$

d. i. nach dem vorigen Paragraphen offenbar

$$\int_a^b F(x)dx$$

$$= A\int_a^b f(x)dx + A_1\int_a^b f_1(x)dx + A_2\int_a^b f_2(x)dx + \ldots$$
$$\ldots + A_n\int_a^b f_n(x)dx.$$

§. 3.

Wenn wir wieder überhaupt

$$\int f(x)dx = \varphi(x)$$

setzen, so ist nach dem allgemeinen Begriffe des Integrals bekanntlich

$$\varphi'(x) = f(x),$$

wo $\varphi'(x)$ wie gewöhnlich den ersten Differentialquotienten der Function $\varphi(x)$ bezeichnet. Setzen wir nun, indem n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{b-a}{n} = i;$$

so ist nach einem bekannten Satze *)

$$\varphi(a+i) = \varphi(a) + if(a+\Theta i),$$

$$\varphi(a+2i) = \varphi(a+i) + if(a+i+\Theta_1 i),$$

$$\varphi(a+3i) = \varphi(a+2i) + if(a+2i+\Theta_2 i),$$

u. s. w.

$$\varphi(a+(n-1)i) = \varphi(a+(n-2)i) + if(a+(n-2)i+\Theta_{n-2} i),$$

$$\varphi(a+ni) = \varphi(a+(n-1)i) + if(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i);$$

wo Θ, Θ_1, Θ_2, ... Θ_{n-2}, Θ_{n-1} lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind. Addirt man jetzt auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, und bemerkt, dass

$$b = a + ni$$

ist; so erhält man sogleich die Gleichung

$$\varphi(b) - \varphi(a)$$

$$= i\{f(a+\Theta i) + f(a+i+\Theta_1 i) + \ldots + f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\},$$

also, weil bekanntlich

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ist,

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$= i\{f(a+\Theta i) + f(a+i+\Theta_1 i) + \ldots + f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\}.$$

Wenn i positiv ist und die Function $f(x)$ fortwährend wächst, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil Θ, Θ_1, Θ_2, ... Θ_{n-1} lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, offenbar ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$f(a+\Theta i) \overset{=}{>} f(a),$$

$$f(a+i+\Theta_1 i) \overset{=}{>} f(a+i),$$

$$f(a+2i+\Theta_2 i) \overset{=}{>} f(a+2i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \overset{=}{>} f(a+(n-1)i)$$

---

*) Theil I. XLVIII. §. 6.

und

$$f(a+\Theta i) \leqq f(a+i),$$

$$f(a+i+\Theta_1 i) \leqq f(a+2i),$$

$$f(a+2i+\Theta_2 i) \leqq f(a+3i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \leqq f(a+ni);$$

also *)

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)$$

$$\geqq f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)$$

$$\leqq f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni);$$

folglich, weil nach der Voraussetzung i positiv ist **),

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\}$$

$$\geqq i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\}$$

$$\leqq i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\}.$$

Setzen wir also hier und im Folgenden der Kürze wegen

$$\Sigma = i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)\},$$

$$\Sigma' = i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \Sigma',$$

d. h. es ist $\int_a^b f(x)dx$ eine Mittelgrösse zwischen Σ und Σ', oder in der aus Theil I. XL. §. 33. bekannten Bezeichnung der Mittelgrössen:

$$\int_a^b f(x)dx = M(\Sigma, \Sigma').$$

Wenn wieder i positiv ist, die Function $f(x)$ aber fortwährend abnimmt, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil Θ, Θ_1, Θ_2, ... Θ_{n-1} lauter positive die Einheit

---

*) Theil I. XL. §. 2. §. 3.
**) Theil I. XL. §. 12. §. 13.

nicht übersteigende Grössen sind, ohne Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$f(a+\Theta i) \overline{\overline{<}} f(a),$$

$$f(a+i+\Theta_1 i) \overline{\overline{<}} f(a+i)$$

$$f(a+2i+\Theta_2 i) \overline{\overline{<}} f(a+2i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \overline{\overline{<}} f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i) \overline{\overline{>}} f(a+i),$$

$$f(a+i+\Theta_1 i) \overline{\overline{>}} f(a+2i),$$

$$f(a+2i+\Theta_2 i) \overline{\overline{>}} f(a+3i),$$

u. s. w.

$$f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i) \overline{\overline{>}} f(a+ni);$$

also

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)$$
$$\overline{\overline{<}} f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)$$
$$\overline{\overline{>}} f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni);$$

folglich, weil nach der Voraussetzung i positiv ist,

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\}$$
$$\overline{\overline{<}} i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1} i)\}$$
$$\overline{\overline{>}} i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma \overline{\overline{>}} \int_a^b f(x)dx \overline{\overline{>}} \Sigma,$$

und folglich wieder

$$\int_a^b f(x)dx = M(\Sigma,\ \Sigma).$$

Wenn i negativ ist, und die Function $f(x)$ fortwährend wächst, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil Θ, Θ_1, Θ_2, ... Θ_{n-1} lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, wieder ganz wie vorher

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$

$$\overline{\overline{>}}f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$

$$\overline{\overline{<}}f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni).$$

Weil aber jetzt nach der Voraussetzung i negativ ist; so ist

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$

$$\overline{\overline{<}}i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$

$$\overline{\overline{>}}i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma\overline{\overline{>}}\int_a^b f(x)dx\overline{\overline{>}}\Sigma',$$

und folglich wieder

$$\int_a^b f(x)dx=M(\Sigma,\Sigma').$$

Wenn i negativ ist, und die Function $f(x)$ fortwährend abnimmt, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt; so ist, weil Θ, Θ_1, Θ_2, ... Θ_{n-1} lauter positive die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, ganz wie oben

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$

$$\overline{\overline{<}}f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i)$$

und

$$f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)$$

$$\overline{\overline{>}}f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni).$$

Weil aber jetzt nach der Voraussetzung i negativ ist, so ist

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$

$$\overline{\overline{>}}i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+(n-1)i\}$$

und

$$i\{f(a+\Theta i)+f(a+i+\Theta_1 i)+\ldots+f(a+(n-1)i+\Theta_{n-1}i)\}$$

$$\overline{\overline{<}}i\{f(a+i)+f(a+2i)+f(a+3i)+\ldots+f(a+ni)\};$$

also nach dem Obigen

$$\Sigma\overline{\overline{<}}\int_a^b f(x)dx\overline{\overline{<}}\Sigma',$$

und folglich auch jetzt

$$\int_a^b f(x)dx = M(\Sigma, \Sigma').$$

Als allgemeines Resultat ergiebt sich nun aus dem Vorhergehenden, dass, wenn die Function $f(x)$ entweder stets wächst oder stets abnimmt, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen Σ und Σ' ist, was auch die positive ganze Zahl n sein mag. Da

$$\Sigma' - \Sigma = i\{f(a+ni) - f(a)\}$$

oder

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{(b-a)\ \{f(b) - f(a)\}}{n}$$

ist, so ist klar, dass die Differenz $\Sigma' - \Sigma$ sich, wenn n wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt. Also nähert sich nach dem Vorhergehenden die Grösse Σ, wenn n wächst, offenbar dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Setzt man

$$S = i\{f(a) + f(a+i) + f(a+2i) + \ldots + f(a+ni)\},$$

so ist

$$S - \Sigma = if(a+ni)$$

oder

$$S - \Sigma = \frac{(b-a)\,f(b)}{n},$$

und diese Differenz nähert sich folglich, wenn n wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Also nähert sich nach dem Obigen auch die Grösse

$$S = i\{f(a) + f(a+i) + f(a+2i) + \ldots + f(a+ni)\},$$

wenn n wächst, dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)dx,$$

und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, wobei man immer zu beachten hat, dass

$$\frac{b-a}{n} = i$$

gesetzt worden ist.

Wenn die Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ entweder fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, wenn man sich x

von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt, nicht erfüllt ist; so wird man sich das Intervall ab doch immer in eine gewisse Anzahl anderer Intervalle $a\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ..., $\lambda\mu$, μb getheilt denken können, in deren jedem die Function $f(x)$ entweder fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt. Und weil nun nach §. 2. 2.

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$=\int_a^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx+\ldots$$

$$\ldots+\int_\lambda^\mu f(x)dx+\int_\mu^b f(x)dx$$

ist, so wird man sich leicht überzeugen, dass das oben Bewiesene auch dann noch gilt, wenn die Function $f(x)$ nicht fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, wenn man sich x von $x=a$ bis $x=b$ stetig verändern lässt. Daher ergiebt sich jetzt der folgende allgemeine für die Theorie der bestimmten Integrale in jeder Beziehung höchst wichtige Satz:

Wenn man, indem n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{b-a}{n}=i$$

setzt, so nähert sich die Grösse

$$i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots+f(a+ni)\}$$

oder

$$if(a)+if(a+i)+if(a+2i)+\ldots+if(a+ni),$$

wenn n wächst, jederzeit dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)dx,$$

und kann demselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

§. 4.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x, y)$ eine Function der zwei veränderlichen Grössen x und y sei. Wenn man nun aber bloss x als veränderlich betrachtet, so ist das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

offenbar eine bloss von der veränderlichen Grösse y abhängende Function, und es kann also

$$\int_a^b f(x, y)dx=\varphi(y)$$

gesetzt werden.

Lässt man y sich um Δy verändern, so ergiebt sich aus dieser Gleichung auf der Stelle die Gleichung

$$\Delta\int_a^b f(x, y)dx=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y).$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_a^b f(x,y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b \frac{df(x,y)}{dy}dx = \int_a^b \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}dx;$$

und folglich, wenn man wieder nach y differentiirt,

$$\frac{d^3}{dy^3}\int_a^b f(x,y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}dx = \int_a^b \frac{d^3 f(x,y)}{dy^3}dx;$$

also, wenn man wieder nach y differentiirt,

$$\frac{d^4}{dy^4}\int_a^b f(x,y)dx = \frac{d}{dy}\int_a^b \frac{d^3 f(x,y)}{dy^3}dx = \int_a^b \frac{d^4 f(x,y)}{dy^4}dx.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist daher in völliger Allgemeinheit

$$\frac{d^n}{dy^n}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{d^n f(x,y)}{dy^n}dx.$$

Man nennt die durch diese Gleichung vorgeschriebene Operation die Differentiation unter dem Integralzeichen, und bedient sich derselben häufig bei der Entwickelung bestimmter Integrale. Hat man nämlich ein von mehreren allgemeinen Grössen abhängendes bestimmtes Integral gefunden, so kann man offenbar jede dieser Grössen als veränderlich betrachten, und nach derselben das in Rede stehende Integral auf der einen, die Function unter dem Integralzeichen auf der andern Seite des Gleichheitszeichens willkührlich oft differentiiren, wodurch man jederzeit eben so viele neue bestimmte Integrale findet, als man Differentiationen verrichtet hat.

§. 5.

Wir wollen jetzt auch den Fall betrachten, wenn die beiden Gränzen des Integrals selbst veränderlich, nämlich zwei beliebige Functionen von y sind, die wir durch Y und Y' bezeichnen wollen, so dass Y die untere, Y' die obere Gränze des Integrals ist. Setzen wir nun wieder der Kürze wegen

$$\int_Y^{Y'} f(x,y)dx = \varphi(y),$$

und lassen sich y um Δy verändern, so wird

$$\Delta\int_Y^{Y'} f(x,y)dx = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y).$$

Ferner ist, unter der Voraussetzung, dass Y und Y' in $Y+\Delta Y$ und $Y'+\Delta Y'$ übergehen, wenn y in $y+\Delta y$ übergeht, offenbar

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx = \varphi(y+\Delta y),$$

und folglich

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx - \int_Y^{Y'} f(x,y)dx = \varphi(y+\Delta y) - \varphi(y);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Delta\int_Y^{Y'} f(x,y)dx = \int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx - \int_Y^{Y'} f(x,y)dx.$$

Nach §. 2. 2. ist

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx = \int_{Y+\Delta Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx$$

und

$$\int_{Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx = \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx + \int_{Y+\Delta Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx,$$

also

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx = \int_{Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx;$$

folglich ist

$$\int_{Y+\Delta Y}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx$$
$$= \int_{Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx;$$

also nach dem Obigen

$$\Delta \int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx = \int_{Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx,$$

d. i., weil nach §. 2. 4.

$$\int_{Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx = \int_{Y}^{Y'} \{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)\}dx,$$

und folglich

$$\int_{Y}^{Y'} f(x, y+\Delta y)dx - \int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx = \int_{Y}^{Y'} \Delta f(x, y) \,.\, dx$$

ist,

$$\Delta \int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx$$
$$= \int_{Y}^{Y'} \Delta f(x, y) \,.\, dx - \int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx + \int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx,$$

also auch, offenbar

$$\frac{\Delta}{\Delta y}\int_Y^{Y'} f(x, y)dx$$

$$=\int_Y^{Y'}\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y}dx-\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx.$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int f(x, y)dx=\psi(x, y),$$

so ist

$$\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y)dx=\psi(Y+\Delta Y, y)-\psi(Y, y),$$

und folglich offenbar

$$\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx=\frac{\psi(Y+\Delta Y, y+\Delta y)-\psi(Y, y+\Delta y)}{\Delta y},$$

also auch

$$\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx=\frac{\psi(Y+\Delta Y, y+\Delta y)-\psi(Y, y+\Delta y)}{\Delta Y}\cdot\frac{\Delta Y}{\Delta y}.$$

Lässt man jetzt Δy, also natürlich auch ΔY, sich der Null nähern, und geht zu den Gränzen über, so ist

$$\operatorname{Lim}\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx$$

$$=\operatorname{Lim}\frac{\psi(Y+\Delta Y, y+\Delta y)-\psi(Y, y+\Delta y)}{\Delta Y}\cdot\operatorname{Lim}\frac{\Delta Y}{\Delta y};$$

und weil nun offenbar

$$\operatorname{Lim}\frac{\psi(Y+\Delta Y, y+\Delta y)-\psi(Y, y+\Delta y)}{\Delta Y}=\frac{d\psi(Y, y)}{dY}$$

und

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta Y}{\Delta y}=\frac{dY}{dy}$$

ist, so ist

$$\operatorname{Lim}\frac{1}{\Delta y}\int_Y^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx=\frac{d\psi(Y, y)}{dY}\cdot\frac{dY}{dy}.$$

Weil aber bekanntlich

$$\psi(x, y)=\int f(x, y)dx$$

ist, so ist

$$\frac{d\psi(x, y)}{dx}=f(x, y),\text{ also }\frac{d\psi(Y, y)}{dY}=f(Y, y),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta y}\int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx = f(Y, y)\,.\,\frac{dY}{dy}.$$

Ganz eben so ist aber natürlich

$$\operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta y}\int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx = f(Y', y)\,.\,\frac{dY'}{dy}.$$

Aus der oben bewiesenen Gleichung

$$\frac{\Delta}{\Delta y}\int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx$$

$$= \int_{Y}^{Y'} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y}dx - \frac{1}{\Delta y}\int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx$$

$$+ \frac{1}{\Delta y}\int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx$$

folgt nun, wenn man, immer unter der Voraussetzung, dass Δy sich der Null nähert, zu den Gränzen übergeht:

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta}{\Delta y}\int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx$$

$$= \operatorname{Lim}\int_{Y}^{Y'} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y}dx - \operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta y}\int_{Y}^{Y+\Delta Y} f(x, y+\Delta y)dx$$

$$+ \operatorname{Lim} \frac{1}{\Delta y}\int_{Y'}^{Y'+\Delta Y'} f(x, y+\Delta y)dx,$$

und es ist also nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\frac{d}{dy}\int_{Y}^{Y'} f(x, y)dx$$

$$= \int_{Y}^{Y'} \frac{df(x, y)}{dy}dx - f(Y, y)\,.\,\frac{dY}{dy} + f(Y', y)\,.\,\frac{dY'}{dy}.$$

Für $Y = a$, d. h. in dem Falle, wo die untere Gränze Y eine constante Grösse ist, geht diese Gleichung, weil

$$\frac{dY}{dy} = 0$$

ist, in die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_{a}^{Y'} f(x, y)dx = \int_{a}^{Y'} \frac{df(x, y)}{dy}dx + f(Y', y)\,.\,\frac{dY'}{dy}$$

über. Für $Y' = b$, d. h. in dem Falle, wo die obere Gränze Y' eine constante Grösse ist, geht die obige Gleichung, weil

$$\frac{dY'}{dy} = 0$$

ist, in die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_{Y}^{b} f(x, y)dx = \int_{Y}^{b} \frac{df(x, y)}{dy}dx - f(Y, y)\,.\,\frac{dY}{dy}$$

über. Wenn $Y = a$ und $Y' = b$ ist, d. h. wenn beide Gränzen constant sind, geht die obige Gleichung, weil

$$\frac{dY}{dy} = 0 \text{ und } \frac{dY'}{dy} = 0$$

ist, in die Gleichung

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{df(x, y)}{dy}dx$$

über, welche ganz mit der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung übereinstimmt.

§. 6.

Wir wollen jetzt überhaupt

$$\int f(x, y)dy = \varphi(x, y),$$

also

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dy} = f(x, y)$$

setzen. Nach der zuletzt im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung ist

$$\frac{d}{dy}\int_a^b \varphi(x, y)dx = \int_a^b \frac{d\varphi(x, y)}{dy}dx$$

oder

$$d\int_a^b \varphi(x, y)dx = dy\int_a^b \frac{d\varphi(x, y)}{dy}dx,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$d\int_a^b \varphi(x, y)dx = dy\int_a^b f(x, y)dx,$$

also

$$\int_a^b \varphi(x, y)dx = \int dy\int_a^b f(x, y)dx + \text{Const.}$$

Setzen wir nun überhaupt

$$\int \varphi(x, y)dx = \psi(x, y),$$

so ist

$$\int_a^b \varphi(x, y)dx = \psi(b, y) - \psi(a, y),$$

und folglich

$$\int dy\int_a^b f(x, y)dx + \text{Const} = \psi(b, y) - \psi(a, y),$$

also

$$\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)dx$$
$$= \psi(b, \beta) - \psi(a, \beta) - \psi(b, \alpha) + \psi(a, \alpha).$$

Nach dem Obigen ist

$$\int f(x, y)dy = \varphi(x, y),$$

und folglich

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)dy = \varphi(x, \beta) - \varphi(x, \alpha),$$

also

$$dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy = \varphi(x, \beta)dx - \varphi(x, \alpha)dx,$$

woraus nach §. 2. 4.

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy = \int_a^b \varphi(x, \beta)dx - \int_a^b \varphi(x, \alpha)dx$$

folgt. Weil nun

$$\int \varphi(x, y)dx = \psi(x, y)$$

gesetzt worden ist, so ist

$$\int \varphi(x, \beta)dx = \psi(x, \beta), \int \varphi(x, \alpha)dx = \psi(x, \alpha),$$

also

$$\int_a^b \varphi(x, \beta)dx = \psi(b, \beta) - \psi(a, \beta),$$

$$\int_a^b \varphi(x, \alpha)dx = \psi(b, \alpha) - \psi(a, \alpha);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

$$= \psi(b, \beta) - \psi(a, \beta) - \psi(b, \alpha) + \psi(a, \alpha).$$

Vergleicht man die beiden gefundenen Ausdrücke von

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)dx \text{ und } \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

mit einander, so findet man, dass sie gleich sind, woraus sich die wichtige Gleichung

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)dy$$

ergiebt, welche man kürzer auch auf folgende Art zu schreiben pflegt:

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x, y)dx\, dy = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)dy\, dx.$$

Hieraus kann man ohne Schwierigkeit ableiten, dass es bei mehrfachen Integrationen zwischen gegebenen Gränzen nach eben so vielen veränderlichen Grössen ganz gleichgültig ist, in welcher Ordnung man die Integrationen verrichtet, wenn nur in Bezug auf jede veränderliche Grösse immer dieselben Gränzen beibehalten werden. So überzeugt man sich z. B. durch sehr einfache Schlüsse mittelst des Vorhergehenden sogleich, dass immer

$$\int_a^b dz \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,\ y,\ z)dx$$
$$= \int_a^b dz \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,\ y,\ z)dy$$
$$= \int_\alpha^\beta dy \int_a^b dz \int_a^b f(x,\ y,\ z)dx$$
$$= \int_\alpha^\beta dy \int_a^b dx \int_a^b f(x,\ y,\ z)dz$$
$$= \int_a^b dx \int_a^b dz \int_\alpha^\beta f(x,\ y,\ z)dy$$
$$= \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,\ y,\ z)dz$$

ist.

II.

Ueber die bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} \text{ und } \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}.$$

§. 7.

Zuerst wollen wir in der Kürze die beiden Integrale

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \text{ und } \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

entwickeln.

Für $x-\alpha = u$ wird

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{udu}{u^2+\beta^2},$$

und folglich, wenn man $u^2 = v$ setzt;

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dv}{v+\beta^2}.$$

Setzt man nun endlich $v+\beta^2 = w$, so wird

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \tfrac{1}{2}lw,$$

und folglich, weil

$$w = v+\beta^2 = u^2+\beta^2 = (x-\alpha)^2+\beta^2$$

ist,

$$\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}l\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}.$$

Ferner ist, wenn man wieder $x-\alpha = u$ setzt,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{du}{u^2+\beta^2},$$

also, wenn $u = \beta z$ gesetzt wird,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int \frac{dz}{1+z^2},$$

d. i. nach einer bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \text{ Arctang } z,$$

und folglich, weil

$$z = \frac{u}{\beta} = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

ist,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \text{ Arctang } \frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Ohne Schwierigkeit ergiebt sich nun aus dem Obigen

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}l\left\{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \cdot \frac{(1-\alpha\varepsilon\nu)^2+(\beta\varepsilon\nu)^2}{(1+\alpha\varepsilon\mu)^2+(\beta\varepsilon\mu)^2}\right\}.$$

Ist also ε eine der Null unendlich nahe kommende Grösse, so ist

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}l \,.\, \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2,$$

woraus sich, wenn man, was offenbar verstattet ist, $\mu=\nu$ setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 0$$

ergiebt.

Bezeichnen wir den der trigonometrischen Tangente $\frac{x-\alpha}{\beta}$ zugehörenden Bogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, durch

$$\left(\text{Arctang } \frac{x-\alpha}{\beta}\right),$$

so ist nach dem Obigen, wenn k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet,

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\left(\text{Arctang } \frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \frac{k\pi}{\beta},$$

und folglich offenbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\{(\text{Arctang } +\infty) - (\text{Arctang } -\infty)\},$$

also, weil

$$(\text{Arctang } +\infty) = \tfrac{1}{2}\pi,\ (\text{Arctang } -\infty) = -\tfrac{1}{2}\pi$$

ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{\pi}{\beta}.$$

Weil, wie man leicht findet,

$$\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}=2\,\frac{A(x-\alpha)+B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx$$

$$=2A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+2B\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=2\pi B,$$

ein Resultat, welches für die folgenden Betrachtungen von grosser Wichtigkeit ist.

Für $B=0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=0,$$

und folglich, wenn man $\beta=0$ setzt, auch immer

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Adx}{x-\alpha}=0.$$

Also ist jederzeit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Adx}{x\pm a}=0,$$

welches auch eine in mehrfacher Beziehung wichtige Gleichung ist.

Setzt man in der obigen Hauptgleichung $-B$ für B, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=-2\pi B.$$

§. 8.

Es sei jetzt

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

wo $f(x)$ und $F(x)$ ganze rationale algebraische Functionen bezeichnen, deren erste von einem niedrigern Grade als die zweite ist, eine beliebige echte gebrochene rationale algebraische Function; der Coefficient des höchsten Gliedes der Function $F(x)$ sei die Einheit, und die Gleichung $F(x)=0$ habe lauter ungleiche Wurzeln. Die reellen Wurzeln dieser Gleichung seien

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots,$$

und ihre imaginären Wurzeln seien

$$\alpha\pm\beta\sqrt{-1},\ \alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1},\ \alpha_2\pm\beta_2\sqrt{-1},\ \ldots\ldots$$

Unter der Voraussetzung, dass $F'(x)$ wie gewöhnlich den ersten Differentialquotienten von $F(x)$ bezeichnet, seien die Werthe, welche die gebrochene Function

$$\frac{f(x)}{F'(x)}$$

für

$$x=a,\ x=a_1,\ x=a_2,\ x=a_3,\ldots\ldots$$

und für

$$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1},\ x=\alpha_1\pm\beta_1\sqrt{-1},\ x=\alpha_2\pm\beta_2\sqrt{-1},\ldots\ldots$$

erhält, respective

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ldots\ldots$$

und

$$A\pm B\sqrt{-1},\ A_1\pm B_1\sqrt{-1},\ A_2\pm B_2\sqrt{-1},\ldots\ldots;$$

so ist nach der Theorie der Zerlegung der echten gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in Partialbrüche bekanntlich

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}=&\frac{\mathfrak{A}}{x-a}+\frac{\mathfrak{A}_1}{x-a_1}+\frac{\mathfrak{A}_2}{x-a_2}+\frac{\mathfrak{A}_3}{x-a_3}+\ldots\ldots\\&+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\\&+\frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}}+\frac{A_1-B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\\&+\frac{A_2+B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1}}+\frac{A_2-B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}}\\&+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

und folglich nach §. 2. 4.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx=&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{A}dx}{x-a}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{A}_1dx}{x-a_1}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathfrak{A}_2dx}{x-a_2}+\ldots\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}}+\frac{A_1-B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}}\right\}dx\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{A_2+B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1}}+\frac{A_2-B_2\sqrt{-1}}{x-\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}}\right\}dx\\&+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

also nach §. 7.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx=-2\pi(B+B_1+B_2+B_3+\ldots.).$$

§. 9.

Wir wollen nun das Differential

$$\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

betrachten, wo m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, und

$$m-1<n, \text{ also } m<n+1$$

sein soll.

Die Wurzeln der Gleichung

$$1+x^n=0 \text{ oder } x^n=-1$$

sind alle in der Formel

$$x=(-1)^{\frac{1}{n}}$$

enthalten. Setzen wir nun in Theil I. XL. §. 57.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=-1,$$

so ist $\alpha=-1$, $\beta=0$, und folglich nach Theil I. XL. §. 52., wenn

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$$

gesetzt wird, in dem vorliegenden Falle $\varrho=1$ und

$$\varphi=\text{Arctang}0+k\pi,$$

wo Arctang0 den, absolut genommen, kleinsten Bogen, dessen trigonometrische Tangente 0 ist, und k, weil α negativ ist, eine beliebige ungerade ganze Zahl bezeichnet. Weil nun Arctang $0=0$ ist, und offenbar $k=1$ gesetzt werden kann, so ist es verstattet, $\varphi=\pi$ zu setzen.

Daher hat nach Theil I. XL. §. 57., wenn n eine gerade Zahl ist, $(-1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden n sämmtlich von einander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $1+x^n=0$ die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1};$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1};$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1};$$

u. s. w. u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}, \quad \cos\frac{(n-3)\pi}{n}-\sin\frac{(n-3)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Weil nun aber

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}-\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{-1}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$$

ist; so kann man die obigen n ungleichen Wurzeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Wenn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so hat nach Theil I. XL. §. 57. die Grösse $(-1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden n sämmtlich von einander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $1+x^n=0$ die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},\quad \cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1};$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},\quad \cos\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1};$$

u. s. w. u. s. w.

$$\cos\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\sqrt{-1},\quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Weil aber

$$\cos\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\sqrt{-1}=\cos\pi+\sin\pi\sqrt{-1}=-1$$

ist; so kann man diese n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Wenden wir jetzt den im vorigen Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satz an, so ist

$$f(x)=x^{m-1},\quad F(x)=1+x^n,\quad F'(x)=nx^{n-1},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F'(x)}=\frac{1}{n}x^{m-n}$$

zu setzen.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so ist, wenn alle im vorigen Paragraphen gebrauchte Symbole ihre dortige Bedeutung auch jetzt beibehalten, nach dem Obigen

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{n},\ \alpha_1=\cos\frac{3\pi}{n},\ \alpha_2=\cos\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-2)}=\cos\frac{(n-1)\pi}{n};$$

$$\beta=\sin\frac{\pi}{n},\ \beta_1=\sin\frac{3\pi}{n},\ \beta_2=\sin\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-2)}=\sin\frac{(n-1)\pi}{n};$$

und folglich

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_2\pm B_2\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)}\pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n};$$

d. i. nach Theil I. XL. §. 54.

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{3(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_2\pm B_2\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{5(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)}\pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\}.$$

Folglich ist

$$B=\frac{1}{n}\sin\frac{(m-n)\pi}{n},$$

$$B_1=\frac{1}{n}\sin\frac{3(m-n)\pi}{n},$$

$$B_2=\frac{1}{n}\sin\frac{5(m-n)\pi}{n},$$

u. s. w.

ist; so kann man die obigen n ungleichen Wurzeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Wenn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so hat nach Theil I. XL. §. 57. die Grösse $(-1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden n sämmtlich von einander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $1+x^n=0$ die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},\quad \cos\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1};$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},\quad \cos\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1};$$

u. s. w. u. s. w.

$$\cos\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\sqrt{-1},\quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Weil aber

$$\cos\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\sqrt{-1}=\cos\pi+\sin\pi\sqrt{-1}=-1$$

ist; so kann man diese n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln auch unter der folgenden Form darstellen:

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Wenden wir jetzt den im vorigen Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satz an, so ist

$$f(x)=x^{m-1},\quad F(x)=1+x^n,\quad F'(x)=nx^{n-1},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F'(x)}=\frac{1}{n}x^{m-n}$$

zu setzen.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so ist, wenn alle im vorigen Paragraphen gebrauchte Symbole ihre dortige Bedeutung auch jetzt beibehalten, nach dem Obigen

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{n},\ \alpha_1=\cos\frac{3\pi}{n},\ \alpha_2=\cos\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-2)}=\cos\frac{(n-1)\pi}{n};$$

$$\beta=\sin\frac{\pi}{n},\ \beta_1=\sin\frac{3\pi}{n},\ \beta_2=\sin\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-2)}=\sin\frac{(n-1)\pi}{n};$$

und folglich

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_2\pm B_2\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)}\pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n};$$

d. i. nach Theil I. XL. §. 54.

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{3(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_2\pm B_2\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{5(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)}\pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\}.$$

Folglich ist

$$B=\frac{1}{n}\sin\frac{(m-n)\pi}{n},$$

$$B_1=\frac{1}{n}\sin\frac{3(m-n)\pi}{n},$$

$$B_2=\frac{1}{n}\sin\frac{5(m-n)\pi}{n},$$

u. s. w.

Wenden wir jetzt den im vorigen Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satz an, so ist

$$f(x)=x^{m-1},\ F(x)=1+x^n,\ F'(x)=nx^{n-1},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F'(x)}=\frac{1}{n}x^{m-n}$$

zu setzen.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so ist, wenn alle im vorigen Paragraphen gebrauchte Symbole ihre dortige Bedeutung auch jetzt beibehalten, nach dem Obigen

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{n},\ \alpha_1=\cos\frac{3\pi}{n},\ \alpha_2=\cos\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-2)}=\cos\frac{(n-1)\pi}{n};$$

$$\beta=\sin\frac{\pi}{n},\ \beta_1=\sin\frac{3\pi}{n},\ \beta_2=\sin\frac{5\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-2)}=\sin\frac{(n-1)\pi}{n};$$

und folglich

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{n}\pm\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{3\pi}{n}\pm\sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_2\pm B_2\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{5\pi}{n}\pm\sin\frac{5\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)}\pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n};$$

d. i. nach Theil I. XL. §. 54.

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{3(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_2\pm B_2\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{5(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-2)}\pm B_{\frac{1}{2}(n-2)}\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\}.$$

Folglich ist

$$B=\frac{1}{n}\sin\frac{(m-n)\pi}{n},$$

$$B_1=\frac{1}{n}\sin\frac{3(m-n)\pi}{n},$$

$$B_2=\frac{1}{n}\sin\frac{5(m-n)\pi}{n},$$

u. s. w.

$$B_{\frac{1}{2}(n-2)} = \frac{1}{n} \sin \frac{(n-1)(m-n)\pi}{n};$$

und daher nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen allgemeinen Satze für ein gerades n

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\left\{\sin \frac{(m-n)\pi}{n} + \sin \frac{3(m-n)\pi}{n} + \sin \frac{5(m-n)\pi}{n} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \sin \frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\right\},$$

immer unter der Voraussetzung, dass $m-1<n$ oder $m<n+1$ ist.

Wenn n ungerade ist, so ist nach dem Obigen

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{n},\ \alpha_1 = \cos \frac{3\pi}{n},\ \alpha_2 = \cos \frac{5\pi}{n}, \ldots \alpha_{\frac{1}{2}(n-3)} = \cos \frac{(n-2)\pi}{n};$$

$$\beta = \sin \frac{\pi}{n},\ \beta_1 = \sin \frac{3\pi}{n},\ \beta_2 = \sin \frac{5\pi}{n}, \ldots \beta_{\frac{1}{2}(n-3)} = \sin \frac{(n-2)\pi}{n};$$

und durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie vorher erhält man also offenbar in diesem Falle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\left\{\sin \frac{(m-n)\pi}{n} + \sin \frac{3(m-n)\pi}{n} + \sin \frac{5(m-n)\pi}{n} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \sin \frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}\right\}.$$

Sind nun überhaupt

$$x,\ x+y,\ x+2y,\ x+3y, \ldots x+ny$$

Winkel in arithmetischer Progression, so ist nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin x,\\
\sin(x+y) &= 2\sin x \cos y - \sin(x-y),\\
\sin(x+2y) &= 2\sin(x+y)\cos y - \sin x,\\
\sin(x+3y) &= 2\sin(x+2y)\cos y - \sin(x+y),
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\sin(x+ny) = 2\sin(x+(n-1)y)\cos y - \sin(x+(n-2)y);$$

und folglich, wenn man

$$S = \sin x + \sin(x+y) + \sin(x+2y) + \ldots + \sin(x+ny)$$

setzt, wie man leicht durch Addition der obigen Gleichungen findet:

$$S = \sin x + 2\{S - \sin(x+ny)\}\cos y - \sin(x-y)$$

$$-\{S - \sin(x+(n-1)y) - \sin(x+ny)\},$$

$$2S(1-\cos y)=\sin x-2\sin(x+ny)\cos y-\sin(x-y)$$
$$+\sin(x+ny)\cos y-\cos(x+ny)\sin y+\sin(x+ny)$$
$$=\sin x(1-\cos y)+\cos x\sin y$$
$$+\sin(x+ny)(1-\cos y)-\cos(x+ny)\sin y,$$

also, weil

$$1-\cos y=2\sin\tfrac{1}{2}y^2,\ \sin y=2\sin\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}y$$

ist, wenn man auf beiden Seiten mit $2\sin\frac{1}{2}y$ dividirt,

$$2S\sin\tfrac{1}{2}y=\sin x\sin\tfrac{1}{2}y+\cos x\cos\tfrac{1}{2}y$$
$$+\sin(x+ny)\sin\tfrac{1}{2}y-\cos(x+ny)\cos\tfrac{1}{2}y$$
$$=\cos(x-\tfrac{1}{2}y)-\cos(x+(n+\tfrac{1}{2})y).$$

Folglich ist

$$S=\frac{\cos(x-\frac{1}{2}y)-\cos(x+(n+\frac{1}{2})y)}{2\sin\frac{1}{2}y}$$

oder

$$S=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)y\sin(x+\frac{1}{2}ny)}{\sin\frac{1}{2}y}.$$

Aus dem ersten dieser beiden Ausdrücke erhalten wir unter der Voraussetzung, dass n eine gerade Zahl ist, leicht

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$=\frac{1-\cos(m-n)\pi}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

und folglich, weil

$$\cos(m-n)\pi=\cos m\pi,\ \sin\frac{(m-n)\pi}{n}=-\sin\frac{m\pi}{n}$$

ist,

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$
$$=-\frac{1-\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist also m eine ungerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-1)(m-1)\pi}{n}$$

$$=-\frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{2\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

wo, da n gerade, m ungerade ist, und nach dem Vorhergehenden $m<n+1$ sein muss, offenbar $m<n$ ist.

Aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale erhellet auf der Stelle, dass unter den gemachten Voraussetzungen, wenn nämlich n gerade und m ungerade, also $m-1$ gerade ist, jederzeit

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\int_{-\infty}^0\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^0\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}+\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=2\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$$

oder

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

folglich nach dem Obigen

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

ist.

Ist m eine gerade, also $m-1$ eine ungerade Zahl, so erhellet aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale auf der Stelle, dass in völliger Allgemeinheit für ein gerades n

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=-\int_{-\infty}^0\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^0\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}+\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=0,$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=0$$

ist.

Für ein ungerades n erhält man aus dem Obigen

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$

$$=\frac{1-\cos\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

oder, weil n eine ungerade Zahl ist,

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$

$$=-\frac{1-\cos m\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist nun m eine gerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$

$$=-\frac{1-\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}=-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n};$$

für ein ungerades m ist dagegen

$$\sin\frac{(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{3(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{5(m-n)\pi}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$

$$=-\frac{1+\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}=-\tfrac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

Folglich ist nach dem Obigen für ein ungerades n und ein gerades m, wenn $m<n$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}.$$

Dagegen ist nach dem Obigen für ein ungerades n und ein ungerades m, wenn $m<n+1$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

§. 10.

Wir wollen nun ferner auch das Differential

$$\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$$

betrachten, wo wieder m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, und

$$m-1<n, \text{ also } m<n+1$$

sein soll.

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^n-1=0 \text{ oder } x^n=1$$

sind alle in der Formel

$$x=(+1)^{\frac{1}{n}}$$

enthalten. Setzen wir nun in Theil I. XL. §. 57.

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=+1,$$

so ist $\alpha=+1$, $\beta=0$, und folglich nach Theil I. XL. §. 52., wenn

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$$

gesetzt wird, in dem vorliegenden Falle $\varrho=1$ und

$$\varphi=\text{Arctang}\,0+k\pi,$$

wo Arctang0 den, absolut genommen, kleinsten Bogen, dessen trigonometrische Tangente 0 ist, und k, weil α positiv ist, eine beliebige gerade ganze Zahl bezeichnet. Weil nun Arctang $0=0$ ist, und offenbar $k=0$ gesetzt werden kann, so ist es verstattet, $\varphi=0$ zu setzen.

Daher hat nach Theil I. XL. §. 57., wenn n eine gerade Zahl ist, $(+1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden n sämmtlich von einander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $x^n-1=0$ die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$\pm 1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Wenn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so hat nach Theil I. XL. §. 57. die Grösse $(+1)^{\frac{1}{n}}$ die folgenden n sämmtlich von ein-

ander verschiedenen Werthe, also die Gleichung $1-x^n=0$ die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln:

$$+1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Um nun wieder den in §. 8. bewiesenen allgemeinen Satz anzuwenden, müssen wir

$$f(x)=x^{m-1},\ F(x)=x^n-1,\ F'(x)=nx^{n-1},$$

und folglich

$$\frac{f(x)}{F'(x)}=\frac{1}{n}x^{m-n}$$

setzen.

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so ist in Bezug auf §. 8.

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{n},\ \alpha_1=\cos\frac{4\pi}{n},\ \alpha_2=\cos\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-4)}=\cos\frac{(n-2)\pi}{n};$$

$$\beta=\sin\frac{2\pi}{n},\ \beta_1=\sin\frac{4\pi}{n},\ \beta_2=\sin\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-4)}=\sin\frac{(n-2)\pi}{n};$$

und folglich

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

$$A_2\pm B_2\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-4)}\pm B_{\frac{1}{2}(n-4)}\sqrt{-1}=\frac{1}{n}(\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1})^{m-n};$$

d. i. nach Theil I. XL. §. 54.

$$A\pm B\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{2(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1}=\frac{1}{n}\{\cos\frac{4(m-n)\pi}{n}\pm\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

$$A_2 \pm B_2\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{6(m-n)\pi}{n} \pm \sin\frac{6(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\},$$

u. s. w.

$$A_{\frac{1}{2}(n-4)} \pm B_{\frac{1}{2}(n-4)}\sqrt{-1} = \frac{1}{n}\{\cos\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$
$$\pm \sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}\sqrt{-1}\}.$$

Folglich ist

$$B = \frac{1}{n}\sin\frac{2(m-n)\pi}{n},$$

$$B_1 = \frac{1}{n}\sin\frac{4(m-n)\pi}{n},$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sin\frac{6(m-n)\pi}{n},$$

u. s. w.

$$B_{\frac{1}{2}(n-4)} = \frac{1}{n}\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n},$$

und daher nach §. 8. für ein gerades n, weil

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{x^n-1}$$

ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$$
$$= \frac{2\pi}{n}\left\{\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}\right\},$$

immer unter der Voraussetzung, dass $m-1 < n$ oder $m < n+1$ ist.

Wenn n ungerade ist, so ist nach dem Obigen

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n},\ \alpha_1 = \cos\frac{4\pi}{n},\ \alpha_2 = \cos\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \alpha_{\frac{1}{2}(n-3)} = \cos\frac{(n-1)\pi}{n};$$

$$\beta = \sin\frac{2\pi}{n},\ \beta_1 = \sin\frac{4\pi}{n},\ \beta_2 = \sin\frac{6\pi}{n},\ \ldots\ \beta_{\frac{1}{2}(n-3)} = \sin\frac{(n-1)\pi}{n};$$

und durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie vorher erhält man also offenbar in diesem Falle

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$$
$$= \frac{2\pi}{n}\left\{\sin\frac{2(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{4(m-n)\pi}{n} + \sin\frac{6(m-n)\pi}{n} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}\right\}.$$

Für ein gerades n ist nach dem vorigen Paragraphen.

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$

$$=\frac{\cos\frac{(m-n)\pi}{n}-\cos\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

oder, weil n eine gerade Zahl ist, wie man leicht findet,

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$

$$=\tfrac{1}{2}(1-\cos m\pi)\cot\frac{m\pi}{n}.$$

Ist also m eine ungerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-2)(m-n)\pi}{n}$$

$$=\cot\frac{m\pi}{n},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{2\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n},$$

wo $m<n$ ist, da n gerade, m ungerade ist, und nach dem Vorhergehenden $m<n+1$ sein muss.

Aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale erhellet auf der Stelle, dass unter den gemachten Voraussetzungen, wenn nämlich n gerade und m ungerade, also $m-1$ gerade ist, jederzeit

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}+\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=2\int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$$

oder

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

folglich nach dem Obigen

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}$$

ist.

Ist m eine gerade, also $m-1$ eine ungerade Zahl, so erhellet aus der in §. 3. bewiesenen Haupteigenschaft der bestimmten Integrale auf der Stelle, dass in völliger Allgemeinheit für ein gerades n

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=-\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}+\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=0,$$

also nach §. 2. 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=0$$

ist.

Für ein ungerades n erhält man aus dem Obigen

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$

$$=\frac{\cos\frac{(m-n)\pi}{n}-\cos(m-n)\pi}{2\sin\frac{(m-n)\pi}{n}},$$

oder, weil n eine ungerade Zahl ist,

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$

$$=-\frac{\cos m\pi-\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Ist nun m eine gerade Zahl, so ist

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$

$$=-\frac{1-\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}=-\tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\frac{m\pi}{2n};$$

für ein ungerades m ist dagegen

$$\sin\frac{2(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{4(m-n)\pi}{n}+\sin\frac{6(m-n)\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)(m-n)\pi}{n}$$

$$=\frac{1+\cos\frac{m\pi}{n}}{2\sin\frac{m\pi}{n}}=\tfrac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{2n}.$$

Folglich ist nach dem Obigen für ein ungerades n und ein gerades m, wenn $m<n$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = -\frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{m\pi}{2n}.$$

Dagegen ist nach dem Obigen für ein ungerades n und ein ungerades m, wenn $m < n+1$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{2n}.$$

§. 11.

Setzen wir in der in §. 9. für den Fall, wenn m ungerade und n gerade ist, gefundenen Formel für m und n respective $2m+1$ und $2n$, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

für $2m+1 < 2n$ oder

$$\frac{2m+1}{2n} < 1.$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus §. 10.

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \operatorname{tang} \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

für $2m+1 < 2n$ oder

$$\frac{2m+1}{2n} < 1.$$

Setzt man $x^{2n} = z$ und

$$\frac{2m+1}{2n} = a,$$

so findet man leicht

$$\frac{2nx^{2m}dx}{1 \pm x^{2n}} = \frac{z^{a-1}dz}{1 \pm z},$$

und folglich, weil für $x=0$ und $x=\infty$ auch respective $z=0$ und $z=\infty$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1 \pm z} = 2n \int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1 \pm x^{2n}}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1-z} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi};$$

oder, was natürlich dasselbe ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi}.$$

Nicht unbeachtet zu lassen hat man, dass nach dem Obigen

$$\frac{2m+1}{2n} = a \text{ und } \frac{2m+1}{2n} < 1$$

ist.

Wenn nun aber jetzt a eine beliebige positive Grösse ist, so kann man leicht zeigen, dass man den Bruch $\frac{2m+1}{2n}$, wo m und n veränderliche positive ganze Zahlen bezeichnen, dieser Grösse beliebig nahe bringen, d. h. dass man die positiven ganzen Zahlen m und n jederzeit so bestimmen kann, dass der numerische oder absolute Werth der Differenz zwischen den beiden Grössen a und $\frac{2m+1}{2n}$ kleiner als jede gegebene noch so kleine positive Grösse ν ist. Um dies zu zeigen, wollen wir die beiden Bedingungen

$$\frac{2m+1}{2n} > a, \quad \frac{2m+1}{2n} - a < \nu$$

zu erfüllen suchen. Diese beiden Bedingungen sind aber offenbar jederzeit erfüllt, wenn $\frac{2m+1}{2n}$ eine Mittelgrösse zwischen a und $a+\nu$, d. h. *) wenn

$$\frac{2m+1}{2n} = M(a, a+\nu)$$

ist. Diese letztere Bedingung ist aber nach der Lehre von den Mittelgrössen jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$2m+1 = M\{2an, 2(a+\nu)n\}$$

erfüllt ist, und es kommt also jetzt offenbar bloss darauf an, zu zeigen, dass die positive ganze Zahl n jederzeit so bestimmt werden kann, dass zwischen den beiden positiven Grössen $2an$ und $2(a+\nu)n$ eine gewisse ungerade positive ganze Zahl liegt. Dies ist aber jederzeit der Fall, wenn die Differenz

$$2(a+\nu)n - 2an = 2n\nu$$

grösser als 2 ist. Setzen wir nämlich

$$2an = k + \frac{\alpha}{\beta}, \quad 2(a+\nu)n = k' + \frac{\alpha'}{\beta'},$$

wo k und k' positive ganze Zahlen, $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha'}{\beta'}$ positive echte Brüche sind, so ist

$$2n\nu = k' - k + \frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist nun

$$k' - k + \frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta} > 2,$$

so ist offenbar jederzeit

*) Thl. I. XL. §. 33.

$$k' - k > 1,$$

und folglich, weil $k' - k$ eine positive ganze Zahl ist,

$$k' - k \geqq 2$$

oder

$$k' \geqq k + 2.$$

Wäre nun auch bloss

$$k' = k + 2,$$

so würden doch zwischen

$$k + \frac{\alpha}{\beta} \text{ und } k' + \frac{\alpha'}{\beta'},$$

d. i. zwischen

$$2an \text{ und } 2(a + \nu)n$$

jedenfalls die beiden ganzen Zahlen $k + 1$ und $k + 2$ liegen, von denen eine nothwendig ungerade sein muss, und um so mehr muss also, wenn

$$k' > k + 2$$

ist, zwischen

$$2an \text{ und } 2(a + \nu)n$$

jederzeit eine ungerade Zahl liegen. Man sieht also, dass unsere oben ausgesprochene Behauptung bewiesen sein wird, wenn man zeigen kann, dass sich die positive ganze Zahl n jederzeit so bestimmen lässt, dass

$$2n\nu > 2$$

ist. Da nun aber diese Bedingung erfüllt ist, wenn man, was offenbar jederzeit möglich ist, die positive ganze Zahl n so bestimmt, dass

$$n > \frac{1}{\nu}$$

ist, so ist unsere obige Behauptung nun als vollständig bewiesen anzusehen, d. h. es ist in völliger Strenge gezeigt worden, dass die positiven ganzen Zahlen m und n immer so bestimmt werden können, dass der numerische oder absolute Werth der Differenz zwischen den beiden Grössen a und $\frac{2m+1}{2n}$ kleiner als jede gegebene noch so kleine positive Grösse ist.

Nimmt man dies mit dem Obigen zusammen, so ist klar, dass für jedes positive a, welches kleiner als die Einheit ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \frac{\pi}{\tang a\pi}$$

ist, welches zwei in jeder Beziehung höchst merkwürdige und wichtige Resultate sind.

III.

Von den Euler'schen Integralen.

§. 12.

Euler'sche Integrale der ersten und zweiten Art heissen respective die beiden bestimmten Integrale

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \text{ und } \int_0^1 (l\frac{1}{x})^{a-1}dx,$$

in denen die Grössen a und b immer als positiv angenommen werden. Das erste dieser beiden Integrale wollen wir durch $(\frac{b}{a})$, das zweite durch $\Gamma(a)$ bezeichnen, und wollen also

$$(\frac{b}{a}) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,$$

$$\Gamma(a) = \int_0^1 (l\frac{1}{x})^{a-1}dx$$

setzen *).

Jedes dieser beiden Integrale ist einer bemerkenswerthen Transformation fähig, die wir jetzt zunächst kennen lernen wollen.

Setzt man nämlich

$$\frac{x}{1-x} = y,$$

also

$$x = \frac{y}{1+y},\ 1-x = \frac{1}{1+y},\ dx = \frac{dy}{(1+y)^2};$$

so ist, wie man leicht findet,

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}},$$

und folglich, weil für $x=0$ und $x=1$ offenbar respective $y=0$ und $y=\infty$ ist,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}}.$$

Setzt man ferner

$$l\frac{1}{x} = z,$$

so ist

*) Diese Bezeichnung gebraucht Herr Lejeune Dirichlet in seiner ausgezeichneten Abhandlung: Sur les intégrales Eulériennes in Crelle's Journal. T. XV. S. 258. Legendre gebraucht für die Integrale der ersten Art eine andere Bezeichnung, und geht auch von einem etwas verschiedenen Begriffe dieser Integrale aus. Wir sind aber hier Herrn Lejeune Dirichlet gefolgt.

$$\frac{1}{x}=e^z,\ x=e^{-z},\ dx=-e^{-z}dz,$$

und folglich

$$(l\frac{1}{x})^{a-1}dx=-e^{-z}z^{a-1}dz.$$

Weil nun für $x=0$ und $x=1$ offenbar respective $z=\infty$ und $z=0$ ist, so ist

$$\int_0^1(l\frac{1}{x})^{a-1}dx=-\int_\infty^0 e^{-z}z^{a-1}dz,$$

folglich nach nach §. 2. 1.

$$\int_0^1(l\frac{1}{x})^{a-1}dx=\int_0^\infty e^{-z}z^{a-1}dz.$$

Weil man im Vorhergehenden für y und z offenbar auch x schreiben kann, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$(\frac{b}{a})=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}},$$

$$\Gamma(a)=\int_0^1(l\frac{1}{x})^{a-1}dx=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx.$$

Weil, wie wir nachher sehen werden, die Euler'schen Integrale der ersten Art immer durch Euler'sche Integrale der zweiten Art ausgedrückt werden können, so wollen wir unsere Betrachtung hier für jetzt auf die letzteren einschränken.

§. 13.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx.$$

Weil nun bekanntlich

$$e^{-x}dx=-d.e^{-x}$$

ist, so ist

$$\int e^{-x}dx=-e^{-x}+\text{Const.}$$

Für $x=0$ ist $e^{-x}=1$, und für $x=\infty$ ist offenbar $e^{-x}=0$. Also ist

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=0-(-1)=1,$$

folglich

$$\Gamma(1)=1.$$

§. 14.

Nach einer aus der Integralrechnung bekannten Reductionsformel ist

$$\int e^{-x}x^a dx = x^a \int e^{-x}dx - a\int x^{a-1}dx \int e^{-x}dx,$$

und folglich, wenn man für $\int e^{-x}dx$ seinen aus dem vorigen Paragraphen bekannten Ausdruck setzt,

$$\int e^{-x}x^a dx = -x^a e^{-x} + a\int e^{-x}x^{a-1}dx + \text{Const.}$$

Für $x=0$ ist, weil a immer als positiv angenommen wird, $x^a e^{-x}=0$. Für $x=\infty$ werden Zähler und Nenner des mit der Grösse $x^a e^{-x}$ identischen Bruchs $\frac{x^a}{e^x}$ unendlich. Weil nun

$$\frac{d^k \,.\, e^x}{dx^k} = e^x$$

und

$$\frac{d^k \,.\, x^a}{dx^k} = a(a-1)\,.\,.\,(a-k+1)x^{a-k}$$

ist, so ist für $x=\infty$, was auch die positive ganze Zahl k sein mag, $\frac{d^k \,.\, e^x}{dx^k}=\infty$; wenn man aber, was offenbar verstattet ist, k grösser als a nimmt, so ist für $x=\infty$ offenbar $\frac{d^k \,.\, x^a}{dx^k}=0$. Hieraus schliesst man nach bekannten Principien der Differentialrechnung, dass auch für $x=\infty$ der Bruch $\frac{x^a}{e^x}$ oder das Product $x^a e^{-x}=0$ ist. Also ist nach dem Obigen offenbar

$$\int_0^\infty e^{-x}x^a dx = a\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,$$

d. i. in der bekannten Bezeichnung der Euler'schen Integrale der zweiten Art

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

welches eine sehr merkwürdige und wichtige Relation zwischen den Euler'schen Integralen der zweiten Art ist.

Ist a die positive ganze Zahl n, so erhält man durch successive Anwendung der obigen Relation leicht

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\,.\,.\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,\Gamma(1),$$

und folglich, weil nach dem vorigen Paragraphen $\Gamma(1)=1$ ist,

$$\Gamma(n+1) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,n$$

oder

$$\Gamma(n) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,(n-1).$$

§. 13.

Unter der Voraussetzung, dass a eine positive Grösse ist, sei

[illegible]

$$\int e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{1}{\mu^a} \int e^{-y} y^{a-1} dy,$$

und folglich, weil für $x=0$ und $x=\infty$ offenbar respective $y=0$ und $y=\infty$ ist,

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{1}{\mu^a} \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1} dy$$

oder

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{1}{\mu^a} \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx;$$

also

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma(a)}{\mu^a},$$

immer unter der Voraussetzung, dass μ positiv ist.

Setzt man für a die positive ganze Zahl $n+1$, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\mu^{n+1}},$$

und folglich nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} x^n dx = \frac{1.2.3.4\ldots n}{\mu^{n+1}},$$

unter der Voraussetzung, dass n eine positive ganze Zahl und μ positiv ist.

§. 16.

Wenn $1+x$ eine positive Grösse ist, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)u} u^{b-1} du = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

wo b als positiv angenommen wird. Folglich ist offenbar

$$\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{dx}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} du,$$

also

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} du,$$

woraus sich ferner nach §. 6.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} dx$$

ergiebt. Nun ist aber nach §. 2. 3.

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} dx = e^{-u} u^{b-1} \int_0^\infty e^{-ux} x^{a-1} dx,$$

und folglich, wenn wir u als positiv annehmen, nach dem vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)u} x^{a-1} u^{b-1} dx = e^{-u} u^{b-a-1} \Gamma(a);$$

also, wenn wir $x = t^2$ setzen,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

welches auch ein höchst wichtiges und merkwürdiges Resultat ist.

Nach §. 2. 2. ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt + \int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

und nach dem in §. 3. bewiesenen Satze ist offenbar

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Nach §. 14. ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) &= (n-\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) \\
&= (n-\tfrac{1}{2})\,(n-\tfrac{3}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{3}{2}) \\
&= (n-\tfrac{1}{2})\,(n-\tfrac{3}{2})\,(n-\tfrac{5}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{5}{2}) \\
&\qquad \text{u. s. w.} \\
&= (n-\tfrac{1}{2})\,(n-\tfrac{3}{2})\ldots\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}),
\end{aligned}$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

ist,

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

§. 17.

Umgekehrt kann man nun aber auch die Euler'schen Integrale der zweiten Art immer durch Euler'sche Integrale der ersten Art ausdrücken. Bezeichnet nämlich n eine positive ganze Zahl, so ist nach der im vorigen Paragraphen gefundenen Hauptformel

$$\times\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\times\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left(x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\times\left(x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right);$$

also, wenn man immer je zwei conjugirte imaginäre Factoren mit einander verbindet,

$$x^n-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{n}+1\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right).$$

Dividirt man nun durch x^2-1, so erhält man nach einem sehr bekannten arithmetischen Satze

$$x^{n-2}+x^{n-4}+x^{n-6}+\ldots+x^2+1$$

$$=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{n}+1\right)$$

u. s. w.

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right),$$

also für $x=1$

$$\frac{n}{2}=2^{\frac{n-2}{2}}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right),$$

oder, wenn wir jetzt n für die positive ganze Zahl $\frac{n}{2}$ setzen,

$$n=2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=2^{2(n-1)}\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}^2,$$

folglich

$$\sqrt{n} = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Nun ist aber allgemein

$$\sin\frac{k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{2n} \cos\frac{k\pi}{2n} = 2\sin\frac{k\pi}{2n} \sin\frac{(n-k)\pi}{2n},$$

und folglich

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$= 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$$\times \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} \sin\frac{(n-2)\pi}{2n} \sin\frac{(n-3)\pi}{2n} \ldots \sin\frac{\pi}{2n}$$

$$= 2^{n-1}\{\sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1} \cdot \frac{n}{2^{2(n-1)}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\{\Gamma(\tfrac{1}{n})\, \Gamma(\tfrac{2}{n})\, \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n})\}^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n},$$

folglich

$$\Gamma(\tfrac{1}{n})\, \Gamma(\tfrac{2}{n})\, \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = \{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nach §. 14. ist nun

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{n}) = \frac{1}{n}\, \Gamma(\tfrac{1}{n}),$$

$$\Gamma(\tfrac{n+2}{n}) = \frac{2}{n}\, \Gamma(\tfrac{2}{n}),$$

$$\Gamma(\tfrac{n+3}{n}) = \frac{3}{n}\, \Gamma(\tfrac{3}{n}),$$

u. s. w.

$$\Gamma(\tfrac{2n-1}{n}) = \frac{n-1}{n}\, \Gamma(\tfrac{n-1}{n});$$

also

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{n})\, \Gamma(\tfrac{n+2}{n})\, \Gamma(\tfrac{n+3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{2n-1}{n})$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n^{n-1}}\, \Gamma(\tfrac{1}{n})\, \Gamma(\tfrac{2}{n})\, \Gamma(\tfrac{3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{n-1}{n});$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{n})\, \Gamma(\tfrac{n+2}{n})\, \Gamma(\tfrac{n+3}{n}) \ldots \Gamma(\tfrac{2n-1}{n}) = \frac{1.2..(n-1)}{n^{n-1}} \left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(\frac{b:n}{a:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{b}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{n}\right)}.$$

Folglich ist, wenn auch m eine beliebige positive ganze Z…
zeichnet,

$$\left(\frac{1:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{2:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{3:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)},$$

u. s. w.

$$\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeich…
erhält man

$$\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\ldots\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^m}{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)};$$

also

$$\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^m}{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\ldots\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)}.$$

Für $m=n$ erhält man aus dieser Formel, weil bekanntlich $\Gamma($…
ist,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\left\{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\ldots\left(\frac{n-1:n}{1:n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\left\{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\ldots\left(\frac{n-1:n}{1:n}\right)\right\}^{\frac{m}{n}}}{\left(\frac{1:n}{1:n}\right)\left(\frac{2:n}{1:n}\right)\left(\frac{3:n}{1:n}\right)\ldots\left(\frac{m-1:n}{1:n}\right)},$$

und es kann folglich, weil $\frac{m}{n}$ jeder positive rationale Bruch sein kann, jedes Euler'sche Integral der zweiten Art durch lauter Euler'sche Integrale der ersten Art ausgedrückt werden.

§. 18.

Wenn n wieder eine positive ganze Zahl bezeichnet, so ist nach §. 16.

$$\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{n-1}{n})=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$\Gamma(\frac{2}{n})\,\Gamma(\frac{n-2}{n})=\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}},$$

$$\Gamma(\frac{3}{n})\,\Gamma(\frac{n-3}{n})=\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}},$$

u. s. w.

$$\Gamma(\frac{n-1}{n})\,\Gamma(\frac{1}{n})=\frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt,

$$\{\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{2}{n})\,\Gamma(\frac{3}{n})\ldots\Gamma(\frac{n-1}{n})\}^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\,\sin\frac{2\pi}{n}\,\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

In §. 10. haben wir gesehen, dass die Gleichung $x^n-1=0$, wenn n eine gerade Zahl ist, die folgenden n sämmtlich unter einander ungleichen Wurzeln hat:

$$\pm 1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n}\pm\sin\frac{6\pi}{n}\sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Folglich ist nach einem bekannten Satze von den Gleichungen

$$x^n-1=(x-1)\,(x+1)\,(x-\cos\frac{2\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times(x-\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1})$$

$$\times\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}-\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\times\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left(x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}-\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

$$\times\left(x-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}\right);$$

also, wenn man immer je zwei conjugirte imaginäre Factoren mit einander verbindet,

$$x^n-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{n}+1\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right).$$

Dividirt man nun durch x^2-1, so erhält man nach einem sehr bekannten arithmetischen Satze

$$x^{n-2}+x^{n-4}+x^{n-6}+\ldots+x^2+1$$

$$=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)$$

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{n}+1\right)$$

u. s. w.

$$\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right),$$

also für $x=1$

$$\frac{n}{2}=2^{\frac{n-2}{2}}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right),$$

oder, wenn wir jetzt n für die positive ganze Zahl $\frac{n}{2}$ setzen,

$$n=2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=2^{2(n-1)}\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}^2,$$

folglich

$$\sqrt{n} = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Nun ist aber allgemein

$$\sin\frac{k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{2n} \cos\frac{k\pi}{2n} = 2\sin\frac{k\pi}{2n} \sin\frac{(n-k)\pi}{2n},$$

und folglich

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$= 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$$\times \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} \sin\frac{(n-2)\pi}{2n} \sin\frac{(n-3)\pi}{2n} \ldots \sin\frac{\pi}{2n}$$

$$= 2^{n-1}\{\sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{2\pi}{2n} \sin\frac{3\pi}{2n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{3\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1} \cdot \frac{n}{2^{2(n-1)}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\{\Gamma(\frac{1}{n}) \Gamma(\frac{2}{n}) \Gamma(\frac{3}{n}) \ldots \Gamma(\frac{n-1}{n})\}^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n},$$

folglich

$$\Gamma(\frac{1}{n}) \Gamma(\frac{2}{n}) \Gamma(\frac{3}{n}) \ldots \Gamma(\frac{n-1}{n}) = \{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nach §. 14. ist nun

$$\Gamma(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n} \Gamma(\frac{1}{n}),$$

$$\Gamma(\frac{n+2}{n}) = \frac{2}{n} \Gamma(\frac{2}{n}),$$

$$\Gamma(\frac{n+3}{n}) = \frac{3}{n} \Gamma(\frac{3}{n}),$$

u. s. w.

$$\Gamma(\frac{2n-1}{n}) = \frac{n-1}{n} \Gamma(\frac{n-1}{n});$$

also

$$\Gamma(\frac{n+1}{n}) \Gamma(\frac{n+2}{n}) \Gamma(\frac{n+3}{n}) \ldots \Gamma(\frac{2n-1}{n})$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n^{n-1}} \Gamma(\frac{1}{n}) \Gamma(\frac{2}{n}) \Gamma(\frac{3}{n}) \ldots \Gamma(\frac{n-1}{n});$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\Gamma(\frac{n+1}{n}) \Gamma(\frac{n+2}{n}) \Gamma(\frac{n+3}{n}) \ldots \Gamma(\frac{2n-1}{n}) = \frac{1.2..(n-1)}{n^{n-1}} \left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

§. 19.

Nach §. 15. ist, wenn s eine positive Constante bezeichnet,

$$1.\quad \int_0^\infty e^{-sx}x^{a-1}dx = \frac{\Gamma(a)}{s^a}.$$

Nun ist, wovon man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann,

$$\int e^{-sx}dx = -\frac{e^{-sx}}{s} + \text{Const.},$$

und folglich, weil die Grösse s positiv ist,

$$2.\quad \int_0^\infty e^{-sx}dx = 0 - (-\frac{1}{s}) = \frac{1}{s};$$

also

$$\int ds \int_0^\infty e^{-sx}dx = \int \frac{ds}{s} = ls + \text{Const.},$$

und folglich, wenn α und β positive Grössen bezeichnen,

$$\int_\alpha^\beta ds \int_0^\infty e^{-sx}dx = l\frac{\beta}{\alpha}.$$

Nach §. 6. ist aber

$$\int_\alpha^\beta ds \int_0^\infty e^{-sx}dx = \int_0^\infty dx \int_\alpha^\beta e^{-sx}ds,$$

und folglich auch

$$\int_0^\infty dx \int_\alpha^\beta e^{-sx}ds = l\frac{\beta}{\alpha}.$$

Weil

$$\int e^{-sx}ds = -\frac{e^{-sx}}{x} + \text{Const.},$$

ist, so ist

$$\int_\alpha^\beta e^{-sx}ds = \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$3.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx = l\frac{\beta}{\alpha}.$$

Setzt man $\alpha = 1$ und $\beta = s$, so erhält man

$$4.\quad \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-sx})\frac{dx}{x} = ls.$$

Weil nun nach §. 12.

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds = \Gamma(a)$$

ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\frac{d\Gamma(a)}{da} = \Gamma'(a)$$

gesetzt wird,

$$\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds = \Gamma'(a),$$

also nach §. 5.

$$\int_0^\infty \frac{d\,.\,e^{-s}s^{a-1}}{da}ds = \Gamma'(a),$$

d. i., wie man nach bekannten Regeln der Differentialrechnung sogleich findet,

$$5.\quad \int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ls\;ds = \Gamma'(a),$$

und folglich, wenn man für ls den Ausdruck 4. setzt,

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-sx})\frac{dx}{x} = \Gamma'(a),$$

oder nach §. 2. 3.

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}(e^{-x} - e^{-sx})\frac{dx}{x} = \Gamma'(a),$$

und folglich nach §. 6.

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}(e^{-x} - e^{-sx})\frac{ds}{x} = \Gamma'(a),$$

oder nach §. 2. 3. und §. 2. 4.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty (e^{-x}e^{-s}s^{a-1} - e^{-(1+x)s}s^{a-1})ds = \Gamma'(a)$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{e^{-x}\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds - \int_0^\infty e^{-(1+x)s}s^{a-1}ds\right\} = \Gamma'(a).$$

Weil nun nach §. 12. und §. 15.

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{a-1}ds = \Gamma(a),$$

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)s}s^{a-1}ds = \frac{\Gamma(a)}{(1+x)^a}$$

ist, so wird die vorhergehende Gleichung offenbar

$$6.\quad \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right\} = \Gamma'(a)$$

oder

$$7.\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right\} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{dl\Gamma(a)}{da}.$$

Da die Integrale in Bezug auf x zwischen den Gränzen 0 und ∞ genommen werden, so kann man x, und folglich auch $1+x$, wie es die vorher in Anspruch genommene Anwendung von §. 15. erfordert, immer als positiv betrachten.

Setzt man nun

$$\frac{1}{1+x} = y,\ \text{also}\ x = \frac{1-y}{y} = \frac{1}{y} - 1,$$

so ist

$$dx = -\frac{dy}{y^2},\ \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y(1-y)},$$

und für $x=0$ und $x=\infty$ ist respective $y=1$ und $y=0$. Also ist nach 7.

$$-\int_1^0 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^a)\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(a)}{da},$$

oder nach §. 2. 1.

$$8.\quad \int_0^1 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^a)\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(a)}{da}.$$

Setzt man jetzt, indem n eine von a unabhängige positive ganze Zahl bezeichnet, für a nach und nach

$$a,\ a+\frac{1}{n},\ a+\frac{2}{n},\ a+\frac{3}{n},\ldots a+\frac{n-1}{n},$$

und addirt alle dadurch aus 8. sich ergebenden Gleichungen zu einander, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$S = \frac{dl\Gamma(a)}{da} + \frac{dl\Gamma(a+\frac{1}{n})}{da} + \ldots + \frac{dl\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{da}$$

gesetzt wird, nach §. 2. 4. die Gleichung

$$\int_0^1 \{ne^{1-\frac{1}{y}} - y^a(1+y^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{2}{n}}+\ldots+y^{\frac{n-1}{n}})\}\frac{dy}{y(1-y)} = S,$$

oder, weil

$$1+y^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{2}{n}}+\ldots+y^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-y}{1-y^{\frac{1}{n}}}$$

ist,

$$9.\quad \int_0^1 \left(\frac{ne^{1-\frac{1}{y}}}{1-y} - \frac{y^a}{1-y^{\frac{1}{n}}}\right)\frac{dy}{y} = S.$$

Setzt man y^n für y, so wird diese Gleichung, wie man leicht findet,

$$10.\quad n\int_0^1 \left(\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{y^{na}}{1-y}\right)\frac{dy}{y} = S.$$

Wird in der Gleichung 8. für a die Grösse na gesetzt, so wird diese Gleichung

$$\int_0^1 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^{na})\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(na)}{d.na}.$$

Nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung ist aber

$$\frac{dl\Gamma(na)}{da} = \frac{dl\Gamma(na)}{d.na}\cdot\frac{d.na}{da} = n\frac{dl\Gamma(na)}{d.na},$$

und folglich

$$\frac{dl\Gamma(na)}{d.na} = \frac{1}{n}.\frac{dl\Gamma(na)}{da},$$

also nach dem Obigen

$$n\int_0^1 (e^{1-\frac{1}{y}} - y^{na})\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dl\Gamma(na)}{da}$$

oder

$$11. \quad n\int_0^1 (\frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y} - \frac{y^{na}}{1-y})\frac{dy}{y} = \frac{dl\Gamma(na)}{da}.$$

Zieht man diese Gleichung von der Gleichung 10. ab, so erhält man

$$n\int_0^1 (\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y})\frac{dy}{y} = S - \frac{dl\Gamma(na)}{da}.$$

Weil nun nach dem Obigen offenbar

$$S = \frac{dl.\Gamma(a)\ \Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{da}$$

ist, so ist

$$S - \frac{dl\Gamma(na)}{da} = \frac{d}{da}\ l\left\{\frac{\Gamma(a)\ \Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\},$$

und folglich nach dem Obigen

$$n\int_0^1 (\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y})\frac{dy}{y} = \frac{d}{da}\ l\left\{\frac{\Gamma(a)\ \Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\}.$$

Setzen wir

$$n\int_0^1 (\frac{ne^{1-\frac{1}{y^n}}}{1-y^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{y}}}{1-y})\frac{dy}{y} = lp,$$

wo, was man wohl zu beachten hat, die Grösse p von a ganz unabhängig ist, so wird die vorhergehende Gleichung

$$lpda = dl\left\{\frac{\Gamma(a)\ \Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\},$$

und folglich, wenn man integrirt, und die willkührliche Constante durch lq bezeichnet,

$$alp + lq = l\left\{\frac{\Gamma(a)\ \Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\}$$

oder

$$l \,.\, qp^a = l\left\{\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}\right\},$$

also

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)} = qp^a$$

oder

$$12.\quad \Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n}) = qp^a\Gamma(na).$$

Um die von a unabhängigen Grössen p und q zu bestimmen, setze man, um zunächst den Werth von p zu finden in dieser Gleichung $a+\frac{1}{n}$ für a, so wird dieselbe

$$\Gamma(a+\frac{1}{n})\,\Gamma(a+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(a+1) = qp^{a+\frac{1}{n}}\,\Gamma(na+1).$$

Dividirt man nun diese Gleichung durch die vorhergehende, so erhält man

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = p^{\frac{1}{n}}\,\frac{\Gamma(na+1)}{\Gamma(na)},$$

also, weil nach §. 14.

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\quad \Gamma(na+1) = na\Gamma(na)$$

ist,

$$1 = np^{\frac{1}{n}},\quad p^{\frac{1}{n}} = n^{-1},\quad p = n^{-n}.$$

Um q zu bestimmen, setze man in der Gleichung 12. die Grösse $a=\frac{1}{n}$, so erhält man, weil $\Gamma(na)=\Gamma(1)=1$ und $p^a = n^{-1} = \frac{1}{n}$ ist,

$$\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{2}{n})\,\Gamma(\frac{3}{n})\ldots\Gamma(\frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n}\,q,$$

und folglich

$$q = n\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{2}{n})\,\Gamma(\frac{3}{n})\ldots\Gamma(\frac{n-1}{n}).$$

Nach §. 18. ist aber

$$\Gamma(\frac{1}{n})\,\Gamma(\frac{2}{n})\,\Gamma(\frac{3}{n})\ldots\Gamma(\frac{n-1}{n}) = \left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

und folglich

$$q = n\left\{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right\}^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}.$$

Führt man nun die gefundenen Werthe von p und q in die Gleichung 12. ein, so erhält man

$$\Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{n})\,\Gamma(a+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-na}\Gamma(na).$$

Mit dem Beweise dieser höchst merkwürdigen Gleichung haben sich verschiedene berühmte Mathematiker, namentlich Gauss (Comment. Gotting. rec. Vol. II.), Legendre (Exercices de calcul intégral. T. II. p. 23. Traité des fonctions elliptiques. T. II. p. 444.), Cauchy (Exercices de Mathématiques. 15me Livraison. p. 91), Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. VII.) beschäftigt. Der obige äusserst schöne und sinnreiche Beweis, der uns vor allen übrigen sehr wesentliche Vorzüge zu haben scheint, ist von Lejeune Dirichlet in Crelle's Journal. B. XV. S. 258. gegeben worden.

§. 20.

Unter der Voraussetzung, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ und $p, q, r, s, \ldots.$ positive Grössen sind, wollen wir im Folgenden der Kürze wegen

$$\varphi(x)=\beta\left\{1-(\frac{x}{\alpha})^p\right\}^{\frac{1}{q}},$$

$$\varphi_1(x, y)=\gamma\left\{1-(\frac{x}{\alpha})^p-(\frac{y}{\beta})^q\right\}^{\frac{1}{r}},$$

$$\varphi_2(x, y, z)=\delta\left\{1-(\frac{x}{\alpha})^p-(\frac{y}{\beta})^q-(\frac{z}{\gamma})^r\right\}^{\frac{1}{s}},$$

setzen. u. s. w.

Dies vorausgesetzt, kommt man nun bei Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik häufig auf Integrale von der Form

$$\int_0^\alpha x^{a-1}dx,$$

$$\int_0^\alpha dx\int_0^{\varphi(x)} x^{a-1}y^{b-1}dy,$$

$$\int_0^\alpha dx\int_0^{\varphi(x)}dy\int_0^{\varphi_1(x, y)} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}dz,$$

u. s. w.

wo die Grössen $a, b, c, d, \ldots.$ auch sämmtlich positiv sein sollen. Für diese Integrale, die man, wie sogleich erhellet, auch unter der Form

$$\int_0^\alpha x^{a-1}dx,$$

$$\int_0^\alpha x^{a-1}dx\int_0^{\varphi(x)} y^{b-1}dy,$$

$$\int_0^\alpha x^{a-1}dx\int_0^{\varphi(x)} y^{b-1}dy\int_0^{\varphi_1(x, y)} z^{c-1}dz,$$

u. s. w.

darstellen kann, hat Lejeune Dirichlet sehr merkwürdige Ausdrücke gefunden *), welche wir jetzt entwickeln wollen.

Zuvörderst wollen wir eine Transformation mit diesen Integralen vornehmen. Setzen wir nämlich für

$$(\frac{x}{\alpha})^p,\ (\frac{y}{\beta})^q,\ (\frac{z}{\gamma})^r,\ \ldots.$$

respective

$$x,\ y,\ z,\ \ldots.,$$

so müssen wir, wie sogleich erhellen wird, für

$$dx,\ dy,\ dz,\ \ldots.$$

respective

$$\frac{\alpha}{p}x^{\frac{1}{p}-1}dx,\ \frac{\beta}{q}y^{\frac{1}{q}-1}dy,\ \frac{\gamma}{r}z^{\frac{1}{r}-1}dz,\ \ldots..$$

setzen, und eben so leicht wird man sich überzeugen, dass statt der Gränzen

$$0 \text{ und } \alpha,\ 0 \text{ und } \varphi(x),\ 0 \text{ und } \varphi_1(x, y),\ \ldots..$$

respective die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1-x,\ 0 \text{ und } 1-x-y,\ \ldots.,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$1-x=y_1,\ 1-x-y=z_1,\ \ldots.$$

setzen, die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } y_1,\ 0 \text{ und } z_1,\ \ldots..$$

gesetzt werden müssen. Daher haben wir es jetzt mit der Entwickelung der folgenden Integrale zu thun:

$$\frac{\alpha^a}{p}\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx,$$

$$\frac{\alpha^a\beta^b}{pq}\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy,$$

$$\frac{\alpha^a\beta^b\gamma^c}{pqr}\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy\int_0^{z_1} z^{\frac{c}{r}-1}dz,$$

u. s. w.

oder mit der Entwickelung der Integrale

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx,$$

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy,$$

---

*) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. VIII. p. 156. Journal de Mathématiques pures et appliquées par J. Liouville. T. IV. p. 168.

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy\int_0^{x_1} z^{\frac{c}{r}-1}dz,$$

u. s. w.

Das erste dieser Integrale lässt sich leicht finden. Es ist nämlich nach einer sehr bekannten Hauptformel der Integralrechnung

$$\int x^{\frac{a}{p}-1}dx = \frac{p}{a}x^{\frac{a}{p}} + \text{Const.},$$

wobei man nicht unbeachtet zu lassen hat, dass nach der Voraussetzung $\frac{a}{p}$ positiv ist, und folglich

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx = \frac{p}{a}.$$

Nun ist aber nach §. 15.

$$\Gamma(1+\frac{a}{p}) = \frac{a}{p}\,\Gamma(\frac{a}{p}),$$

und folglich

$$\frac{p}{a} = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})}{\Gamma(1+\frac{a}{p})},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx = \frac{\Gamma(\frac{a}{p})}{\Gamma(1+\frac{a}{p})}.$$

Ferner ist

$$\int y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}y^{\frac{b}{q}} + \text{Const.},$$

und folglich, weil $y_1 = 1 - x$ ist,

$$\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}(1-x)^{\frac{b}{q}},$$

also

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}}dx,$$

oder, in der aus §. 12. bekannten Bezeichnung der Euler'schen Integrale der ersten Art,

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy = \frac{q}{b}\left(\frac{1+\frac{b}{q}}{\frac{a}{p}}\right).$$

Weil nun nach §. 16.

$$\left(\frac{1+\frac{b}{q}}{\frac{a}{p}}\right)=\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(1+\frac{b}{q})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q})}$$

und nach §. 15.

$$\Gamma(1+\frac{b}{q})=\frac{b}{q}\,\Gamma(\frac{b}{q})$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy=\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(\frac{b}{q})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q})}.$$

Um ferner das Integral

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy\int_0^{z_1} z^{\frac{c}{r}-1}dz$$

zu finden, wollen wir

$$y=y_1u,\ z=z_1v$$

setzen, so ist

$$dy=y_1du,\ dz=z_1dv,$$

und statt der Gränzen

$$0 \text{ und } y_1,\ 0 \text{ und } z_1$$

sind offenbar respective die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1$$

zu setzen. Also kann man das gesuchte Integral unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^1 y_1^{\frac{b}{q}}u^{\frac{b}{q}-1}du\int_0^1 z_1^{\frac{c}{r}}v^{\frac{c}{r}-1}dv,$$

oder, weil

$$y_1=1-x,\ z_1=1-x-y=(1-x)\,(1-u)$$

ist, offenbar unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}}dx\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}}du\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}dv,$$

oder auch, wie sogleich in die Augen fallen wird, unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}}dx\,.\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}}du\,.\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}dv$$

darstellen. Es ist nun nach §. 16.

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}}dx=\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})},$$

$$\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}}du=\frac{\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(1+\frac{c}{r})}{\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})},$$

$$\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}dv=\frac{\Gamma(\frac{c}{r})\,\Gamma(1)}{\Gamma(1+\frac{c}{r})},$$

woraus sich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen multiplicirt, und beachtet, dass $\Gamma(1)=1$ ist, für den Werth unsers gesuchten Integrals die Grösse

$$\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(\frac{c}{r})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})}$$

ergiebt.

Um zu zeigen, dass das so eben angewandte Verfahren eine allgemeine Anwendung gestattet, wollen wir noch das Integral

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^{y_1} y^{\frac{b}{q}-1}dy\int_0^{z_1} z^{\frac{c}{r}-1}dz\int_0^{t_1} t^{\frac{d}{s}-1}dt$$

bestimmen. Zu dem Ende setzen wir

$$y=y_1u,\ z=z_1v,\ t=t_1w,$$

also

$$dy=y_1du,\ dz=z_1dv,\ dt=t_1dw,$$

und demnach für die Gränzen

$$0 \text{ und } y_1,\ 0 \text{ und } z_1,\ 0 \text{ und } t_1$$

offenbar respective die Gränzen

$$0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1,\ 0 \text{ und } 1.$$

Dies vorausgesetzt, kann unser obiges Integral unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}dx\int_0^1 y_1^{\frac{b}{q}}u^{\frac{b}{q}-1}du\int_0^1 z_1^{\frac{c}{r}}v^{\frac{c}{r}-1}dv\int_0^1 t_1^{\frac{d}{s}}w^{\frac{d}{s}-1}dw,$$

oder, weil

$$y_1=1-x,$$
$$z_1=1-x-y=(1-x)(1-u),$$
$$t_1=1-x-y-z=(1-x)(1-u)(1-v)$$

ist, wenn man sich die beiden folgenden Reihen ohne Unterbrechung in eine Zeile geschrieben denkt, unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}dx\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}du$$

$$\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}(1-v)^{\frac{d}{s}}dv\int_0^1 w^{\frac{d}{s}-1}dw,$$

oder auch, wie sogleich erhellen wird, unter der Form

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}dx\,.\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}du\,.$$
$$.\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}(1-v)^{\frac{d}{s}}dv\,.\int_0^1 w^{\frac{d}{s}-1}dw$$

dargestellt werden. Es ist nun nach §. 16.

$$\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}dx=\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})},$$

$$\int_0^1 u^{\frac{b}{q}-1}(1-u)^{\frac{c}{r}+\frac{d}{s}}du=\frac{\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(1+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})},$$

$$\int_0^1 v^{\frac{c}{r}-1}(1-v)^{\frac{d}{s}}dv=\frac{\Gamma(\frac{c}{r})\,\Gamma(1+\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})},$$

$$\int_0^1 w^{\frac{d}{s}-1}dw=\frac{\Gamma(\frac{d}{s})\,\Gamma(1)}{\Gamma(1+\frac{d}{s})},$$

woraus man, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt, und beachtet, dass $\Gamma(1)=1$ ist, für das gesuchte Integral sogleich den Ausdruck

$$\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(\frac{c}{r})\,\Gamma(\frac{d}{s})}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\frac{d}{s})}$$

erhält.

Auch ist nun völlig klar, wie man auf die obige Art immer weiter gehen kann, und das Statt findende allgemeine Gesetz liegt mit völliger Deutlichkeit vor Augen.

Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich unmittelbar, dass, wenn wir das allgemeine Glied der Reihe

$$\int_0^\alpha x^{a-1}dx,$$
$$\int_0^\alpha dx\int_0^{\varphi(x)} x^{a-1}y^{b-1}dy,$$
$$\int_0^\alpha dx\int_0^{\varphi(x)}dy\int_0^{\varphi_1(x,y)} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}dz,$$

u. s. w.

wo $\varphi(x)$, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y, z)$, ... die aus dem Obigen bekannte Bedeutung haben, nämlich

$$\varphi(x)=\beta\{1-(\frac{x}{\alpha})^p\}^{\frac{1}{q}},$$

$$\varphi_1(x,\ y)=\gamma\{1-(\frac{x}{\alpha})^p-(\frac{y}{\beta})^q\}^{\frac{1}{r}},$$

$$\varphi_2(x,\ y,\ z)=\delta\{1-(\frac{x}{\alpha})^p-(\frac{y}{\beta})^q-(\frac{z}{\gamma})^r\}^{\frac{1}{s}},$$

u. s. w.

ist, durch V bezeichnen, jederzeit unter den oben gemachten Voraussetzungen, die wir hier nicht wiederholen wollen,

$$V=\frac{\alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots\ldots}{pqr\ldots}\cdot\frac{\Gamma(\frac{a}{p})\,\Gamma(\frac{b}{q})\,\Gamma(\frac{c}{r})\ldots\ldots}{\Gamma(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\ldots)}$$

ist.

In einer der Theorie der vielfachen Integrale vorzugsweise gewidmeten späteren Abhandlung werden wir auf diesen wichtigen und interessanten Gegenstand, welcher durch Liouville und Catalan schon mehrfach erweitert worden ist, zurückkommen. Für jetzt müssen wir uns mit der obigen Darstellung, die wir nur als eine vorläufige bezeichnen, begnügen.

XXVI.

Zwei neue Sätze vom ebenen und sphärischen Viereck und Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Von dem

Herrn Professor und Director Strehlke

zu Danzig.

Nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie ist (Taf. III. Fig. 8.)

$$AC^2=e^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D,$$

folglich

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos B - 2cd \cos D.$$

Addirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung $2ab$ und $2cd$, so erhält man

$$(a+b)^2 - (c-d)^2 = 4ab \cos \tfrac{1}{2}B^2 + 4cd \sin \tfrac{1}{2}D^2 \ldots\ldots (1)$$

und eben so

$$(c+d)^2 - (a-b)^2 = 4ab \sin \tfrac{1}{2}B^2 + 4cd \cos \tfrac{1}{2}D^2 \ldots\ldots (2)$$

Durch Multiplikation von (1) und (2), Zerlegung der Quadrate in Faktoren und Einführung der Bezeichnung $a+b+c+d=s$ wird erhalten

$$\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)\left(\frac{s}{2}-d\right)$$

$$= a^2b^2 \cos\tfrac{1}{2}B^2 . \sin\tfrac{1}{2}B^2 + abcd(\sin\tfrac{1}{2}B^2 . \sin\tfrac{1}{2}D^2 + \cos\tfrac{1}{2}B^2 . \cos\tfrac{1}{2}D^2)$$

$$+ c^2d^2 \sin\tfrac{1}{2}D^2 \cos\tfrac{1}{2}D^2.$$

Wenn man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $\tfrac{1}{2}abcd \sin B . \sin D$ hinzu addirt und subtrahirt, so erhält man

$$\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)\left(\frac{s}{2}-d\right)$$

$$= \left(\frac{ab}{2} . \sin B + \frac{cd}{2} . \sin D\right)^2 + abcd(\cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}D - \sin\tfrac{1}{2}B . \sin\tfrac{1}{2}D)^2$$

$$= \left(\frac{ab}{2} . \sin B + \frac{cd}{2} \sin D\right)^2 + abcd . \cos\left(\frac{B+D}{2}\right) . \cos\left(\frac{B+D}{2}\right).$$

Da nun $\frac{ab}{2} . \sin B + \frac{cd}{2} \sin D =$ der Flächensumme der beiden Dreiecke ABC und ACD ist oder die Fläche des Vierecks $ABCD$ ausdrückt, die mit F bezeichnet werden mag, so ist

$$F^2 = \left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)\left(\frac{s}{2}-d\right) - abcd . \cos\left(\frac{B+D}{2}\right)\cos\left(\frac{B+D}{2}\right).$$

2.

Verfolgt man denselben Gang bei dem sphärischen Vierecke, so ist

$$\cos e = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos B$$

$$= \cos c . \cos d + \sin c . \sin d . \cos D,$$

folglich

$$\cos a . \cos b - \cos c . \cos d = \sin c . \sin d \cos D - \sin a . \sin b . \cos B.$$

Wird auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen $\sin a \sin b$ und $\sin c . \sin d$ addirt, so erhält man

$$\cos(a-b) - \cos(c+d) = 2\sin c . \sin d . \cos\tfrac{1}{2}D^2 + 2\sin a . \sin b . \sin\tfrac{1}{2}B^2$$

und durch Zerfällung der Differenz der beiden Cosinus in Faktoren und Einführung von $a+b+c+d=s$

$$\sin\left(\frac{s}{2}-a\right).\sin\left(\frac{s}{2}-b\right)$$

$$=\sin c\,.\sin d\,.\cos\tfrac{1}{2}D^2+\sin a\,.\sin b\,\sin\tfrac{1}{2}B^2 \ldots\ldots (1)$$

und eben so

$$\sin\left(\frac{s}{2}-c\right).\sin\left(\frac{s}{2}-d\right)$$

$$=\sin a\,.\sin b\,\cos\tfrac{1}{2}B^2+\sin c\,.\sin d\,\sin\tfrac{1}{2}D^2 \ldots\ldots (2)$$

Durch Multiplikation von (1) und (2), durch Addition und Subtraktion von $\frac{1}{2}\sin a\,.\sin b\,.\sin c\,.\sin d\,.\sin B\,.\sin D$, bekömmt man

$$\sin\left(\frac{s}{2}-a\right).\sin\left(\frac{s}{2}-b\right).\sin\left(\frac{s}{2}-c\right).\sin\left(\frac{s}{2}-d\right)$$

$$=(\tfrac{1}{2}\sin a\,\sin b\,\sin B+\tfrac{1}{2}\sin c\,.\sin d\,.\sin D)^2$$

$$+\sin a\,\sin b\,\sin c\,.\sin d\,.\cos\tfrac{1}{2}(B+D)\,\cos\tfrac{1}{2}(B+D).$$

Ist nun M der Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche das sphärische Viereck $ABCD$ liegt, so ist der Cubikinhalt des Tetraeders $MABC=\frac{1}{6}\sin a\,.\sin b\,.\sin B$, der Cubikinhalt des Tetraeders $MACD=\frac{1}{6}\sin c\,.\sin d\,.\sin D$. Bezeichnet man jene Tetraeder mit T und T', so erhält man

$$(3T+3T')^2=\sin\left(\frac{s}{2}-a\right)\sin\left(\frac{s}{2}-b\right)\sin\left(\frac{s}{2}-c\right)\sin\left(\frac{s}{2}-d\right)$$

$$-\sin a\,\sin b\,\sin c\,.\sin d\,.\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2.$$

3.

Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes.

Da $b^2=BE^2+CE^2-2BE\,.\,CE\cos\lambda$, (wenn λ den Kreisbogen bezeichnet, der den Winkel BEC misst)

$$\text{und } a^2=BE^2+AE^2+2BE\,.\,AE\,.\cos\lambda,$$

$$\text{so ist } b^2-a^2=CE^2-AE^2-2BE\,.\,e\,.\cos\lambda,$$

wenn e die Diagonale CA bezeichnet,

$$\text{und } c^2-d^2=CE^2-AE^2+2DE\,.\,e\,.\cos\lambda.$$

Zieht man die obere Gleichung von der untern ab, so bleibt

$$c^2-d^2-b^2+a^2=2\,.\,e\,(BE+DE)\cos\lambda=2ef\,.\cos\lambda,$$

wenn BD durch f bezeichnet wird. Hieraus folgt

$$\cos\lambda=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2ef}.$$

Wird nun für ein ebenes Viereck die Bedingung gemacht, dass $ef=ac+bd$, so ist in diesem besondern Falle

$$\cos\lambda'=\frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}.$$

Aus diesem Ausdrucke für $\cos\lambda'$ lässt sich leicht ableiten

$$(1+\cos\lambda')(1-\cos\lambda')=\sin\lambda'^2=\frac{4.(\frac{s}{2}-a)(\frac{s}{2}-b)(\frac{s}{2}-c)(\frac{s}{2}-d)}{(ac+bd)^2}.$$

Da $\frac{1}{2}ac\sin\lambda'+\frac{1}{2}bd.\sin\lambda'=\frac{1}{2}ef.\sin\lambda'=F'$, wodurch die Fläche des Vierecks bezeichnet werden soll, in welchem $ef=ac+bd$, so erhält man

$$F'^2=(\frac{s}{2}-a)(\frac{s}{2}-b)(\frac{s}{2}-c)(\frac{s}{2}-d);$$

da aber auch

$$F'^2=(\frac{s}{2}-a)(\frac{s}{2}-b)(\frac{s}{2}-c)(\frac{s}{2}-d)-abcd.\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2,$$

so muss sein

$$\cos\tfrac{1}{2}(B+D)=0,\text{ folglich } B+D=(2k+1).\pi.$$

Da $A+B+C+D=2\pi$, $B+D$ also $<2\pi$, so kann k keinen andern Werth als Null haben, woraus folgt

$$B+D=\pi.$$

Dass ein Viereck von dieser Eigenschaft ein Kreisviereck sei, lässt sich dann leicht beweisen.

Anmerkung des Herausgebers.

Herr Professor Strehlke schreibt mir bei Uebersendung des vorstehenden interessanten Aufsatzes: „Es müsste nicht ohne Interesse sein, den „Satz für die Fläche des sphärischen Vierecks zu suchen, der dem ersten „für das ebene Viereck eigentlich entspricht.“ Gewiss würde diese Untersuchung mehrfaches Interesse darbieten, und möchte ich mir daher wohl erlauben, die Leser des Archivs zu derselben aufzufordern. Dass ich den gefundenen Resultaten, wenn sie mir mitgetheilt werden, sehr gern eine Stelle in dem Archive einräumen werde, versteht sich von selbst. G.

XXVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

1. Uebungsaufgaben für Schüler. Mitgetheilt von Herrn Professor Dr. Kunze in Weimar.

1. Wenn die Entfernungen der Eckpunkte A, B, C eines

Dreiecks ABC vom Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises folgeweise mit α, β, γ bezeichnet werden, so besteht die Gleichung

$$\frac{\alpha\alpha}{bc}+\frac{\beta\beta}{ac}+\frac{\gamma\gamma}{ab}=1,$$

worin a, b, c nach der üblichen Weise die Seiten des Dreiecks bedeuten. Im ersten Theile dieses Archivs, S. 331, ist eine andere Relation zwischen α, β, γ und a, b, c angegeben.

2. Aus den Winkeln eines in einen Kreis beschriebenen Fünfecks, nebst dem Halbmesser dieses Kreises, die Seiten des Fünfecks zu berechnen.

3. Durch die Spitze C eines gegebenen Dreiecks ABC ist zu dem gleichfalls gegebenen Punkt D in der Basis AB die Gerade CD gezogen: man soll durch den einen Endpunkt A der Basis eine gerade Linie AF, welche die CD in E und den Schenkel BC in F trifft, so ziehen, dass das Dreieck ACE dem Viereck $BDEF$ gleich werde. Es giebt dafür mehrere ganz leichte Constructionen; Kästner hat in seinen geometrischen Abhandlungen l. Samml. S. 145 die Aufgabe weitläuftiger mit Hülfe der Trigonometrie behandelt.

4. In ein gegebenes Quadrat ein regelmässiges Fünfeck dergestalt zu beschreiben, dass eine Seite des Fünfecks auf eine Seite des Quadrats falle, und die zwei zunächst liegenden Eckpunkte des ersteren in die aufstehenden Seiten des letzteren.

5. Ein zu seiner Zeit berühmter Ingenieur Samuel Marolois giebt in seiner Géometrie, die 1616 in gross Querfol. erschien, für die vorige Aufgabe folgende Construction an: Auf der Seite AB des Quadrats $ABCD$ verzeichne man auswärts ein regelmässiges Fünfeck $ABEFG$, und ziehe von der gegenüberliegenden Spitze F nach den Ecken C, D des Quadrats die Geraden FC, FD, welche die Seite AB in H, I schneiden; die Strecke HI soll nun die Seite des einzuschreibenden Fünfecks sein. Diese Construction ist aber falsch; es ist zu zeigen warum?

6. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus zu beschreiben, dessen Seiten mit den Diagonalen des Vierecks parallel laufen.

7. In einen Kreis sei ein beliebiges Vieleck $ABC\ldots LMN$ beschrieben, und auf der Peripherie des Kreises sei ein willkührlicher Punkt P angenommen. Fället man nun von P auf jede Seite des Vielecks oder deren Verlängerung eine Senkrechte, nämlich Pa auf AB, Pb auf BC u. s. f. Pm auf MN, Pn auf NA, so gilt allemal die Gleichung

$$\frac{Aa}{aB}\cdot\frac{Bb}{bC}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{Mm}{mN}\cdot\frac{Nn}{nA}=1.$$

Diese Gleichung besteht auch dann noch, wenn das eingeschriebene Vieleck ein Vieleck im weiteren Sinne ist, bei welchem man nämlich die Punkte A, B, $C\ldots L$, M, N in beliebiger Folge durch gerade Linien zu einem zusammenhängenden Zuge vereiniget hat.

8. In der Peripherie des über AB beschriebenen Halbkreises denjenigen Punkt C zu finden, für welchen das Rechteck aus der Abscisse AD und Ordinate CD ein Maximum wird. Die Construction folgt aus sehr einfachen geometrischen Betrachtungen.

9. Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten eines in

18. In keinem pythagorischen Dreieck (vergl. d. erst. Th. dies. Arch. S. 96) können beide Katheten ungerade Zahlen sein; und in jedem solchen Dreieck muss eine der Katheten durch 3, ingleichen eine von den Seiten überhaupt durch 5 theilbar sein.

19. Diejenigen Werthe von x zu finden, für welche sowohl $xx + x$ als $xx - x$ vollkommene Quadrate werden.

20. Vermittelst der pythagorischen Dreiecke solche Kreisvierecke zu bilden, bei welchen die vier Seiten, die drei möglichen Diagonalen und der Inhalt, nebst dem Halbmesser des Kreises, rationale Werthe bekommen; ohne dass eine Seite oder Diagonale Durchmesser des Kreises wird, oder zwei Diagonalen sich rechtwinkelig durchschneiden (in welchem Falle der Inhalt des Vierecks gleich dem halben Product der beiden Diagonalen sein würde).

21. Man soll zwei ganze Zahlen x, y finden, von der Beschaffenheit, dass das harmonische Mittel zwischen ihnen einer gegebenen ganzen Zahl a gleich sei. Z. B. für $a = 105$ giebt es vierzehn verschiedene Auflösungen.

22. Zwei Zahlen x, y zu finden, von der Beschaffenheit, dass ihre Summe gleich der Summe ihrer Kubikzahlen sei. (Diophantus IV. 11.)

$$\text{Allg. Auflös. } x = \frac{2n-1}{nn-n+1};\ y = \frac{nn-1}{nn-n+1}.$$

23. Zwei Zahlen x, y zu finden, von der Beschaffenheit, dass ihr Unterschied gleich dem Unterschied ihrer Kubikzahlen sei. (Diophantus IV. 12.)

$$\text{Allg. Auflös. } x = \frac{2n+1}{nn+n+1};\ y = \frac{nn-1}{nn+n+1}.$$

24. Man soll zeigen, dass und wie in dem nachstehenden Quotienten oder Bruche

$$\frac{m(m+1)\,(m+2)\,\ldots\ldots(m+n-2)\,(m+n-1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots(n-1)\;.\;n}$$

worin m und n ganze Zahlen bezeichnen, alle Factoren des Nenners gegen die Factoren des Zählers sich heben und das endliche Resultat eine ganze Zahl werde.

25. Zwischen den Tangenten der Winkel von fünf zu fünf Graden im ersten Octanten findet folgende artige Relation statt:

$$\tan 5^\circ . \tan 10^\circ = \tan 15^\circ . \tan 20^\circ . \tan 25^\circ . \tan 30^\circ . \tan 35^\circ . \tan 40^\circ . \tan 45^\circ.$$

Die Prüfung dieser Gleichung geschieht leicht vermittelst der Logarithmen; der Beweis ist aber aus der bekannten Formel $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha . \tan\beta}$ zu führen, mit Rücksicht auf $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Anmerkung. Die Sätze von 10. bis 16. sind bewiesen im ersten Bande meiner Geometrie (Jena, Frommann. 1842); auch über 20. findet man eben daselbst (S. 219) Auskunft.

II. Uebungsaufgaben für Schüler. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha.

Es ist sattsam bekannt, auf welche Weise man aus den einfachen goniometrischen Formeln:

$$\sin(a+b) = 2\sin b \cos a + \sin(a-b)$$

$$\cos(a+b) = 2\cos b \cos a - \cos(a-b)$$

die Summen der nachfolgenden Reihen

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \ldots + \sin(a+nb)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)b \,.\, \sin(a+\frac{1}{2}nb)}{\sin\frac{1}{2}b}$$

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots + \cos(a+nb)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)b \,.\, \cos(a+\frac{1}{2}nb)}{\sin\frac{1}{2}b}$$

erhalten kann. Sind diese Summen bekannt, so giebt die Anwendung der ersten trigonometrischen Sätze folgende Theoreme:

„Beschreibt man in einen Kreis ein reguläres Vieleck von n „Seiten, und zieht von einem beliebigen Punkte innerhalb oder „ausserhalb des Kreises Strahlen nach den Eckpunkten des Viel-„eckes, nennt einen der beiden kleinsten dieser Strahlen a_1, den „nächstfolgenden a_2 und so fort bis zu a_n, so ist, wenn r den „Halbmesser des Kreises, d die Entfernung des willkührlichen „Punktes vom Mittelpunkte bezeichnet,

1) für ein gerades n:

$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 + \ldots + a_n^2$$
$$= \tfrac{1}{2}n(r^2 + d^2)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Strahlen von ungeradem Zeiger ist gleich der Summe der Quadrate der Strahlen von geradem Zeiger.

2) für ein ungerades n:

$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{n+1}{2}(r^2 + d^2) - rd\frac{\cos(\frac{1}{n}\pi - \alpha)}{\cos\frac{1}{n}\pi},$$

$$a_2^2 + a_4^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = \frac{n-1}{2}(r^2 + d^2) + rd\frac{\cos(\frac{1}{n}\pi - \alpha)}{\cos\frac{1}{n}\pi},$$

wo α den Bogen bezeichnet, welcher von der Geraden d und dem Strahle a_1 auf der Peripherie abgeschnitten wird. Aus beiden Sätzen folgt unmittelbar:

3) dass für jeden beliebigen Werth von n

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = n(r^2 + d^2)$$

sein muss. Zieht man daher einen Halbmesser, welcher auf der Geraden d senkrecht steht, und verbindet dessen Endpunkt mit dem willkührlichen Mittelpunkte der Strahlen $a_1 a_2$ u. s. w. durch eine Gerade a_0, so ist das Quadrat von a_0 das arithmetische

Mittel aus der Quadratsumme aller Strahlen, welche von dem festen Punkte aus nach den Spitzen eines eingeschriebenen regulären Vieleckes von beliebiger Seitenzahl gezogen werden. Zugleich erhellt auch, dass der Mittelpunkt der Strahlen nicht einmal völlig fest zu sein braucht, sondern in jedem beliebigen Punkte der Peripherie eines Kreises liegen kann, der dem Hauptkreise concentrisch mit dem Halbmesser d beschrieben worden ist.

Bezeichnet man ferner den von den Strahlen a_1 und a_2 eingeschlossenen Winkel durch (1, 2) und nennt ihn den ersten Strahlwinkel, ferner den von a_2 und a_3 eingeschlossenen Winkel (2, 3) den zweiten Strahlwinkel u. s. w. so ist

4) für ein gerades n:

$$a_1a_2 \cos(1,2)+a_3a_4 \cos(3,4)+\ldots+a_{n-1}a_n \cos(n-1,n)=$$
$$=a_2a_3 \cos(2,3)+a_4a_5 \cos(4,5)+\ldots+a_na_1 \cos(n,1)$$
$$=\tfrac{1}{2}n(r^2 \cos\frac{2\pi}{n}+d^2)$$

5) für ein ungerades n:

$$a_1a_2 \cos(1,2)+a_3a_4 \cos(3,4)+\ldots+a_na_1 \cos(n,1)$$
$$=\frac{n+1}{2}(r^2 \cos\frac{2\pi}{n}+d^2)-rd\cos\alpha,$$
$$a_2a_3 \cos(2,3)+a_4a_5 \cos(4,5)+\ldots+a_{n-1}a_n \cos(n-1,n)$$
$$=\frac{n-1}{2}(r^2 \cos\frac{2\pi}{n}+d^2)+rd\cos\alpha;$$

6) für jedes beliebige n also:

$$a_1a_2 \cos(1,2)+a_2a_3 \cos(2,3)+\ldots+a_na_1 \cos(n,1)$$
$$=n(r^2 \cos\frac{2\pi}{n}+d^2),$$

wozu man auch leicht den analogen Ausdruck:

$$7)\quad a_1a_2 \sin(1,2)+a_2a_3 \sin(2,3)+\ldots+a_na_1 \sin(n,1)$$
$$=nr^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

bildet. Es zeigen demnach die Produkte aus den Cosinussen der gerade- und ungeradstelligen Strahlwinkel in die beiden einschliessenden Strahlen genau dieselben Relationen, welche die Quadrate der einzelnen Strahlen selbst besassen.

Liegt der Ausgangspunkt der Strahlen in der Peripherie des Kreises, so wird $d=r$ und die gefundenen Ausdrücke gehen in folgende über:

für ein gerades n wird:

$$a_1^2+a_3^2+\ldots+a_{n-1}^2=a_2^2+a_4^2+\ldots+a_n^2=nr^2;$$

für ein ungerades n wird:

$$a_1^2+a_3^2+a_5^2+\ldots+a_n^2=r^2\left\{n+1-\frac{\cos(\frac{1}{n}\pi-\alpha)}{\cos\frac{1}{n}\pi}\right\},$$

$$a_2^2 + a_4^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = r^2 \left\{ n - 1 + \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\pi - \alpha\right)}{\cos \frac{1}{n}\pi} \right\};$$

für jedes beliebige n wird:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = 2nr^2,$$

d. h. die Fläche des einem Kreise eingeschriebenen Quadrates ist das arithmetische Mittel zwischen den Quadraten aller Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte der Peripherie nach den Spitzen irgend eines beliebigen eingeschriebenen regulären Vielecks gezogen werden können. Ferner ist

für ein gerades n:

$$a_1 a_2 + a_3 a_4 + \ldots + a_{n-1} a_n = a_2 a_3 + a_4 a_5 + \ldots + a_{n-2} a_{n-1} + a_n a_1$$
$$= nr^2 \cos \frac{\pi}{n};$$

für ein ungerades n:

$$a_1 a_2 + a_3 a_4 + \ldots + a_{n-2} a_{n-1} - a_n a_1 = (n+1) r^2 \cos \frac{\pi}{n} - r^2 \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\pi}{n}},$$

$$a_2 a_3 + a_4 a_5 + \ldots + a_{n-1} a_n = (n-1) r^2 \cos \frac{\pi}{n} + r^2 \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\pi}{n}};$$

für jedes beliebige n:

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n - a_n a_1 = 2nr^2 \cos \frac{\pi}{n}.$$

Für den Fall, dass der Ausgangspunkt der Strahlen in der Peripherie des Kreises liegt, findet man auch mit grosser Leichtigkeit:

für ein gerades n:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{n-1} = 2r \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin \frac{\pi}{n}},$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_n = 2r \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{\pi}{n}};$$

für ein ungerades n:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n = a_2 + a_4 + \ldots + a_{n-1} = r \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin \frac{\pi}{2n}};$$

für jedes beliebige n:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 2r \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\pi}{2n}}.$$

Der mittelste dieser Ausdrücke ist als ein specieller Fall des August'schen Theorems bereits seit längerer Zeit bekannt. Lässt man den Ausgangspunkt der Strahlen noch in eine Spitze des Vieleckes rücken, d. h. macht man $\alpha=0$ oder $=\frac{2\pi}{n}$, so bekommt man die schon seit lange bekannten Sätze über die von einem Punkte auslaufenden Diagonalen regulärer Vielecke.

Dass sich übrigens aus dem oben erwähnten speciellen Falle des August'schen Theorems das letztere selbst unmittelbar ableiten lässt, wird klar, so bald man nur mit dem gegebenen Kreise concentrisch einen anderen Kreis beschreibt. In dem so eben erschienenen vortrefflichen Lehrbuche der Geometrie von Herrn Prof. Kunze in Weimar ist das hier vorgetragene Verfahren gerade umgekehrt worden, indem der Hr. Verf. zuerst einen sehr einfachen Beweis des August'schen Theoremes aufstellt und aus dem letzteren mit Hülfe eines concentrischen Kreises den speciellen Fall ableitet, wenn der Mittelpunkt der Strahlen in der Peripherie des Hauptkreises liegt.

XXVIII.

Miscellen.

Den sogenannten unbestimmten Fall in der ebenen Trigonometrie, wenn nämlich die Stücke a, b, A gegeben sind, trägt man gewöhnlich auf folgende Art vor.

Man suche zuerst den Winkel B mittelst der Formel

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$$

hierauf den Winkel C mittelst der Formel

$$C=180^\circ-(A+B),$$

und dann die Seite c mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke:

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{b\sin C}{\sin B}.$$

Im Allgemeinen hat B zwei Werthe, die einander zu 180° ergänzen, und durch B' und B'' bezeichnet werden sollen, so dass

$$B'+B''=180^\circ$$

ist. Auch wollen wir annehmen, dass

$$B'\overline{\overline{<}}\,90^\circ,\quad B''\overline{\overline{>}}\,90^\circ$$

Ist nun $a > b$, so ist auch $A > B$, und folglich B jedenfalls ein spitzer Winkel, so dass also nur $B = B'$ gesetzt werden kann, und daher die Aufgabe nur eine Auflösung zulässt. Ist aber $a < b$, so ist auch $A < B$, es kann sowohl $B = B'$, als auch $B = B''$ gesetzt werden, und die Aufgabe lässt also in diesem Falle im Allgemeinen zwei Auflösungen zu. Wenn $a = b$ ist, so ist auch $A = B$, und daher B unmittelbar gegeben.

Dass diese Art des Vortrags die beste und einfachste ist, unterliegt keinem Zweifel. Für den Elementarunterricht in der Trigonometrie, bei welchem es auf eine möglichst vielseitige Uebung der Schüler ankommt, verdient aber bemerkt zu werden, dass man ganz zu denselben Resultaten gelangen kann, wenn man unmittelbar aus den gegebenen Stücken a, b, A nicht den Winkel B, sondern vielmehr die Seite c sucht, wobei man sich auf folgende Art zu verhalten hat.

Bekanntlich ist in völliger Allgemeinheit

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

und folglich

$$c^2 - 2bc \cos A = a^2 - b^2,$$

also wenn man diese Gleichung des zweiten Grades in Bezug auf c als unbekannte Grösse auflöst,

$$(c - b \cos A)^2 = a^2 - b^2 + b^2 \cos A^2 = a^2 - b^2 \sin A^2,$$

woraus

$$c - b \cos A = \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2},$$

also

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}.$$

Hieraus sieht man, dass c im Allgemeinen zwei Werthe hat. Ist nun $a > b$, so ist offenbar

$$\sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos A^2} > b \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} > b \cos A,$$

und

$$b \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

ist daher jederzeit negativ, woraus sich, weil c seiner Natur nach positiv ist, ergiebt, dass man in diesem Falle nur

$$c = b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

setzen kann, und daher die Aufgabe nur eine Auflösung zulässt. Für $a < b$, wo zugleich A jedenfalls ein spitzer Winkel und daher $b \cos A$ jederzeit positiv ist, ist dagegen offenbar

$$\sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos A^2} < b \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} < b \cos A,$$

und daher

$$b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2},$$

man mag das obere oder das untere Zeichen nehmen, eine positive Grösse. Also ist in diesem Falle

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2},$$

und die Aufgabe lässt zwei Auflösungen zu. Dass in diesem Falle $\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$ immer reell ist, erhellet leicht, weil bekanntlich immer

$$a : b = \sin A : \sin B$$

oder $a \sin B = b \sin A$, also $b \sin A$ nie grösser als a ist. Für $a = b$ ist offenbar

$$c = b \cos A \pm b \cos A,$$

und daher entweder $c = 2b \cos A$ oder $c = 0$. Da aber, wenn von einem wirklichen Dreiecke die Rede ist, die Auflösung $c = 0$ ausgeschlossen werden muss, so bleibt in diesem Falle bloss die eine Auflösung $c = 2b \cos A$.

Hat man c, so kennt man alle drei Seiten des Dreiecks, und kann dann die Winkel B und C nach bekannten Formeln ohne alle Zweideutigkeit berechnen.

Man könnte bei der Behandlung des unbestimmten Falls der ebenen Trigonometrie auch von der unmittelbaren Berechnung des Winkels C aus den gegebenen Stücken a, b, A ausgehen, und würde auch auf diesem Wege ganz zu denselben Resultaten wie vorher gelangen. Es ist nämlich bekanntlich

$$b = a \cos C + c \cos A.$$

Nun ist aber auch

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

und folglich

$$b = a \cos C + a \cot A \sin C,$$

welche Gleichung bloss noch den unbekannten Winkel C enthält. Nach bekannten goniometrischen Formeln ist

$$\sin C = \frac{2 \tang \frac{1}{2}C}{1 + \tang \frac{1}{2}C^2}, \quad \cos C = \frac{1 - \tang \frac{1}{2}C^2}{1 + \tang \frac{1}{2}C^2}.$$

Führt man dies in die vorhergehende Gleichung ein, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$b(1 + \tang \tfrac{1}{2}C^2) = a(1 - \tang \tfrac{1}{2}C^2) + 2a \cot A \tang \tfrac{1}{2}C,$$

oder

$$(a + b) \tang \tfrac{1}{2}C^2 - 2a \cot A \tang \tfrac{1}{2}C = a - b,$$

oder

$$\tang \tfrac{1}{2}C^2 - \frac{2a \cot A}{a + b} \tang \tfrac{1}{2}C = \frac{a - b}{a + b}.$$

Löst man diese quadratische Gleichung in Beziehung auf $\tang \frac{1}{2}C$ als unbekannte Grösse auf, so erhält man

$$\left(\tang \tfrac{1}{2}C - \frac{a \cot A}{a + b}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2 + a^2 \cot A^2}{(a + b)^2}$$

oder

$$\left\{\tang \tfrac{1}{2}C - \frac{a \cos A}{(a + b) \sin A}\right\}^2 = \frac{a^2 - b^2 \sin A^2}{(a + b)^2 \sin A^2},$$

und folglich

$$\tang \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}}{(a + b) \sin A}.$$

Ist nun $a > b$, so ist offenbar

$$\sqrt{a^2 \cos A^2 + (a^2 - b^2) \sin A^2} > a \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} > a \cos A,$$

und folglich

$$a \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

eine negative Grösse. Daher kann man, weil tang $\frac{1}{2}C$ jederzeit positiv ist, da $\frac{1}{2}C$ nie grösser als 90° ist, bloss

$$\tang \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}}{(a+b) \sin A}$$

setzen, und es giebt in diesem Falle nur eine Auflösung. Wenn aber $a < b$ ist, wo $a \cos A$ immer positiv ist, so ist offenbar

$$\sqrt{a^2 \cos A^2 + (a^2 - b^2) \sin A^2} < a \cos A,$$

d. i.

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} < a \cos A,$$

und die Grösse

$$a \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

ist daher, man mag das obere oder das untere Zeichen nehmen, stets positiv. Also kann man

$$\tang \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}}{(a+b) \sin A}$$

setzen, und es giebt in diesem Falle jederzeit zwei Auflösungen, die auch beide reell sind, weil bekanntlich $b \sin A = a \sin B$, folglich $b \sin A$ nie grösser als a ist. Für $a = b$ ist nach dem Obigen

$$\tang \tfrac{1}{2}C = \frac{a \cos A \pm a \cos A}{(a+b) \sin A},$$

und also entweder

$$\tang \tfrac{1}{2}C = \frac{2a \cos A}{(a+b) \sin A} = \frac{2a \cot A}{a+b}$$

oder tang $\frac{1}{2}C = 0$. Im zweiten Falle wäre $\frac{1}{2}C = 0$, also auch $C = 0$, welches, so lange von einem wirklichen Dreiecke die Rede ist, nicht Statt finden kann. Daher hat man für $a = b$ bloss die eine Auflösung

$$\tang \tfrac{1}{2}C = \frac{2a \cot A}{a+b}.$$

Alle diese Resultate stimmen mit den schon oben gefundenen vollkommen überein.

Wenn allerdings auch der erste und gewöhnliche Vortrag des unbestimmten Falls der ebenen Trigonometrie bei Weitem der einfachste ist, so halten wir doch bei'm Unterrichte Betrachtungen wie die obigen für sehr instructiv für die Schüler, und glauben, dass dieselben dem Gedeihen des mathematischen Unterrichts überhaupt förderlich sind, welches der einzige Grund ist, der uns zu der Mittheilung derselben an diesem Orte bewogen hat. G.

Auch schon für den Elementarunterricht in der Algebra verdient der folgende Vortrag der Lehre von der Elimination der unbekannten Grössen aus Gleichungen des ersten Grades empfohlen zu werden.

Es seien die zwei Gleichungen

$$Ax + By = C$$
$$ax + by = c$$

gegeben. Um aus diesen beiden Gleichungen x zu bestimmen, kommt es darauf an, dieselben mit zwei Factoren M und N zu multipliciren, welche so beschaffen sind, dass, wenn man nach geschehener Multiplication die beiden Gleichungen zu einander addirt, der Coefficient von y verschwindet. Diese Bedingung erfordert, dass

$$BM + bN = 0$$

sei, und man wird also

$$M = b,\ N = -B$$

setzen können. Thut man dies und verfährt nach der vorher gegebenen Andeutung, so erhält man

$$x = \frac{Cb - cB}{Ab - aB},$$

und hieraus durch gehörige Vertauschung der Buchstaben

$$y = \frac{Ac - Ca}{Ab - aB}.$$

Hat man ferner die drei Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D$$
$$ax + by + cz = d$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

so kommt es, um x zu bestimmen, darauf an, diese Gleichungen mit drei Factoren M, N, P zu multipliciren, welche so beschaffen sind, dass, wenn man nach geschehener Multiplication die drei Gleichungen zu einander addirt, die Coefficienten von y und z verschwinden. Diese Bedingung erfordert, dass

$$BM + bN + \beta P = 0$$
$$CM + cN + \gamma P = 0$$

sei. Bringt man diese Gleichungen auf die Form

$$\frac{N}{Q}=\frac{\mathfrak{B}(C\delta-D\gamma)+\mathfrak{C}(D\beta-B\delta)+\mathfrak{D}(B\gamma-C\beta)}{B(c\delta-d\gamma)+C(d\beta-b\delta)+D(b\gamma-c\beta)},$$

$$\frac{P}{Q}=\frac{\mathfrak{B}(cD-dC)+\mathfrak{C}(dB-bD)+\mathfrak{D}(bC-cB)}{B(c\delta-d\gamma)+C(d\beta-b\delta)+D(b\gamma-c\beta)};$$

und kann also

$$M=\mathfrak{B}(d\gamma-c\delta)+\mathfrak{C}(b\delta-d\beta)+\mathfrak{D}(c\beta-b\gamma),$$
$$N=\mathfrak{B}(C\delta-D\gamma)+\mathfrak{C}(D\beta-B\delta)+\mathfrak{D}(B\gamma-C\beta),$$
$$P=\mathfrak{B}(cD-dC)+\mathfrak{C}(dB-bD)+\mathfrak{D}(bC-cB),$$
$$Q=B(c\delta-d\gamma)+C(d\beta-b\delta)+D(b\gamma-c\beta)$$

setzen. Dann ist aber, wie sogleich erhellet,

$$x=\frac{EM+eN+\varepsilon P+\mathfrak{E}Q}{AM+aN+\alpha P+\mathfrak{A}Q}.$$

Durch gehörige Vertauschung der Buchstaben erhält man hieraus y, z, u, und es erhellt nun auch mit völliger Deutlichkeit, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann.

Ueber die Berechnung der Länge und Breite eines Gestirnes aus seiner geraden Aufsteigung und Abweichung, und umgekehrt. Von dem Herrn Professor C. A. Bretschneider zu Gotha.

Die in der Ueberschrift erwähnte Aufgabe findet sich in allen Lehrbüchern der Astronomie behandelt, so dass man sie für völlig erschöpft halten sollte. Gleichwohl scheint die nachfolgende Bemerkung den Verfassern jener Schriften sämmtlich entgangen zu sein; wenigstens habe ich sie in den mir zugänglichen astronomischen Werken nicht gefunden.

Sind nämlich die gerade Aufsteigung α und die Abweichung δ eines Gestirnes gegeben, so findet man überall angegeben, wie man aus ihnen die Länge λ und Breite β des Sternes mittelst eines Hülfswinkels berechnen kann, und eben so wird angegeben, wie man aus λ und β ebenfalls durch einen Hülfswinkel α und δ zu berechnen habe. Niemand aber scheint bemerkt zu haben, dass sich beide Aufgaben mittelst eines und desselben Hülfswinkels lösen lassen. Nennt man nämlich die Schiefe der Ecliptik ε und den Hülfswinkel φ, so ist

$$\frac{\sin\beta}{\sin\delta}=\frac{\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\tang\lambda}{\tang\alpha}=\frac{\sin(\varphi+\varepsilon)}{\sin\varphi}.$$

ler Winkel φ wird durch eine der beiden Gleichungen:

$$\tang \varphi = \cot \delta \sin \alpha$$

$$\tang (\varphi + \varepsilon) = \cot \beta \sin \lambda$$

timmt. Es ist φ positiv oder negativ, je nachdem α kleiner oder isser als 180° ist, und eben so ist $(\varphi + \varepsilon)$ positiv oder negativ, nachdem λ kleiner oder grösser als 180° ist; sonst liegen immer und δ, ferner $\varphi + \varepsilon$ und β und endlich λ und α in demselben uadranten.

Bei der Reduktion von α und δ von einer bestimmten Epoche auf eine nicht sehr fern liegende, z. B. bei der Reduktion vom Anfang eines Jahres auf irgend einen anderen Tag desselben kommen beide Aufgaben unmittelbar nach einander zur Lösung. Da sich hier φ meistens nur um einige Secunden ändert, so wird die Rechnung sehr leicht auszuführen sein, wenn man sich die Aenderungen, welche $\log \cos (\varphi + \varepsilon) - \log \cos \varphi$ und $\log \sin (\varphi + \varepsilon) - \log \sin \varphi$ für 1″ Aenderung des Werthes von φ und ε erleiden, am Rande bemerkt. Hat man dann aus α und δ zuerst λ und β berechnet, und bezeichnet nun die durch Präcession, Nutation etc. verbesserten Werthe derselben mit λ', β', so wird man die Complemente von

$$\log \frac{\cos (\varphi + \varepsilon)}{\cos \varphi} \text{ und } \log \frac{\sin (\varphi + \varepsilon)}{\sin \varphi} .$$

mittelst der angemerkten Aenderung nur durch eine kleine Correktion zu verbessern brauchen, um mittelst ihrer die neuen Werthe von α und δ zu erhalten.

XXIX.

Ueber die Behandlungsarten geometrischer Elementar-Aufgaben.

Von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

(Die Citate beziehen sich auf Euclid's Elemente. Ein C davor, bedeutet: Converse des citirten Satzes.)

In verschiedenen Zeitschriften werden über den mathematischen Unterricht häufig Bedenken erhoben. Einige eifern über die darauf verwendete Zeit, Andere tadeln die bei demselben angewendete Methode. Die meisten vermissen das Uebersichtliche in derselben und möchten nur das Allgemeine, damit durch gesteigerte geistige Energie das Besondere sich gleichsam von selbst ergebe. Vielen ist dagegen die Unterrichtsweise noch nicht elementar genug.

Solche Bedenken kommen zwar von sehr verschiedenen Seiten, entspringen unter sehr verschiedenen Graden mathematischer Bildung, haben zum Theil ihren Ursprung in dem Geiste der Neuerungssüchtigen, sind wohl aber weniger von gereifter Erfahrung eingegeben; dennoch möchte man sie als ein erfreuliches Zeichen des Interesse an der Sache betrachten, welches freilich, meist durch Missverständnisse verleitet, sein eigentliches Ziel verfehlt.

Ich sollte nun meinen, wer sich streng an Euklid's unverbesserliche Methode und an dasjenige hält was eine lautere Quelle in ihm hat, könne nicht wohl einen Fehlgriff thun. Diese Methode wird aber, wie mir scheint, seit längerer Zeit nicht eifrig genug verfolgt. Selbst in manchen Werken, deren Verfasser derselben im Allgemeinen huldigen, wird der Gegenstand einer geometrischen Betrachtung oft so verunstaltet, dass man sein Wesen nur mühsam herausfindet. Namentlich erscheint die geometrische Analyse bisweilen in solch einer seltsamen Gestalt, dass man glauben möchte, der Darstellende habe gar keinen Begriff davon. Denkt man sich nun, dass Bücher mit solchen Entwicklungen in die Hände von Schülern kommen, deren Vorstellungen berichtigt, deren Auffassun-

gen zur Reife gebracht werden sollen, so wäre es zu verwundern wenn sie Lust am Gegenstande behielten, sofern diese bereits rege geworden ist.

So haben wir eine deutsche Bearbeitung von Leslie's geometrischer Analysis, die 1822 in Berlin erschien. Das Original ist mir nicht zur Hand, ich kann deshalb auch über dessen Werth nicht urtheilen; sicherlich hat aber der Uebersetzer zur Verbesserung des Buches in seinen Haupttheilen nicht beigetragen: denn die Analysen, die darin vorkommen, sind gar nicht als solche zu erkennen. Manche Aufgabe, die sich dort findet, würde aber für den Schüler sehr bildend sein, wenn jener wesentliche Theil nicht so gänzlich vernachlässigt wäre.

Um diese Behauptung zu belegen wähle ich eine Aufgabe die sich dort (Seite 21. Satz XIII.) findet, und löse dieselbe nach Euklid's strenger Weise.

Aufgabe. Auf einer der Grösse nach gegebenen Geraden einen Punkt so zu bestimmen, dass das Quadrat über seiner Entfernung von dem einen Ende so gross werde als das Rechteck zwischen der Entfernung vom andern Ende und einer zweiten, der Grösse nach gegebenen Geraden.

Sei (Taf. III. Fig. 9. bei'm zweiten Hefte) AB die erste Gerade, AC die zweite; man sucht einen Punkt D, so dass $AD^2 = DB.AC$ werde.

I. Fall. Der gesuchte Punkt sei zwischen A und B.

Analyse. Sei AB auch der Lage nach gegeben. Verlängere dieselbe nach C ... (Post. II.) ... Mache AC der zweiten Geraden gleich ... (I. 3.) .. Der Punkt D erfülle die geforderte Bedingung, so dass ...... $AD^2 = DB \,.\, AC$ ..... werde.

Dann ist (C. II. 3.) $DA \,.\, AC + AD^2 = CD \,.\, DA$, folglich

(Ax. II.) ..... $CD \,.\, DA = AD \,.\, AC + DB \,.\, AC$.

Halbire AC in E .. (I. 10) ... so ist

.. (II. 6) ..... $CD \,.\, DA + AE^2 = ED^2$, also

(Ax. I. II.) .... $ED^2 = AE^2 + (AD + DB)AC$ ... (C. II. 1).

Mache AF senkrecht auf BC .. (I. 11) .. und $CA : AF = FA : AB$ .. (VI. 13.), so ist $AF^2 = AB \,.\, AC$ ... (VI. 17) ... mithin

(Ax. I.) ... $ED^2 = AE^2 + AF^2$. Ziehe FE ... (Post. I.) so ist ... $FE^2 = AE^2 + AF^2$ ... (I. 47.)

folglich $ED^2 = FE^2$ ... (Ax. 1.) also $DE = EF$ ... (I. 46. Zus.).

Construction. Suche die mittlere Proportionale zu CA und AB (VI. 13); halbire AC (I. 10) und beschreibe aus E als Centrum mit der Entfernung EF einen Halbkreis, so ist der Durchschnitt desselben mit AB der gesuchte Punkt D.

Determination. Ein Durchschnitt fällt zwischen A und B.

Sei $BC = 2MC$ und $AB = 2AN$; da $AC = 2AE$ und

$BC = BA + AC$, so ist $2MC = 2AN + 2AE$

folglich $MC = AN + AE$ (Ax. VII.)

oder $MC = AN + EC$

mithin $CM > CE$

XXX.
Ueber die Theorie der Elimination.

Von
dem Herausgeber.

Zweite Abhandlung*).

§. 1.

In den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1748 hat Euler eine Eliminationsmethode gelehrt, welche sich vor allen übrigen bekannten Eliminationsmethoden durch Kürze und Einfachheit ganz besonders ausgezeichnet. Diese Eliminationsmethode, bei welcher von der Theorie der symmetrischen Functionen ein sehr wichtiger und fruchtbarer Gebrauch gemacht wird, wollen wir vorzüglich nach der schönen und gründlichen Darstellung, welche neuerlichst Cauchy in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. I. p. 397 von derselben gegeben hat, in der vorliegenden Abhandlung entwickeln.

§. 2.

Die beiden gegebenen Gleichungen seien

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$f(x) = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q$$

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q$$

setzen,

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0;$$

denn dass auf diese Form, wo nämlich die Coefficienten der höchsten Glieder die Einheit sind, die beiden gegebenen Gleichungen jederzeit gebracht werden können, fällt auf der Stelle in die Augen.

Die m Wurzeln der ersten Gleichung $f(x) = 0$ seien

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots,$$

und eben so seien die n Wurzeln der zweiten Gleichung $F(x) = 0$

---

*) Die erste Abhandlung s. m. Theil II. Heft I. S. 76.

XXX.

Ueber die Theorie der Elimination.

Von

dem Herausgeber.

Zweite Abhandlung *).

§. 1.

In den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1748 hat Euler eine Eliminationsmethode gelehrt, welche sich vor allen übrigen bekannten Eliminationsmethoden durch Kürze und Einfachheit ganz besonders ausgezeichnet. Diese Eliminationsmethode, bei welcher von der Theorie der symmetrischen Functionen ein sehr wichtiger und fruchtbarer Gebrauch gemacht wird, wollen wir vorzüglich nach der schönen und gründlichen Darstellung, welche neuerlichst Cauchy in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. I. p. 397 von derselben gegeben hat, in der vorliegenden Abhandlung entwickeln.

§. 2.

Die beiden gegebenen Gleichungen seien

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$f(x) = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q$$

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q$$

setzen,

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0;$$

denn dass auf diese Form, wo nämlich die Coefficienten der höchsten Glieder die Einheit sind, die beiden gegebenen Gleichungen jederzeit gebracht werden können, fällt auf der Stelle in die Augen.

Die m Wurzeln der ersten Gleichung $f(x) = 0$ seien

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots,$$

und eben so seien die n Wurzeln der zweiten Gleichung $F(x) = 0$

---

*) Die erste Abhandlung s. m. Theil II. Heft I. S. 76.

$$\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

so dass nämlich

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots,$$
$$F(x) = (x-\varkappa)(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)\ldots$$

ist.

Sollen nun die beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

zusammen existiren können, d. h. sollen sich dieselben durch ein und denselben Werth von x erfüllen lassen; so muss nothwendig wenigstens eine der Gleichungen

$$\alpha=\varkappa,\ \alpha=\lambda,\ \alpha=\mu,\ \alpha=\nu,\ldots,$$
$$\beta=\varkappa,\ \beta=\lambda,\ \beta=\mu,\ \beta=\nu,\ldots,$$
$$\gamma=\varkappa,\ \gamma=\lambda,\ \gamma=\mu,\ \gamma=\nu,\ldots,$$
$$\delta=\varkappa,\ \delta=\lambda,\ \delta=\mu,\ \delta=\nu,\ldots,$$

u. s. w.

oder, was dasselbe ist, wenigstens eine der Gleichungen

$$\alpha-\varkappa=0,\ \alpha-\lambda=0,\ \alpha-\mu=0,\ \alpha-\nu=0,\ldots;$$
$$\beta-\varkappa=0,\ \beta-\lambda=0,\ \beta-\mu=0,\ \beta-\nu=0,\ldots;$$
$$\gamma-\varkappa=0,\ \gamma-\lambda=0,\ \gamma-\mu=0,\ \gamma-\nu=0,\ldots;$$
$$\delta-\varkappa=0,\ \delta-\lambda=0,\ \delta-\mu=0,\ \delta-\nu=0,\ldots;$$

u. s. w.

erfüllt sein, und die Bedingungsgleichung, dass die beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

zusammen existiren können, ist daher, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\Sigma = \ &(\alpha-\varkappa)(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots\\ &\times(\beta-\varkappa)(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots\\ &\times(\gamma-\varkappa)(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots\\ &\times(\delta-\varkappa)(\delta-\lambda)(\delta-\mu)(\delta-\nu)\ldots\\ &\times\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

setzen, offenbar die Gleichung

$$\Sigma=0.$$

Die Gleichung, welche man durch Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

erhält, ist aber augenscheinlich weiter nichts als die Bedingungsgleichung, dass die beiden vorstehenden Gleichungen zusammen existiren oder durch denselben Werth von x erfüllt werden können, woraus sich also unmittelbar ergiebt, dass die Gleichung

$$\Sigma=0$$

XXX.

Ueber die Theorie der Elimination.

Von

dem Herausgeber.

Zweite Abhandlung *).

§. 1.

In den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1748 hat Euler eine Eliminationsmethode gelehrt, welche sich vor allen übrigen bekannten Eliminationsmethoden durch Kürze und Einfachheit ganz besonders ausgezeichnet. Diese Eliminationsmethode, bei welcher von der Theorie der symmetrischen Functionen ein sehr wichtiger und fruchtbarer Gebrauch gemacht wird, wollen wir vorzüglich nach der schönen und gründlichen Darstellung, welche neuerlichst Cauchy in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. I. p. 397 von derselben gegeben hat, in der vorliegenden Abhandlung entwickeln.

§. 2.

Die beiden gegebenen Gleichungen seien

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$
$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$f(x) = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q$$
$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q$$

setzen,

$$f(x) = 0,\ F(x) = 0;$$

denn dass auf diese Form, wo nämlich die Coefficienten der höchsten Glieder die Einheit sind, die beiden gegebenen Gleichungen jederzeit gebracht werden können, fällt auf der Stelle in die Augen.

Die m Wurzeln der ersten Gleichung $f(x) = 0$ seien

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots.,$$

und eben so seien die n Wurzeln der zweiten Gleichung $F(x) = 0$

---

*) Die erste Abhandlung s. m. Theil II. Heft I. S. 76.

so ist, wie man leicht mittelst Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten findet,

$$\Sigma_i = (\alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \ldots) . n$$
$$- \frac{i}{1} (\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} + \gamma^{i-1} + \ldots) (x + \lambda + \mu + \ldots)$$
$$+ \frac{i(i-1)}{1 . 2} (\alpha^{i-2} + \beta^{i-2} + \gamma^{i-2} + \ldots) (x^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \ldots)$$

u. s. w.

$$+ (-1)^{i-1} . \frac{i}{1} (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) (x^{i-1} + \lambda^{i-1} + \mu^{i-1} + \ldots)$$
$$+ (-1)^i . m(k^i + \lambda^i + \mu^i + \ldots),$$

und folglich, weil

$$s_0 = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 + \delta^0 + \ldots = m,$$
$$S_0 = x^0 + \lambda^0 + \mu^0 + \nu^0 + \ldots = n$$

ist,

$$\Sigma_i = s_i S_0 - \frac{i}{1} s_{i-1} S_1 + \frac{i(i-1)}{1 . 2} s_{i-2} S_2 - \ldots .$$
$$\ldots . + (-1)^{i-1} . \frac{i}{1} s_1 S_{i-1} + (-1)^i . s_0 S_i .$$

Die Grössen

$$s_0 = m \text{ und } S_0 = n$$

sind bekannt.

Zur Bildung der Grössen

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5, \ldots .$$

aus den Coefficienten der Gleichung

$$f(x) = 0$$

hat man nach den Formeln des aus der Theorie der Gleichungen bekannten Newton'schen Satzes die folgenden Gleichungen:

$$0 = s_1 + a,$$
$$0 = s_2 + as_1 + 2b,$$
$$0 = s_3 + as_2 + bs_1 + 3c,$$
$$0 = s_4 + as_3 + bs_2 + cs_1 + 4d,$$

u. s. w.

$$0 = s_m + as_{m-1} + bs_{m-2} + cs_{m-3} + \ldots + ps_1 + mq,$$
$$0 = s_{m+1} + as_m + bs_{m-1} + cs_{m-2} + \ldots + ps_2 + qs_1,$$
$$0 = s_{m+2} + as_{m+1} + bs_m + cs_{m-1} + \ldots + ps_3 + qs_2,$$
$$0 = s_{m+3} + as_{m+2} + bs_{m+1} + cs_m + \ldots + ps_4 + qs_3,$$

u. s. w.

oder

$$s_1 = -a,$$
$$s_2 = -as_1 - 2b,$$
$$s_3 = -as_2 - bs_1 - 3c,$$
$$s_4 = -as_3 - bs_2 - cs_1 - 4d,$$

u. s. w.

$$s_m = -as_{m-1} - bs_{m-2} - cs_{m-3} - \ldots - ps_1 - mq,$$
$$s_{m+1} = -as_m - bs_{m-1} - cs_{m-2} - \ldots - ps_2 - qs_1,$$
$$s_{m+2} = -as_{m+1} - bs_m - cs_{m-1} - \ldots - ps_3 - qs_2,$$
$$s_{m+3} = -as_{m+2} - bs_{m+1} - cs_m - \ldots - ps_4 - qs_3,$$

u. s. w.

und eben so hat man zur Bildung der Grössen

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ \ldots\ldots$$

aus den Coefficienten der Gleichung

$$F(x) = 0$$

die folgenden Gleichungen:

$$0 = S_1 + A,$$
$$0 = S_2 + AS_1 + 2B,$$
$$0 = S_3 + AS_2 + BS_1 + 3C,$$
$$0 = S_4 + AS_3 + BS_2 + CS_1 + 4D,$$

u. s. w.

$$0 = S_n + AS_{n-1} + BS_{n-2} + CS_{n-3} + \ldots + PS_1 + nQ,$$
$$0 = S_{n+1} + AS_n + BS_{n-1} + CS_{n-2} + \ldots + PS_2 + QS_1,$$
$$0 = S_{n+2} + AS_{n+1} + BS_n + CS_{n-1} + \ldots + PS_3 + QS_2,$$
$$0 = S_{n+3} + AS_{n+2} + BS_{n+1} + CS_n + \ldots + PS_4 + QS_3,$$

u. s. w.

oder

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = -AS_1 - 2B,$$
$$S_3 = -AS_2 - BS_1 - 3C,$$
$$S_4 = -AS_3 - BS_2 - CS_1 - 4D,$$

u. s. w.

$$S_n = -AS_{n-1} - BS_{n-2} - CS_{n-3} - \ldots - PS_1 - nQ,$$
$$S_{n+1} = -AS_n - BS_{n-1} - CS_{n-2} - \ldots - PS_2 - QS_1,$$
$$S_{n+2} = -AS_{n+1} - BS_n - CS_{n-1} - \ldots - PS_3 - QS_2,$$
$$S_{n+3} = -AS_{n+2} - BS_{n+1} - CS_n - \ldots - PS_4 - QS_3,$$

u. s. w.

woraus zugleich erhellet, dass

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ \ldots\ldots$$

lauter ganze rationale algebraische Functionen von

$$a, b, c, d, \ldots p, q;$$

und eben so

$$S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots .$$

lauter ganze rationale algebraische Functionen von

$$A, B, C, D, \ldots P, Q$$

sind.

Hat man auf diese Weise

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots s_i$$

und

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots S_i$$

respective aus den Coefficienten der Gleichungen

$$f(x)=0 \text{ und } F(x)=0$$

gebildet, so kann man mittelst des oben für Σ_i gefundenen Ausdrucks auch diese Grösse aus den Coefficienten der beiden in Rede stehenden gegebenen Gleichungen bilden, woraus zugleich mit völliger Deutlichkeit erhellet, dass auch Σ_i jederzeit eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten der beiden Gleichungen

$$f(x)=0, F(x)=0$$

ist.

Bezeichnen wir jetzt die Gleichung des (mn)ten Grades, deren Wurzeln

$$\alpha-x,\ \alpha-\lambda,\ \alpha-\mu,\ \alpha-\nu, \ldots ;$$
$$\beta-x,\ \beta-\lambda,\ \beta-\mu,\ \beta-\nu, \ldots ;$$
$$\gamma-x,\ \gamma-\lambda,\ \gamma-\mu,\ \gamma-\nu, \ldots ;$$
$$\delta-x,\ \delta-\lambda,\ \delta-\mu,\ \delta-\nu, \ldots ;$$

u. s. w.

sind, im Allgemeinen durch

$$x^{mn}+\mathfrak{A}x^{mn-1}+\mathfrak{B}x^{mn-2}+\ldots+\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q}=0,$$

wo die Coefficienten

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$$

unbekannte Grössen sind; so hat man nach dem Newton'sch Satze bekanntlich die folgenden Gleichungen:

$$0=\Sigma_1+\mathfrak{A},$$
$$0=\Sigma_2+\mathfrak{A}\Sigma_1+2\mathfrak{B},$$
$$0=\Sigma_3+\mathfrak{A}\Sigma_2+\mathfrak{B}\Sigma_1+3\mathfrak{C},$$

u. s. w.

$$0=\Sigma_{mn}+\mathfrak{A}\Sigma_{mn-1}+\mathfrak{B}\Sigma_{mn-2}+\ldots+\mathfrak{P}\Sigma_1+mn\mathfrak{Q}$$

oder

$$\mathfrak{A}=-\Sigma_1,$$
$$\mathfrak{B}=-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}\Sigma_1+\Sigma_2),$$
$$\mathfrak{C}=-\tfrac{1}{3}(\mathfrak{B}\Sigma_1+\mathfrak{A}\Sigma_2+\Sigma_3),$$
u. s. w.
$$\mathfrak{Q}=-\frac{1}{mn}(\mathfrak{P}\Sigma_1+\ldots+\mathfrak{B}\Sigma_{mn-2}+\mathfrak{A}\Sigma_{mn-1}+\Sigma_{mn});$$

mittelst welcher sich also die Coefficienten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ldots\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}$$

aus den Summen

$$\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ \Sigma_4,\ldots\Sigma_{mn}$$

bilden lassen, und woraus zugleich erhellet, dass

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ldots\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}$$

lauter ganze rationale algebraische Functionen der in Rede stehenden Summen sind. Da man nun aber nach dem Obigen die Summen

$$\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ \Sigma_4,\ldots\Sigma_{mn}$$

aus den Coefficienten der Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

bilden kann, wobei zugleich aus dem Obigen bekannt ist, dass

$$\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ \Sigma_4,\ldots\Sigma_{mn}$$

lauter ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten der beiden in Rede stehenden Gleichungen sind; so kann man auch die Coefficienten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ldots\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}$$

aus den Coefficienten der beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

bilden, und

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ldots\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}$$

sind lauter ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten der beiden in Rede stehenden Gleichungen.

Nach dem Obigen ist nun

$$(-1)^{mn}.\Sigma=\mathfrak{Q}$$

oder

$$\Sigma=(-1)^{mn}.\mathfrak{Q}.$$

Also kann man nach den aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebenden Regeln auch die Grösse Σ, folglich auch die durch die Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0$$

resultirende Gleichung $\Sigma=0$ aus den Coefficienten dieser beiden Gleichungen bilden, und zugleich ist klar, dass die Grösse Σ jederzeit

eine ganze rationale algebraische Function der in Rede stehenden Coefficienten ist.

§. 4.

Die Gleichung $\Sigma = 0$ kann aber auch noch auf folgende Art aus den Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

gebildet werden. Es ist offenbar

$$\Sigma = F(\alpha)\, F(\beta)\, F(\gamma)\, F(\delta) \ldots .$$

und

$$\Sigma = (-1)^{mn} f(\varkappa)\, f(\lambda)\, f(\mu)\, f(\nu) \ldots .;$$

also, wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen gebrauchen,

$$\begin{aligned}\Sigma = \; & (\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + \ldots + P\alpha + Q)\\ & \times (\beta^n + A\beta^{n-1} + B\beta^{n-2} + \ldots + P\beta + Q)\\ & \times (\gamma^n + A\gamma^{n-1} + B\gamma^{n-2} + \ldots + P\gamma + Q)\\ & \times (\delta^n + A\delta^{n-1} + B\delta^{n-2} + \ldots + P\delta + Q)\\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Da nun das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0$$

ist; so reducirt sich augenscheinlich die Bildung der Grösse Σ auf die Auflösung der schon vielfach behandelten Aufgabe:

Jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken, ohne die Wurzeln selbst zu kennen.

Nach dem zweiten der beiden oben angegebenen Ausdrücke von Σ ist

$$\begin{aligned}\Sigma = (-1)^{mn} & (\varkappa^m + a\varkappa^{m-1} + b\varkappa^{m-2} + \ldots + p\varkappa + q)\\ & \times (\lambda^m + a\lambda^{m-1} + b\lambda^{m-2} + \ldots + p\lambda + q)\\ & \times (\mu^m + a\mu^{m-1} + b\mu^{m-2} + \ldots + p\mu + q)\\ & \times (\nu^m + a\nu^{m-1} + b\nu^{m-2} + \ldots + p\nu + q)\\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

wo die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung

$$F(x) = 0$$

ist, und also nach der in Rede stehenden Aufgabe auch durch die Coefficienten dieser Gleichung ausgedrückt werden kann, ohne die Wurzeln selbst zu kennen.

Mittelst des Vorhergehenden lässt sich auch leicht der Grad beurtheilen, bis zu welchem die ganze rationale algebraische Function Σ der Coefficienten

$$a, b, c, \ldots p, q; A, B, C, \ldots P, Q$$

der beiden Gleichungen

$$f(x)=0,\ F(x)=0,$$

welche in Bezug auf x respective vom $m$ten und vom $n$ten Grade sind, in Bezug auf jeden der in Rede stehenden Coefficienten steigt. Nach dem Obigen ist nämlich

$$\begin{aligned}\Sigma = & (\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + \ldots + P\alpha + Q)\\ & \times(\beta^n + A\beta^{n-1} + B\beta^{n-2} + \ldots + P\beta + Q)\\ & \times(\gamma^n + A\gamma^{n-1} + B\gamma^{n-2} + \ldots + P\gamma + Q)\\ & \times(\delta^n + A\delta^{n-1} + B\delta^{n-2} + \ldots + P\delta + Q)\\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und weil nun die m Wurzeln

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots.$$

der Gleichung $f(x)=0$ natürlich bloss von den Coefficienten dieser Gleichung, d. i. von

$$a,\ b,\ c,\ldots p,\ q$$

abhängen, so ist Σ in Bezug auf jeden der Coefficienten

$$A,\ B,\ C,\ldots P,\ Q$$

offenbar vom $m$ten Grade. Ganz eben so ergiebt sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\Sigma = (-1)^{mn} & (x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q)\\ & \times(\lambda^m + a\lambda^{m-1} + b\lambda^{m-2} + \ldots + p\lambda + q)\\ & \times(\mu^m + a\mu^{m-1} + b\mu^{m-2} + \ldots + p\mu + q)\\ & \times(\nu^m + a\nu^{m-1} + b\nu^{m-2} + \ldots + p\nu + q)\\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

dass Σ in Bezug auf jeden der Coefficienten

$$a,\ b,\ c,\ldots p,\ q$$

vom $n$ten Grade ist.

§. 5.

Im vorigen Paragraphen haben wir das Eliminationsproblem auf die Aufgabe:

Jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten der Gleichung auszudrücken, ohne die Wurzeln selbst zu kennen;

reducirt, und wollen daher hier die schöne von Cauchy in seinen Exercices de Mathématiques. 4e année. p. 103 gegebene Auflösung dieses Problems, welche nicht so allgemein, wie sie es verdient, bekannt zu sein scheint, einschalten.

Diese Auflösung beruhet vorzüglich auf den beiden in den zwei folgenden Paragraphen bewiesenen Lehrsätzen.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn man die Grösse

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N,$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, mit $x+a$ dividirt; so ist der übrig bleibende Rest jederzeit eine von x unabhängige Grösse, welche man erhält, wenn man in dem Dividendus

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

für x die Grösse $-a$ setzt, nämlich die Grösse

$$A(-a)^n + B(-a)^{n-1} + C(-a)^{n-2} + \ldots + M(-a) + N.$$

Beweis. Der bei der Division von

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

durch $x+a$ hervorgehende Quotient sei

$$A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M',$$

und der übrig bleibende Rest, welcher, da der Divisor eine ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von x ist, offenbar eine eben solche Function des nullten Grades von x, d. i. eine von x unabhängige oder eine constante Grösse ist, sei R; so ist nach der Natur der Division

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$
$$= (x+a)\,(A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M') + R,$$

d. i.

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$
$$= A'x^n + \left.\begin{array}{l} B' \\ + A'a \end{array}\right\} x^{n-1} + \left.\begin{array}{l} C' \\ + B'a \end{array}\right\} x^{n-2} + \ldots + \left.\begin{array}{l} M' \\ + L'a \end{array}\right\} x + M'a + R.$$

Weil diese Gleichung für jedes x gilt, so hat man nach einem bekannten Satze die folgenden Gleichungen:

$$A = A',$$
$$B = B' + A'a,$$
$$C = C' + B'a,$$

u. s. w.

$$M = M' + L'a,$$
$$N = R + M'a;$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$A' = A,$$
$$B' = B - Aa,$$
$$C' = C - Ba + Aa^2,$$
$$D' = D - Ca + Ba^2 - Aa^3,$$

u. s. w.

$$M' = M - La + Ka^2 - Ja^3 + \ldots + Aa^{n-1}\,.\,(-1)^{n-1},$$
$$R' = N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ja^4 - \ldots - Aa^n\,.\,(-1)^{n-1};$$

oder

$$R = N - Ma + La^2 - Ka^3 + Ja^4 - \ldots + Aa^n\,.\,(-1)^n.$$

Also ist offenbar

$$R = A(-a)^n + B(-a)^{n-1} + C(-a)^{n-2} + \ldots + M(-a) + N,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 7.

Lehrsatz. Die n Wurzeln der Gleichung

$$1. \quad x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N = 0,$$

deren Coefficienten reelle oder imaginäre Grössen sein können, seien

$$a, b, c, d, \ldots i, k;$$

wobei wir zugleich annehmen wollen, dass diese Wurzeln sämmtlich unter einander ungleich sind. W sei eine beliebige Function der Wurzeln

$$a, b, c, d, \ldots i, k.$$

So wie diese Wurzeln offenbar Functionen der Coefficienten der Gleichung 1. sind: so kann man sich natürlich auch W durch diese Coefficienten ausgedrückt denken. Der durch die Coefficienten der Gleichung 1. ausgedrückte Werth von W sei Ω. Nun wollen wir annehmen, dass man durch irgend ein Mittel die Function W auf die Form

$$A_1 a^m + B_1 a^{m-1} + C_1 a^{m-2} + \ldots + U_1 a + V_1$$

gebracht habe; so dass die Coefficienten

$$A_1, B_1, C_1, \ldots U_1, V_1$$

sämmtlich durch die Coefficienten

$$A, B, C, \ldots L, N$$

ausgedrückt sind. Bleibt dann die Gleichung

$$2. \quad A_1 a^m + B_1 a^{m-1} + C_1 a^{m-2} + \ldots + U_1 a + V_1 = \Omega$$

jederzeit richtig, wenn man für a irgend eine der Wurzeln $b, c, d, \ldots i, k$ setzt; so wird bei der Division der Grösse

$$A_1 a^m + B_1 a^{m-1} + C_1 a^{m-2} + \ldots + U_1 a + V_1$$

durch die Grösse

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N,$$

indem man nämlich diese beiden Grössen als Functionen von a betrachtet, ein von a unabhängiger Rest übrig bleiben, welcher der durch die Coefficienten der Gleichung 1. ausgedrückte Werth Ω der Function W ist.

Beweis. Der bei der Division von

$$A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + C_1 x^{m-2} + \ldots + U_1 x + V_1$$

durch

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

übrig bleibende Rest hat im Allgemeinen die Form

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu,$$

so dass also, wenn wir den bei dieser Division sich ergebend Quotienten durch Q bezeichnen, für jedes x

$$3. \quad A_1 x^n + B_1 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + U_1 x + V_1$$
$$= (x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + \ldots + L x + N) Q$$
$$+ \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu$$

ist. Nach der Voraussetzung ist nun

$$A_1 a^n + B_1 a^{n-1} + C_1 a^{n-2} + \ldots + U_1 a + V_1 = \Omega,$$
$$A_1 b^n + B_1 b^{n-1} + C_1 b^{n-2} + \ldots + U_1 b + V_1 = \Omega,$$
$$A_1 c^n + B_1 c^{n-1} + C_1 c^{n-2} + \ldots + U_1 c + V_1 = \Omega,$$

u. s. w.

$$A_1 k^n + B_1 k^{n-1} + C_1 k^{n-2} + \ldots + U_1 k + V_1 = \Omega$$

und

$$a^n + A a^{n-1} + B a^{n-2} + \ldots + L a + N = 0,$$
$$b^n + A b^{n-1} + B b^{n-2} + \ldots + L b + N = 0,$$
$$c^n + A c^{n-1} + B c^{n-2} + \ldots + L c + N = 0,$$

u. s. w.

$$k^n + A k^{n-1} + B k^{n-2} + \ldots + L k + N = 0.$$

Folglich ist wegen der für jedes x geltenden Gleichung 3.

$$\alpha a^{n-1} + \beta a^{n-2} + \gamma a^{n-3} + \ldots + \lambda a + \mu = \Omega,$$
$$\alpha b^{n-1} + \beta b^{n-2} + \gamma b^{n-3} + \ldots + \lambda b + \mu = \Omega,$$
$$\alpha c^{n-1} + \beta c^{n-2} + \gamma c^{n-3} + \ldots + \lambda c + \mu = \Omega,$$

u. s. w.

$$\alpha k^{n-1} + \beta k^{n-2} + \gamma k^{n-3} + \ldots + \lambda k + \mu = \Omega,$$

und die Gleichung

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu = \Omega$$

oder

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu - \Omega = 0$$

des $(n-1)$sten Grades hat folglich die n unter einander ungleicl Wurzeln

$$a, b, c, d, \ldots i, k,$$

welches offenbar nur dann der Fall sein kann, wenn

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \ldots \lambda = 0, \mu - \Omega = 0$$

ist. Aus der letzten dieser Gleichungen folgt $\mu = \Omega$, und es also offenbar für jedes x

$$\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \ldots + \lambda x + \mu = \Omega,$$

d. h. der bei der Division von

$$A_1 x^n + B_1 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + U_1 x + V_1$$

durch

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$

bleibende Rest ist eine von x unabhängige Grösse und der oben durch Ω bezeichneten Grösse gleich. Daher ist natürlich auch der bei der Division von

$$A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1$$

durch

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + La + N$$

bleibende Rest eine von a unabhängige Grösse und der oben durch Ω bezeichneten Grösse gleich, welches bewiesen werden sollte.

§. 8.

Wir wollen nun die Anwendung der in den beiden vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Sätze auf die Gleichungen der verschiedenen Grade zeigen.

Zuerst sei die Gleichung des zweiten Grades

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

deren Coefficienten wie immer bei dieser Untersuchung beliebige reelle oder imaginäre Grössen sein können, gegeben. Die beiden unter einander ungleichen Wurzeln dieser Gleichung seien a, b; so ist nach einem bekannten Satze von den Gleichungen

$$a + b = -A,$$

und folglich

$$b = -A - a.$$

Wenn nun $f(a, b)$ eine ganze rationale symmetrische Function der beiden Wurzeln a und b ist; so wird man, wenn man

$$b = -A - a$$

setzt, diese Function immer leicht auf die Form

$$A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1$$

bringen, und also

$$f(a, b) = f(a, -A - a)$$
$$= A_1a^m + B_1a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1$$

setzen können. Weil aber nach der Voraussetzung $f(a, b)$ eine symmetrische Function von a und b ist, so ist nach dem allgemeinen Begriffe der symmetrischen Functionen offenbar

$$f(a, b) = f(b, a) = f(b, -A - b)$$
$$= A_1b^m + B_1b^{m-1} + C_1b^{m-2} + \ldots + U_1b + V_1.$$

Bezeichnet also wie in §. 7. das Symbol Ω den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth von $f(a, b)$; so ist klar, dass die Gleichung

$$A_1a^m + B_2a^{m-1} + C_1a^{m-2} + \ldots + U_1a + V_1 = \Omega$$

auch gilt, wenn man b für a setzt. Um also Ω zu finden, wird man nach §. 7. mit der Grösse

$$a^2 + Aa + B$$

Nun dividire man in $f(a, b)$, als Function von b betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von a betrachtet, mit $F(a)$ hinein; so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest, der gesuchte, durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b)$.

§. 9.

Es sei ferner die Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

gegeben. Die drei Wurzeln dieser Gleichung, die auch hier wieder als unter einander ungleich angenommen werden, seien a, b, c; so ist

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0$$

oder

$$C = -a^3 - Aa^2 - Ba.$$

Also ist

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x - a)$$
$$= (x - a)\{x^2 + (a + A)x + a^2 + Aa + B\},$$

und b, c sind folglich offenbar die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (a + A)x + a^2 + Aa + B = 0.$$

Ist nun $f(a, b, c)$ eine ganze rationale symmetrische Function von a, b, c; so kann man dieselbe zuerst bloss als eine ganze rationale symmetrische Function von b und c betrachten, und nach §. 8. durch die Coefficienten der vorhergehenden Gleichung des zweiten Grades ausdrücken. Dadurch wird offenbar $f(a, b, c)$ als eine ganze rationale Function von a dargestellt. Dividirt man nun in diesen Ausdruck von $f(a, b, c)$, als Function von a betrachtet, mit

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C$$

hinein; so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung des dritten Grades ausgedrückte Werth von $f(a, b, c)$, welcher gesucht wurde, wie aus dem in §. 7. bewiesenen Satze unmittelbar folgt.

Nach §. 8. hat man also auf folgende Art zu verfahren: Man setze

$$F_1(x) = x^2 + (a + A)x + a^2 + Aa + B$$

und

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b}.$$

Nun dividire man in $f(a, b, c)$, als Function von c betrachtet, mit $F_2(c)$ hinein, bemerke den Rest, und dividire in denselben, als Function von b betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein; so ist der bei dieser Division bleibende Rest der als eine Function von a dargestellte

$$x^3+(a+A)x^2+(a^2+Aa+B)x+a^3+Aa^2+Ba+C=0$$

sind. Ist nun $f(a, b, c, d)$ eine ganze rationale symmetrische Function von a, b, c, d; so kann man dieselbe zuerst bloss als eine ganze rationale symmetrische Function von b, c, d betrachten, und nach §. 9. durch die Coefficienten der vorhergehenden Gleichung des dritten Grades ausdrücken. Dadurch erhält man $f(a, b, c, d)$ als Function von a ausgedrückt. Dividirt man nun in diesen Ausdruck mit

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D$$

hinein, so ist nach §. 7. der bei dieser Division übrig bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$, welcher gesucht wurde.

Nach §. 9. hat man also auf folgende Art zu verfahren:

Man setze

$$F_1(x)=x^3+(a+A)x^2+(a^2+Aa+B)x+a^3+Aa^2+Ba+C$$

und

$$F_2(x)=\frac{F_1(x)-F_1(b)}{x-b},$$

$$F_3(x)=\frac{F_2(x)-F_2(c)}{x-c}.$$

Nun dividire man in $f(a, b, c, d)$, als Function von d betrachtet, mit $F_3(d)$ hinein, bemerke den Rest, dividire in denselben, als Function von c betrachtet, mit $F_2(c)$ hinein, bemerke wieder den Rest, und dividire in denselben, als Function von b betrachtet, mit $F_1(b)$ hinein. Der bei dieser Division bleibende Rest ist der als Function von a ausgedrückte Werth der Function $f(a, b, c, d)$. Diesen Rest dividire man durch

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D,$$

so ist der bei dieser Division übrig bleibende Rest der durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung des vierten Grades ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d)$, welcher gesucht wurde.

Bemerkt man nun aber wieder, dass nach dem Obigen die Function $F_1(x)$ erhalten wird, wenn man

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D$$

von

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

subtrahirt, in den Rest mit $x-a$ dividirt und den Quotienten bemerkt; so ist klar, dass man die obige Regel auch auf den folgenden Ausdruck bringen kann:

Man setze

$$F(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

und

$$F_1(x)=\frac{F(x)-F(a)}{x-a},$$

$$F_2(x)=\frac{F_1(x)-F_1(b)}{x-b},$$

u. s. w.; und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man einen Rest, als Function von b betrachtet, durch $F_1(b)$, und endlich den bei dieser Division bleibenden Rest, als Function von a betrachtet, durch $F(a)$ dividirt hat; so ist der bei dieser letzten Division bleibende Rest der gesuchte durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückte Werth von $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$.

Nach dem Obigen würde dieser Satz eigentlich noch der Bedingung zu unterwerfen sein, dass die Wurzeln der gegebenen Gleichung sämmtlich unter einander ungleich sein müssen. Indess erhellet durch das folgende einfache Raisonnement sogleich, dass dies nicht nöthig ist, und unser Satz also auch dann noch gültig bleibt, wenn unter den Wurzeln $a, b, c, d, \ldots i, k$ der gegebenen Gleichung beliebig viele einander gleiche vorkommen. Bezeichnet nämlich, die Wurzeln als sämmtlich unter einander ungleich angenommen, wie schon früher, Ω den durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückten Werth der ganzen rationalen symmetrischen Function $f(a, b, c, d, \ldots i, k)$; so ist

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega,$$

und aus der oben gelehrten Bestimmungsweise von Ω erhellet unmittelbar, dass unter den gemachten Voraussetzungen Ω immer eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten A, B, C, $D, \ldots L$, N ist. Die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

bleibt nach dem Obigen richtig, wenn nur alle Wurzeln der gegebenen Gleichung unter einander ungleich sind, wie klein auch sonst die absoluten Werthe ihrer Unterschiede sein mögen. Nun kann man sich aber offenbar vorstellen, dass sich die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots L, N$ der gegebenen Gleichung auf eine solche Weise stetig ändern, dass eine oder mehrere Differenzen zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung sich fortwährend und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Unter dieser Voraussetzung hört die Gleichung

$$f(a, b, c, d, \ldots i, k) = \Omega$$

nie auf gültig zu sein, und wird also offenbar auch dann noch gültig bleiben, wenn die gedachten Differenzen ihre Gränze Null wirklich erreichen, oder, was dasselbe ist, wenn zwei oder mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleich werden.

§. 12.

Von dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Theoreme wollen wir nun zu dessen näherer Erläuterung einige Anwendungen machen.

Zuerst sei die Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + Bx + C = 0,$$

deren Wurzeln, wie oben, durch a, b, c bezeichnet werden sollen, gegeben. Man soll die ganze rationale symmetrische Function

$$W = b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2$$

$$F(x) = x^4 + Bx^2 + Cx + D,$$

und folglich

$$F(x) - F(a) = x^4 - a^4 + B(x^2 - a^2) + C(x - a),$$

also

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = x^3 + ax^2 + (a^2 + B)x + a^3 + Ba + C.$$

Daher ist

$$F_1(x) - F_1(b) = x^3 - b^3 + a(x^2 - b^2) + (a^2 + B)\ (x - b),$$

folglich

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - F_1(b)}{x - b} = x^2 + (b + a)x + b^2 + ab + a^2 + B,$$

also

$$F_2(x) - F_2(c) = x^2 - c^2 + (b + a)\ (x - c),$$

und daher

$$F_3(x) = \frac{F_2(x) - F_2(c)}{x - c} = x + c + b + a.$$

Die fernere Rechnung kann man sich aber in diesem Falle auf folgende Art sehr erleichtern. Nach einem bekannten Satze ist nämlich

$$a + b + c + d = 0,$$

oder

$$d = -a - b - c.$$

Also ist

$$a + d = -(b + c),$$
$$b + d = -(a + c),$$
$$c + d = -(a + b),$$

und folglich

$$W = -\{(a + b)\ (a + c)\ (b + c)\}^2,$$

wo man nun statt W die einfachere symmetrische Function

$$W_1 = (a + b)\ (a + c)\ (b + c)$$

entwickeln kann, aus der sich dann nach dem Vorhergehenden W leicht ergiebt. Entwickelt man W_1, nach den Potenzen von c; so erhält man

$$W_1 = (b + a)c^2 + (b + a)^2c + ab^2 + a^2b.$$

Dividirt man mit

$$F_3(d) = d + c + b + a$$

in W_1, als Function von d betrachtet, hinein, so ist der Rest offenbar

$$(b + a)c^2 + (b + a)^2c + ab^2 + a^2b.$$

Dividirt man in diese Grösse, als Function von c betrachtet, mit

und folglich

$$(a-b)^2 = A^2 - 4B.$$

Die Richtigkeit dieses Resultats kann man auf folgende Art leicht prüfen. Bekanntlich ist

$$a+b=-A,$$

und, weil a eine Wurzel der gegebenen quadratischen Gleichung ist, so ist

$$a^2 + Aa + B = 0.$$

Da nun

$$b = -a - A$$

ist, so ist

$$W = (a-b)^2 = (2a+A)^2 = A^2 + 4(a^2 + Aa),$$

und folglich, weil

$$a^2 + Aa = -B$$

ist,

$$(a-b)^2 = A^2 - 4B,$$

wie vorher gefunden wurde.

§. 15.

Die gegebene Gleichung sei die vollständige cubische Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

und die durch deren Coefficienten auszudrückende ganze rationale symmetrische Function ihrer Wurzeln a, b, c sei

$$W = (a-b)^2\,(a-c)^2\,(b-c)^2.$$

Um in diesem und in ähnlichen Fällen die symmetrische Function W bloss durch a und die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, so dass nämlich die Wurzeln b, c aus dem obigen Ausdrucke von W eliminirt werden, kann man auch auf folgende Art verfahren. Da a eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, so ist

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Folglich ist für jedes x

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C$$
$$= x^3 - a^3 + A(x^2 - a^2) + B(x-a)$$
$$= (x-a)\{x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B\}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x-a)\,(x-b)\,(x-c).$$

Folglich ist für jedes x

$$(x-b)\,(x-c) = x^2 + (a+A)x + a^2 + Aa + B,$$

und daher für $x=a$

$$(a-b)\,(a-c) = 3a^2 + 2Aa + B.$$

Folglich ist für jedes x

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Lx + N$$
$$= x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x-a),$$

oder, weil die Function auf der linken Seite des Gleichheitszeichens dem Producte

$$(x-a)\ (x-b)\ (x-c) \ldots (x-i)\ (x-k)$$

gleich ist, für jedes x

$$(x-a)\ (x-b)\ (x-c) \ldots (x-i)\ (x-k)$$
$$= x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + L(x-a),$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $x-a$ dividirt, für jedes x

$$\begin{aligned}(x-b)\ (x-c)\ (x-d) \ldots (x-i)\ (x-k)&\\ = x^{n-1}&\\ + (a+A)x^{n-2}&\\ + (a^2 + Aa + B)x^{n-3}&\\ + (a^3 + Aa^2 + Ba + C)x^{n-4}&\\ \text{u. s. w.}&\\ + a^{n-1} + Aa^{n-2} + Ba^{n-3} + Ca^{n-4} + \ldots + L;&\end{aligned}$$

folglich für $x = a$

$$(a-b)\ (a-c)\ (a-d) \ldots (a-i)\ (a-k)$$
$$= na^{n-1} + (n-1)Aa^{n-2} + (n-2)Ba^{n-3} + \ldots + L.$$

Auch ist klar, dass $b, c, d, \ldots i, k$ die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned}0 = x^{n-1}&\\ + (a+A)x^{n-2}&\\ + (a^2 + Aa + B)x^{n-3}&\\ + (a^3 + Aa^2 + Ba + C)x^{n-4}&\\ \text{u. s. w.}&\\ + a^{n-1} + Aa^{n-2} + Ba^{n-3} + Ca^{n-4} + \ldots + L&\end{aligned}$$

sind. Weil wir nun annehmen, dass man für jede Gleichung des $(n-1)$sten Grades das Product der Quadrate der Differenzen je zweier Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken kann; so kann man das Product

$$\begin{aligned}(b-c)^2\ (b-d)^2\ (b-e)^2 \ldots (b-i)^2\ (b-k)^2&\\ \times (c-d)^2\ (c-e)^2 \ldots (c-i)^2\ (c-k)^2&\\ \times (d-e)^2 \ldots (d-i)^2\ (d-k)^2&\\ \text{u. s. w.}&\\ \times (h-i)^2\ (h-k)^2&\\ \times (i-k)^2&\end{aligned}$$

durch die Coefficienten der obigen Gleichung des $(n-1)$sten Grades ausdrücken. Bezeichnen wir den dadurch hervorgehenden Aus-

der drei Wurzeln a, b, c einer cubischen Gleichung, so kann man nach dem Vorhergehenden die ganze rationale symmetrische Function

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$$

durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht, folglich auch die Function W.

Man sieht also:

dass jede symmetrische Function der Wurzeln einer beliebigen Gleichung immer durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden kann, ohne dass man die Wurzeln selbst zu kennen braucht.

§. 18.

Um nur ein einfaches Beispiel der Elimination einer unbekannten Grösse aus zwei Gleichungen zu geben, wollen wir die beiden Gleichungen des zweiten Grades

$$x^2+ax+b=0,$$
$$x^2+Ax+B=0$$

betrachten, und wollen

$$F(x)=x^2+Ax+B$$

setzen, die Wurzeln der zweiten Gleichung aber durch $\varkappa$ und λ bezeichnen. Nach §. 4. ist unter diesen Voraussetzungen, wenn Σ seine dortige Bezeichnung behält,

$$\Sigma=(\varkappa^2+a\varkappa+b)(\lambda^2+a\lambda+b),$$

und es kommt nun darauf an, diese symmetrische Function der Wurzeln $\varkappa$, λ der Gleichung

$$x^2+Ax+B=0$$

durch die Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken. Zu dem Ende muss man nach §. 11. zuvörderst

$$F_1(x)=\frac{F(x)-F(\varkappa)}{x-\varkappa}=\frac{x^2-\varkappa^2+A(x-\varkappa)}{x-\varkappa}$$

berechnen, wodurch man

$$F_1(x)=x+\varkappa+A$$

erhält, und muss dann den Rest entwickeln, welcher übrig bleibt, wenn man mit

$$F_1(\lambda)=\lambda+\varkappa+A$$

in die als Function von λ betrachtete Grösse Σ hinein dividirt. Wenn man aber zuerst mit $\lambda+\varkappa+A$ in $\lambda^2+a\lambda+b$ dividirt, so bleibt als Rest die Grösse

$$(\varkappa+A)(\varkappa+A-a)+b$$

oder

$$\varkappa^2+(2A-a)\varkappa+A^2-aA+b,$$

und wenn man also mit $\lambda+\varkappa+A$ in

$$\Sigma=(\varkappa^2+a\varkappa+b)(\lambda^2+a\lambda+b)$$

ist dann das Resultat der Elimination von x aus den beiden Gleichungen

$$x^m + \frac{b}{a}x^{m-1} + \frac{c}{a}x^{m-2} + \ldots + \frac{p}{a}x + \frac{q}{a} = 0,$$

$$x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} + \ldots + \frac{P}{A}x + \frac{Q}{A} = 0;$$

oder natürlich auch das Resultat der Elimination von x aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0.$$

Bekanntlich ist Σ eine ganze rationale algebraische Function von

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots \frac{p}{a}, \frac{q}{a};$$

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \ldots \frac{P}{A}, \frac{Q}{A};$$

welche nach §. 4. in Bezug auf

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots \frac{p}{a}, \frac{q}{a}$$

vom $n$ten, in Bezug auf

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \ldots \frac{P}{A}, \frac{Q}{A}$$

vom $m$ten Grade ist. Also ist offenbar $a^n A^m \Sigma$ jederzeit eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten

$$a, b, c, d, \ldots p, q;$$

$$A, B, C, D, \ldots P, Q$$

der beiden gegebenen Gleichungen, und das Resultat der Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen ist die Gleichung

$$a^n A^m \Sigma = 0,$$

deren ersten Theil eine ganze rationale algebraische Function der Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen ist.

§. 20.

Wir wollen jetzt wieder zu den beiden zu Anfange betrachteten Gleichungen

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0,$$

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Px + Q = 0$$

oder

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

zurückkehren, indem wir auch sowohl dem Symbol Σ, als auch allen übrigen in §. 2. gebrauchten Symbolen ihre ihnen dort beigelegten Bedeutungen lassen. Dies vorausgesetzt, hat nun Cauchy in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. I. p. 400. die in dem folgenden Satze ausgesprochene, für

algebraische symmetrische Function der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, als auch eine ganze rationale algebraische symmetrische Function der Wurzeln $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ *). Daher ist Σ' nicht bloss durch das Binomium $\alpha - \varkappa$, sondern durch jedes aus diesem durch Vertauschung von α mit einer der Wurzeln $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ und durch Vertauschung von $\varkappa$ mit einer der Wurzeln $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sich ergebende Binomium algebraisch ohne Rest theilbar. Weil nun aber die Binomien, welche man auf diese Weise erhält, im Allgemeinen sämmtlich unter einander ungleich sind, so muss Σ' durch das Product aller dieser Binomien, nämlich durch das Product

$$\begin{array}{l} (\alpha-\varkappa)(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots \\ \times(\beta-\varkappa)(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots \\ \times(\gamma-\varkappa)(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots \\ \times(\delta-\varkappa)(\delta-\lambda)(\delta-\mu)(\delta-\nu)\ldots \\ \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array},$$

d. h. durch die Grösse Σ, algebraisch ohne Rest theilbar sein, und wir sind also, indem U eine ganze rationale algebraische Function von

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots; \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$$

bezeichnet,

$$\Sigma' = U\Sigma$$

zu setzen berechtigt. Nach dem Obigen ist aber

$$\Sigma = \Sigma'\Sigma'',$$

welches in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung zu der Gleichung

$$U\Sigma'' = 1$$

führt, aus der, da U und Σ'' beide ganze rationale algebraische Functionen von

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots; \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$$

sind, auf der Stelle ganz unzweideutig hervorgeht, dass U und Σ'' constante Grössen, d. h. von den Wurzeln

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots; \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$$

der beiden gegebenen Gleichungen, und folglich auch von deren Coefficienten

$$a, b, c, d, \ldots; A, B, C, D, \ldots$$

ganz unabhängig sind. Setzt man also

---

*) Jede ganze rationale algebraische Function der Coefficienten einer Gleichung kann nämlich mittelst der aus §. 3. bekannten Formeln des Newton'schen Satzes als eine ganze rationale algebraische Function der Summen der Potenzen der Wurzeln der Gleichung ausgedrückt werden, und ist also offenbar immer eine ganze rationale algebraische symmetrische Function der Wurzeln.

welche ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen sind. Setzt man aber nur z. B. $a=A=0$, so dass also

$$x^2+b=0,\ x^2+B=0$$

die beiden gegebenen Gleichungen sind, so geht die obige Endgleichung in die Gleichung

$$(B-b)^2=0$$

über, statt welcher man also einfacher

$$B-b=0$$

setzen kann.

Um diesen Aufsatz über die Elimination nicht zu sehr auszudehnen, müssen wir hierbei stehen bleiben, verweisen aber weiterer Ausführung wegen auf die Abhandlung Cauchy's, auf welche schon oben in §. 20. Bezug genommen worden ist.

XXXI.

Ueber Jacob Bernoulli's Methode, die Höhe der Wolken zu bestimmen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Jacob Bernoulli's Methode, die Höhe der Wolken zu bestimmen (Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera. Genevae. 1744. T. I. p. 336. — Lehrbuch der Meteorologie von L. F. Kämtz. Erster Band. Halle. 1831. S. 383), welche unter allen zu diesem Zweck in Vorschlag gebrachten, nur einen Beobachter erfordernden Verfahrungsarten wohl noch zu den genauesten Resultaten führen dürfte, besteht, wie hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden kann, darin, dass man des Abends nach dem Untergange der Sonne in dem Moment, wo ein Punkt einer Wolke von den Strahlen der Sonne erleuchtet zu werden aufhört, das

[illegible] der Wolke misst *), so wie [illegible] und daraus die Lage des [illegible] im Raume auf dem Wege [illegible] Bernoulli selbst a. a. O. [illegible] Meteorologie in mehrfacher Be-[illegible] nur vorzüglich deshalb [illegible] weil Bernoulli die Sonne als einen [illegible] einer rohern Annäherung [illegible] anderer Beziehung noch Manches [illegible] wodurch ich veranlasst worden bin, die [illegible] in so fern man auf die [illegible] von der Sonne zu der Wolke gelangenden [illegible] der Refraction in der Atmosphäre erleiden, keine [illegible] nimmt ***), für völlig streng [illegible] aufzusuchen und in [illegible] Zeitschrift mitzutheilen. Ganz absichtlich habe ich für jetzt [illegible] dem geometrischen Gesichtspunkte betrachtet, völlig [illegible] Auflösung des in Rede stehenden, auch in rein mathemati-[illegible] Beziehung mehrfaches Interesse darbietenden Problems zu [illegible] versucht. Dass diese Auflösung nicht ganz einfach ausfallen [illegible] scheint in der Natur der Aufgabe zu liegen, wenn man [illegible] alle bei derselben in Betracht kommende Umstände gehö-[illegible] berücksichtigen will. Späterhin hoffe ich in einem besondern [illegible] auf dieselbe zurückzukommen, um zu untersuchen, ob sich [illegible] wenn man sich eine oder die andere nur näherungsweise [illegible] Voraussetzung gestattet, einfachere, also bei praktischen [illegible] wendungen brauchbarere und bequemere Auflösungen geben lassen. Eben so denke ich dann andere zur Bestimmung der Höhe der Wolken vorgeschlagene Methoden einer genauern Untersuchung zu unterwerfen.

§. 2.

In dem Moment, wo die Erleuchtung eines Punktes einer Wolke durch die Strahlen der Sonne völlig aufzuhören anfängt, befindet sich derselbe offenbar in der von den Strahlen der Sonne gebildeten, die Sonne und die für jetzt als eine Kugel betrachtete Erde †) einhüllenden Kegelfläche, durch welche der sogenannte Kernschatten der Erde bestimmt wird, und unmittelbar nach dem völligen Aufhören der Erleuchtung tritt der in Rede stehende Punkt der Wolke in den Kernschatten der Erde hinein. Bezeichnen wir nun im Moment der Beobachtung den Mittelpunkt der Erde durch A, den Mittelpunkt der Sonne durch B, die Spitze der in Rede stehenden einhüllenden Kegelfläche durch C, den von den Seiten dieser Kegelfläche mit ihrer Axe an der Spitze eingeschlossenen

*) Wie man auf die Refraction, von welcher die gemessene Höhe afficirt wird, Rücksicht zu nehmen hat, soll am Schlusse dieser Abhandlung gezeigt werden.

**) M. s. Kämtz a. a. O.

***) Die Berücksichtigung dieser Krümmung würde die Kenntniss der Gleichung der Refractionscurve erfordern und jedenfalls in die grösste Weitläufigkeit führen.

†) Wie auf die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt Rücksicht zu nehmen ist, wird weiter unten gezeigt werden.

spitzen Winkel auch durch C, und durch A_1 und B_1 die beiden Punkte, in denen respective die Erde und die Sonne von einer beliebigen Seite der einhüllenden Kegelfläche berührt werden, so haben wir, wie auch ohne Figur, die übrigens grösserer Deutlichkeit wegen ein Jeder sich leicht selbst entwerfen kann, sogleich erhellen wird, die beiden folgenden Gleichungen:

$$AC = \frac{AA_1}{\sin C}, \; BC = \frac{BB_1}{\sin C};$$

also, weil $AC - BC = - AB$ ist,

$$\frac{AA_1 - BB_1}{\sin C} = - AB.$$

Bezeichnet nun ϱ die aus den Ephemeriden zu entnehmende Entfernung des Mittelpunkts der Sonne von dem Mittelpunkte der Erde zur Zeit der Beobachtung, und Δ den ebenfalls aus den Ephemeriden zu entnehmenden, aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser der Sonne zur Zeit der Beobachtung, r aber den Halbmesser der Erde; so ist offenbar $AB = \varrho$, $AA_1 = r$, $BB_1 = \varrho \sin \Delta$, und wir erhalten daher aus der vorher gefundenen Gleichung unmittelbar die Gleichung

$$\frac{r - \varrho \sin \Delta}{\sin C} = - \varrho,$$

aus der sich sogleich

$$1) \; \sin C = \sin \Delta - \frac{r}{\varrho},$$

oder, wenn man den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$2) \; \sin \Theta = \frac{r}{\varrho}$$

berechnet,

$$\sin C = \sin \Delta - \sin \Theta,$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel

$$3) \; \sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\Delta - \Theta) \cos \tfrac{1}{2}(\Delta + \Theta)$$

ergiebt, mittelst welcher Ausdrücke der für das Folgende wichtige Winkel C ohne Schwierigkeit berechnet werden kann.

Hat man aber den Winkel C, so findet man die Entfernungen AC und BC der Spitze der einhüllenden Kegelfläche von den Mittelpunkten der Erde und der Sonne leicht mittelst der folgenden aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$4) \; AC = \frac{r}{\sin C}, \; BC = \frac{\varrho \sin \Delta}{\sin C}.$$

§. 3.

Wir wollen jetzt ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz annehmen, dessen Anfang der Mittelpunkt der Erde sein soll. Die Ebene der xy sei die Ebene des Aequators; der positive Theil der Axe der x sei nach dem Frühlingspunkte hin gerichtet, der positive Theil der Axe der y aber werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den

rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem positiven Theile der Axe der x an die Rectascensionen von 0 bis 360° gezählt werden, so dass also der positive Theil der Axe der y durch den neunzigsten Grad der Rectascensionen geht; der positive Theil der Axe der z endlich liege auf der nördlichen Seite der Ebene des Aequators oder der Ebene der xy. In diesem Coordinatensysteme sind, wenn α und δ die aus den Ephemeriden zu entnehmende Rectascension und Declination der Sonne zur Zeit der Beobachtung bezeichnen, und das Symbol ϱ die ihm im vorigen Paragraphen beigelegte Bedeutung behält, offenbar

$$\varrho \cos\alpha \cos\delta,$$
$$\varrho \sin\alpha \cos\delta,$$
$$\varrho \sin\delta$$

die Coordinaten der Sonne zur Zeit der Beobachtung.

Sind nun überhaupt

$$x = Mz,\ y = Nz$$

die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der Sonne und der Erde gezogenen geraden Linie zur Zeit der Beobachtung; so hat man zur Bestimmung der Constanten M und N offenbar die beiden Gleichungen

$$\varrho \cos\alpha \cos\delta = M\varrho \sin\delta,$$
$$\varrho \sin\alpha \cos\delta = N\varrho \sin\delta;$$

aus denen sich

$$M = \cos\alpha \cot\delta,\ N = \sin\alpha \cot\delta$$

ergiebt, und die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der Erde und der Sonne gezogenen geraden Linie zur Zeit der Beobachtung im Systeme der xyz sind also nach dem Vorhergehenden

$$5)\ x = z \cos\alpha \cot\delta,\ y = z \sin\alpha \cot\delta.$$

Die Coordinaten der Spitze C der einhüllenden Kegelfläche zur Zeit der Beobachtung seien f, g, h, und E sei die aus dem vorigen Paragraphen bekannte Entfernung dieser Spitze vom Mittelpunkte der Erde; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$f^2 + g^2 + h^2 = E^2,$$

und nach den Gleichungen 5) hat man, weil die in Rede stehende Spitze jederzeit in der durch die Mittelpunkte der Erde und der Sonne gehenden geraden Linie liegt, die beiden Gleichungen

$$f = h \cos\alpha \cot\delta,\ g = h \sin\alpha \cot\delta.$$

Führt man dies in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man

$$(1 + \cos\alpha^2 \cot\delta^2 + \sin\alpha^2 \cot\delta^2)h^2 = E^2,$$

also

$$(1 + \cot\delta^2)h^2 = h^2 \operatorname{cosec}\delta^2 = E^2,$$

und folglich

$$h = \pm E \sin \delta,$$

wo sich nun noch frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, worüber leicht auf folgende Art eine bestimmte Entscheidung gegeben werden kann.

Bezeichnen wir die dritte Coordinate der Sonne zur Zeit der Beobachtung durch Z, so ist nach dem Obigen

$$Z = \varrho \sin \delta,$$

und folglich

$$\frac{h}{Z} = \pm \frac{E}{\varrho}.$$

Weil nun aber, wie sogleich in die Augen fallen wird, h und Z jederzeit entgegengesetzte Vorzeichen haben, und $\frac{E}{\varrho}$ stets positiv ist, so kann bloss

$$\frac{h}{Z} = -\frac{E}{\varrho}$$

sein, d. h. man muss in der Gleichung

$$h = \pm E \sin \delta$$

das untere Vorzeichen nehmen, oder

$$h = -E \sin \delta$$

setzen.

Verbindet man diese Gleichung mit den oben gefundenen Gleichungen

$$f = h \cos \alpha \cot \delta, \; g = h \sin \alpha \cot \delta;$$

so erhält man:

$$6. \begin{cases} f = -E \cos \alpha \cos \delta, \\ g = -E \sin \alpha \cos \delta, \\ h = -E \sin \delta; \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten f, g, h der Spitze der einhüllenden Kegelfläche im Systeme der xyz sehr leicht berechnet werden können.

Hiernach kann nun die Gleichung der einhüllenden Kegelfläche im Systeme der xyz leicht auf folgende Art gefunden werden. Weil jede Seite der Kegelfläche durch ihre Spitze geht, so sind nach dem Vorhergehenden und den Principien der analytischen Geometrie die allgemeinen Gleichungen einer jeden Seite

$$x - f = K(z - h),$$
$$y - g = L(z - h)$$

oder

$$\frac{x-f}{z-h} = K, \; \frac{y-g}{z-h} = L.$$

Die Gleichungen der Axe der Kegelfläche sind nach 5)

$$x = z \cos \alpha \cot \delta, \; y = z \sin \alpha \cot \delta,$$

und weil die Spitze in der Axe liegt, so ist

$$f = h\cos\alpha\cot\delta,\quad g = h\sin\alpha\cot\delta;$$

also ist

$$\frac{x}{f} = \frac{z}{h},\quad \frac{y}{g} = \frac{z}{h};$$

oder

$$x = \frac{f}{h}z,\quad y = \frac{g}{h}z$$

sind die Gleichungen der Axe der Kegelfläche. Weil nun jede Seite der Kegelfläche mit der Axe den aus dem Obigen bekannten Winkel C einschliesst, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\cos C^2 = \frac{\left(1 + \frac{f}{h}\cdot\frac{x-f}{z-h} + \frac{g}{h}\cdot\frac{y-g}{z-h}\right)^2}{\left(1 + \frac{f^2}{h^2} + \frac{g^2}{h^2}\right)\left\{1 + \left(\frac{x-f}{z-h}\right)^2 + \left(\frac{y-h}{z-h}\right)^2\right\}},$$

oder

$$\cos C^2 = \frac{\{f(x-f) + g(y-g) + h(z-h)\}^2}{(f^2 + g^2 + h^2)\{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\}},$$

oder

$$\cos C^2 = \frac{\{f(x-f) + g(y-g) + h(z-h)\}^2}{E^2\{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\}},$$

d. h.

$$7)\quad E^2\{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2\}\cos C^2$$
$$= \{f(x-f) + g(y-h) + h(z-h)\}^2$$

die Gleichung der einhüllenden Kegelfläche im Systeme der xyz, mit deren Transformation und etwaigen Vereinfachung wir uns jetzt nicht weiter beschäftigen wollen.

§. 4.

Der Kürze wegen, und um die Begriffe besser zu fixiren, wollen wir im Folgenden annehmen, dass der Beobachtungsort in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liege, wodurch der Allgemeinheit der Auflösung offenbar kein Eintrag geschehen wird. Um ferner, so viel es hier thunlich ist, auf die Abweichung der Gestalt der Erde von der Kugelgestalt Rücksicht zu nehmen, werden wir von jetzt an unter r immer den nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser verstehen, und werden späterhin noch besonders zeigen, wie die Grösse dieses Halbmessers der Erde auf die einfachste Weise berechnet werden kann. Die sogenannte geocentrische Breite des Beobachtungsorts, d. h. den neunzig Grade nicht übersteigenden Neigungswinkel des nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmessers gegen die Ebene des Aequators, wollen wir durch φ bezeichnen, und durch T soll die in Stunden ausge-

drückte Sternzeit der Beobachtung *) bezeichnet werden. Dies vorausgesetzt sind, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$r \cos 15T \cos \varphi,$$
$$r \sin 15T \cos \varphi,$$
$$r \sin \varphi$$

die Coordinaten des Beobachtungsorts im Systeme der xyz zur Zeit der Beobachtung.

Legt man nun durch den Beobachtungsort als Anfang ein dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x_1y_1z_1$, so hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$8)\begin{cases} x = r \cos 15T \cos \varphi + x_1, \\ y = r \sin 15T \cos \varphi + y_1, \\ z = r \sin \varphi + z_1. \end{cases}$$

Ferner lege man durch den Beobachtungsort als Anfang ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_2y_2z_2$. Die Ebene der x_2y_2 soll mit der Ebene der x_1y_1 zusammenfallen. Der positive Theil der Axe der x_2 sei der in der südlichen Hälfte des Meridians liegende Halbmesser des Kreises, in welchem die Sphäre von der Ebene der x_2y_2 geschnitten wird; der positive Theil der Axe der y_2 werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_2 durch den rechten Winkel (x_2y_2) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_2 zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 durch den rechten Winkel (x_1y_1) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen; der positive Theil der Axe der z_2 falle mit dem positiven Theile der Axe der z_1 zusammen. Dies vorausgesetzt, hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$9)\begin{cases} x_1 = x_2 \cos 15T - y_2 \sin 15T, \\ y_1 = x_2 \sin 15T + y_2 \cos 15T, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Endlich lege man durch den Beobachtungsort als Anfang noch ein drittes rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_3y_3z_3$. Die Ebene der x_3y_3 sei die Ebene des Horizonts des Beobachtungsorts. Der positive Theil der Axe der x_3 sei der in der südlichen Hälfte des Meridians liegende Halbmesser des Horizonts; der positive Theil der Axe der y_3 werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_3 an durch den rechten Winkel (x_3y_3) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_3 zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von dem in der südlichen Hälfte des Meridians liegenden Halbmesser des Horizonts an die Azimuthe von 0 bis 360° gezählt werden, wobei wir zugleich festsetzen wollen, dass die Azimuthe von dem in Rede stehenden Halbmesser des Horizonts an nach

*) Natürlich Zeit des Beobachtungsorts.

$$z_1 = -r\cos\varphi\cos\omega\cos 15T^2 + x\cos\omega\cos 15T$$
$$-r\cos\varphi\cos\omega\sin 15T^2 + y\cos\omega\sin 15T$$
$$-r\sin\varphi\sin\omega \qquad + z\sin\omega;$$

also, wie man mittelst einiger bekannten goniometrischen Formeln leicht findet:

$$11)\begin{cases} x_1 = r\sin(\varphi-\omega) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega, \\ y_1 = -x\sin 15T + y\cos 15T, \\ z_1 = -r\cos(\varphi-\omega) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T + z\sin\omega; \end{cases}$$

oder auch, etwas grösserer Symmetrie wegen:

$$12)\begin{cases} x_1 = -r\sin(\omega-\varphi) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega, \\ y_1 = -x\sin 15T + y\cos 15T, \\ z_1 = -r\cos(\omega-\varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T + z\sin\omega. \end{cases}$$

Das Azimuth und die Höhe der Wolke seien λ und μ, so sind, wie leicht erhellen wird, die Gleichungen der von dem Beobachtungsorte nach der Wolke gezogenen geraden Linie im Systeme der $x_1y_1z_1$

$$13)\quad x_1 = z_1\cos\lambda\cot\mu,\quad y_1 = z_1\sin\lambda\cot\mu;$$

und die Gleichungen dieser Linie im Systeme der xyz sind folglich nach 12)

$$-r\sin(\omega-\varphi) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega$$
$$= \{-r\cos(\omega-\varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T$$
$$+ z\sin\omega\}\cos\lambda\cot\mu,$$
$$-x\sin 15T + y\cos 15T$$
$$= \{-r\cos(\omega-\varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T$$
$$+ z\sin\omega\}\sin\lambda\cot\mu;$$

oder, wie man leicht findet,

$$\cos 15T(\sin\omega - \cos\omega\cos\lambda\cot\mu)x$$
$$+\sin 15T(\sin\omega - \cos\omega\cos\lambda\cot\mu)y$$
$$-(\cos\omega + \sin\omega\cos\lambda\cot\mu)z$$
$$= r\{\sin(\omega-\varphi) - \cos(\omega-\varphi)\cos\lambda\cot\mu\},$$

$$-(\sin 15T + \cos 15T\cos\omega\sin\lambda\cot\mu)x$$
$$+(\cos 15T - \sin 15T\cos\omega\sin\lambda\cot\mu)y$$
$$-z\sin\omega\sin\lambda\cot\mu$$
$$= -r\cos(\omega-\varphi)\sin\lambda\cot\mu.$$

Berechnet man zwei Hülfswinkel F und G mittelst der Formeln

$$14)\begin{cases} \tan F = \cos\lambda\cot\mu, \\ \tan G = \cos\omega\sin\lambda\cot\mu; \end{cases}$$

so erhalten die vorhergehenden Gleichungen der von dem Beobach-

$$18)\begin{cases} E^2\{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2\}\cos C^2 \\ \qquad =\{f(x-f)+g(y-g)+h(z-h)\}^2, \\ (x-f)\cos 15T\sin(\omega-F)+(y-g)\sin 15T\sin(\omega-F) \\ \qquad -(z-h)\cos(\omega-F) \\ \qquad =H+r\sin(\omega-\varphi-F), \\ (x-f)\cos\omega\sin(15T+G)-(y-g)\cos\omega\cos(15T+G) \\ \qquad +(z-h)\sin\omega\sin G \\ \qquad =K+r\cos(\omega-\varphi)\sin G; \end{cases}$$

und dienen unter dieser Form zur Bestimmung der Grössen $x-f$, $y-g$, $z-h$, aus denen sich dann auch leicht die Coordinaten x, y, z selbst ergeben.

Dass man sowohl bei dem Gebrauche der Gleichungen 16), als auch wenn man sich der Gleichungen 18) bedient, auf eine quadratische Gleichung geführt wird, und dass es also im Allgemeinen zwei Systeme von Werthen der Coordinaten x, y, z giebt, fällt auf der Stelle in die Augen, so wie denn auch in der That die einhüllende Kegelfläche von der von dem Beobachtungsorte nach der Wolke gezogenen geraden Linie im Allgemeinen jederzeit in zwei Punkten geschnitten wird. Dass der eine dieser beiden Punkte immer über, der andere unter dem Horizonte des Beobachtungsorts liegt, erhellet auf der Stelle durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung, und es ist uns also hierin zugleich ein Criterium gegeben, durch das entschieden werden kann, welches der beiden Systeme von Werthen der Coordinaten x, y, z für die Coordinaten der Wolke zu nehmen ist, da die beobachtete Wolke natürlich immer über dem Horizonte des Beobachtungsorts liegt. Um das in Rede stehende Criterium anwenden zu können, muss man mittelst der Formeln 12) aus den gefundenen Werthen der Coordinaten x, y, z die Coordinaten x_1, y_1, z_1 der Wolke in dem Systeme der $x_1y_1z_1$ berechnen, durch welche zugleich die Lage der Wolke gegen den Horizont und Meridian des Beobachters bestimmt wird. Immer aber hat man das System von Werthen der x, y, z und x_1, y_1, z_1 als die Coordinaten der Wolke zu betrachten, welchem ein positiver Werth von z_1 entspricht, wodurch man die Lage der Wolke im Raume immer mit völliger Sicherheit zu bestimmen im Stande ist.

Hat man x, y, z und x_1, y_1, z_1 gefunden, so kann man auch die Entfernungen R und R_1 der Wolke von dem Mittelpunkte der Erde und vom Beobachtungsorte mittelst der aus der analytischen Geometrie bekannten Formeln

$$19)\ R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

und

$$20)\ R_1=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$$

berechnen.

Die Berechnung von R kann man sich auf folgende Art erleichtern. Man setze, was offenbar verstattet ist, indem ξ und χ zwei Hülfswinkel bezeichnen,

$$23)\begin{cases}\mathfrak{A}=\cos 15T\sin(\omega-F)\\ \mathfrak{B}=\sin 15T\sin(\omega-F)\\ \mathfrak{C}=-\cos(\omega-F)\\ \mathfrak{D}=H+r\sin(\omega-\varphi-F)\end{cases}$$

und

$$24)\begin{cases}\mathfrak{A}'=\cos\omega\sin(15T+G)\\ \mathfrak{B}'=-\cos\omega\cos(15T+G)\\ \mathfrak{C}'=\sin\omega\sin' G\\ \mathfrak{D}'=K+r\cos(\omega-\varphi)\sin G.\end{cases}$$

Dann erhalten die Gleichungen 18) folgende Gestalt:

$$25)\begin{cases}E^2\{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2\}\cos C^2\\ \qquad\qquad=\{f(x-f)+g(y-g)+h(z-h)\}^2\\ \mathfrak{A}(x-f)+\mathfrak{B}(y-g)+\mathfrak{C}(z-h)=\mathfrak{D}\\ \mathfrak{A}'(x-f)+\mathfrak{B}'(y-g)+\mathfrak{C}'(z-h)=\mathfrak{D}'.\end{cases}$$

Setzen wir nun aber

$$26)\begin{cases}x-f=P\cos U\cos V\\ y-g=P\sin U\cos V\\ z-h=P\sin V\end{cases}$$

so nehmen die vorstehenden Gleichungen, wie man leicht findet, folgende Gestalt an:

$$27)\begin{cases}f\cos U\cos V+g\sin U\cos V+h\sin V=\pm E\cos C\\ (\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V)P=\mathfrak{D}\\ (\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V)P=\mathfrak{D}'\end{cases}$$

und aus diesen drei Gleichungen müssen die Grössen P, U, V bestimmt werden.

Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt

$$28)\begin{cases}P=\dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V},\\ P=\dfrac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V}.\end{cases}$$

Also ist

$$\frac{\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V}=\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}'},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$29)\begin{cases}\mathfrak{F}=\mathfrak{A}\mathfrak{D}'-\mathfrak{A}'\mathfrak{D}\\ \mathfrak{G}=\mathfrak{B}\mathfrak{D}'-\mathfrak{B}'\mathfrak{D}\\ \mathfrak{H}=\mathfrak{C}\mathfrak{D}'-\mathfrak{C}'\mathfrak{D}\end{cases}$$

setzen,

$$\mathfrak{F}\cos U\cos V+\mathfrak{G}\sin U\cos V+\mathfrak{H}\sin V=0;$$

und wir haben also jetzt zwischen den beiden Grössen U und V die zwei folgenden Gleichungen:

$$30)\begin{cases} f\cos U\cos V+g\sin U\cos V+h\sin V=\pm E\cos C, \\ \mathfrak{F}\cos U\cos V+\mathfrak{G}\sin U\cos V+\mathfrak{H}\sin V=0; \end{cases}$$

aus denen die beiden Grössen U und V bestimmt werden müssen. Hat man U und V, so findet man P mittelst einer der beiden Formeln 28).

Setzen wir der Kürze wegen

$$31)\ i=\pm E\cos C,$$

so werden die beiden vorhergehenden Gleichungen

$$32)\begin{cases} f\cos U\cos V+g\sin U\cos V+h\sin V=i, \\ \mathfrak{F}\cos U\cos V+\mathfrak{G}\sin U\cos V+\mathfrak{H}\sin V=0. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich auf der Stelle

$$\frac{f\cos U+g\sin U}{\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U}=-\frac{i-h\sin V}{\mathfrak{H}\sin V},$$

und hieraus

$$33)\ \sin V=-\frac{i(\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U)}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U}.$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen 32)

$$(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U\cos V+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U\cos V=i\mathfrak{H},$$

und hieraus

$$34)\ \cos V=\frac{i\mathfrak{H}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U}.$$

Durch Verbindung der Gleichungen 33) und 34) erhält man aber augenblicklich die bloss noch die eine unbekannte Grösse U enthaltende Gleichung

$$35)\quad i^2\{\mathfrak{H}^2+(\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U)^2\} \\ =\{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos U+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin U\}^2,$$

aus welcher also U bestimmt werden muss. Hat man aber U, so findet man V mittelst einer der beiden Gleichungen 33) und 34), oder besser mittelst der aus denselben sich unmittelbar ergebenden Gleichung

$$36)\ \tang V=-\frac{\mathfrak{F}\cos U+\mathfrak{G}\sin U}{\mathfrak{H}},$$

die man auch unter der für die Rechnung bequemeren Form

$$37)\ \tang V=-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}}\cos U-\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}\sin U$$

schreiben kann.

Vorzüglich kommt es nun auf die Bestimmung der Grösse U aus der Gleichung 35) an. Diese Gleichung bringt man leicht auf die Form

$$38)\quad 0 = i^2\mathfrak{H}^2$$
$$+\{i^2\mathfrak{F}^2 - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})^2\}\cos U^2$$
$$+\{i^2\mathfrak{G}^2 - (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})^2\}\sin U^2$$
$$+2\{i^2\mathfrak{F}\mathfrak{G} - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})(g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\}\sin U\cos U,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$39)\begin{cases} \mathfrak{K} = i^2\mathfrak{H}^2, \\ \mathfrak{L} = i^2\mathfrak{F}^2 - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})^2, \\ \mathfrak{M} = i^2\mathfrak{G}^2 - (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})^2, \\ \mathfrak{N} = i^2\mathfrak{F}\mathfrak{G} - (f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})(g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G}) \end{cases}$$

gesetzt wird, auf die Form

$$40)\quad \mathfrak{K} + \mathfrak{L}\cos U^2 + \mathfrak{M}\sin U^2 + 2\mathfrak{N}\sin U\cos U = 0.$$

Bekanntlich ist aber

$$\cos U^2 = \frac{1+\cos 2U}{2},$$

$$\sin U^2 = \frac{1-\cos 2U}{2},$$

$$2\sin U\cos U = \sin 2U;$$

und die obige Gleichung kann daher auf die Form

$$41)\quad 2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M} + (\mathfrak{L} - \mathfrak{M})\cos 2U + 2\mathfrak{N}\sin 2U = 0$$

gebracht werden. Um aus dieser Gleichung U zu bestimmen, berechne man den Hülfswinkel W mittelst der Formel

$$42)\quad \tang W = \frac{\mathfrak{L} - \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}},$$

so ist nach 41)

$$\frac{2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}} + \tang W\cos 2U + \sin 2U = 0,$$

d. i.

$$\frac{2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}} + \frac{\sin(W + 2U)}{\cos W} = 0,$$

und folglich

$$43)\quad \sin(W + 2U) = -\frac{2\mathfrak{K} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}}\cos W,$$

mittelst welcher Formel U gefunden werden kann, so dass also jetzt unsere Aufgabe als vollständig aufgelöst zu betrachten ist, obgleich über dieselbe noch verschiedene Bemerkungen zu machen sind, auf welche wir jedoch erst weiter unten kommen werden.

§. 7.

Zunächst kommt es jetzt, wobei §. 4. zu vergleichen ist, noch darauf an, dass wir zeigen, wie aus der gegebenen Polhöhe ω des Beobachtungsorts dessen geocentrische Breite φ, oder umgekehrt aus der geocentrischen Breite φ die Polhöhe ω, und wie sodann

also

$$50)\ \operatorname{tang}\varphi=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\omega,\ \operatorname{tang}\omega=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}\varphi;$$

oder, wenn man die sogenannte Abplattung

$$\frac{a-b}{a}=n,\ \text{also}\ \frac{b}{a}=1-n$$

setzt,

$$51)\ \operatorname{tang}\varphi=(1-n)^2\operatorname{tang}\omega,\ \operatorname{tang}\omega=\frac{\operatorname{tang}\varphi}{(1-n)^2}.$$

Der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdradius r kann nun aber auf folgende Art gefunden werden. Weil nach 47)

$$Y=X\operatorname{tang}\varphi$$

ist, so ist nach 44)

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{X\operatorname{tang}\varphi}{b}\right)^2=1,$$

und folglich

$$X^2=\frac{a^2b^2}{a^2\operatorname{tang}\varphi^2+b^2}\ \text{oder}\ X^2=\frac{a^2b^2\cos\varphi^2}{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}.$$

Nun ist aber

$$r^2=X^2+Y^2=X^2(1+\operatorname{tang}\varphi^2)=X^2\sec\varphi^2.$$

Also ist

$$52)\ r^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2},\ r=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}}.$$

Auch ist

$$r^2=\frac{a^2}{\cos\varphi^2+\frac{a^2}{b^2}\sin\varphi^2}.$$

Nach 49) ist aber

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\varphi}=\frac{\sin\omega\cos\varphi}{\cos\omega\sin\varphi},$$

und folglich

$$\cos\varphi^2+\frac{a^2}{b^2}\sin\varphi^2=\frac{\cos\varphi}{\cos\omega}(\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi),$$

d. i.

$$\cos\varphi^2+\frac{a^2}{b^2}\sin\varphi^2=\frac{\cos\varphi}{\cos\omega}\cos(\omega-\varphi).$$

Also ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$53)\ r=a\sqrt{\frac{\cos\omega}{\cos(\omega-\varphi)\cos\varphi}},$$

mittelst welcher Formel der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdhalbmesser r immer sehr leicht mit Hülfe der Logarithmen aus

Hätte man in Folge der Einrichtung der Ephemeriden aus denselben nicht die Entfernung ϱ der Sonne von dem Mittelpunkte der Erde, sondern die sogenannte Horizontalparallaxe Π der Sonne unter dem Aequator genommen, so wäre

$$\sin \Pi = \frac{a}{\varrho}, \text{ also } \varrho = \frac{a}{\sin \Pi},$$

und folglich der Hülfswinkel Θ mittelst der Formel

$$\sin \Theta = \frac{r}{a} \sin \Pi$$

zu berechnen.

Nun berechne man zunächst die Coordinaten f, g, h mittelst der Formeln

$$f = -E \cos \alpha \cos \delta,$$
$$g = -E \sin \alpha \cos \delta,$$
$$h = -E \sin \delta;$$

und die Hülfswinkel F und G mittelst der Formeln

$$\tang F = \cos \lambda \cot \mu,$$
$$\tang G = \cos \omega \sin \lambda \cot \mu.$$

Dann suche man die Hülfsgrössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{A} = \cos 15T \sin (\omega - F),$$
$$\mathfrak{B} = \sin 15T \sin (\omega - F),$$
$$\mathfrak{C} = -\cos (\omega - F),$$
$$\mathfrak{E} = \sin (\omega - \varphi - F);$$

und die Hülfsgrössen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{E}'$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{A}' = \cos \omega \sin (15T + G),$$
$$\mathfrak{B}' = -\cos \omega \cos (15T + G),$$
$$\mathfrak{C}' = \sin \omega \sin G,$$
$$\mathfrak{E}' = \cos (\omega - \varphi) \sin G;$$

hierauf die Hülfsgrössen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{D} = -f\mathfrak{A} - g\mathfrak{B} - h\mathfrak{C} + r\mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{D}' = -f\mathfrak{A}' - g\mathfrak{B}' - h\mathfrak{C}' + r\mathfrak{E}';$$

dann die Hülfsgrössen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}'\mathfrak{D},$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}' - \mathfrak{C}'\mathfrak{D};$$

woraus man mittelst der Hülfsgrösse

$$i = \pm E \cos C$$

ferner die Grössen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ mittelst der Formeln

$$\mathfrak{K}=i^2\mathfrak{H}^2,$$
$$\mathfrak{L}=i^2\mathfrak{F}^2-(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})^2,$$
$$\mathfrak{M}=i^2\mathfrak{G}^2-(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})^2,$$
$$\mathfrak{N}=i^2\mathfrak{F}\mathfrak{G}-(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})$$

findet, hierbei aber zu bemerken hat, dass jede der Grössen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, wenn auch i zwei Werthe hat, doch nur einen Werth hat, weil in den vorhergehenden Formeln nur i^2 vorkommt.

Hierauf sucht man den Hülfswinkel W mittelst der Formel

$$\tan W=\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}},$$

und dann U mittelst der Formel

$$\sin(W+2U)=-\frac{2\mathfrak{K}+\mathfrak{L}+\mathfrak{M}}{2\mathfrak{N}}\cos W.$$

Bezeichnet nun Ω den Werth von $W+2U$, welcher, absolut genommen, am kleinsten ist, so ist bekanntlich entweder

$$W+2U=\Omega+2k\pi,$$

oder

$$W+2U=(2k+1)\pi-\Omega,$$

wo k jede positive oder negative ganze Zahl bezeichnen kann, und folglich entweder

$$2U=\Omega-W+2k\pi$$

oder

$$2U=(2k+1)\pi-(\Omega+W);$$

also entweder

$$U=\tfrac{1}{2}(\Omega-W)+k\pi$$

oder

$$U=\tfrac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+k\pi.$$

Folglich ist entweder

$$\sin U=(-1)^k\sin\tfrac{1}{2}(\Omega-W),$$
$$\cos U=(-1)^k\cos\tfrac{1}{2}(\Omega-W)$$

oder

$$\sin U=(-1)^k\sin\tfrac{1}{2}(\pi-\Omega-W),$$
$$\cos U=(-1)^k\cos\tfrac{1}{2}(\pi-\Omega-W);$$

also nach dem Obigen entweder

$$\sin V=-\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\tfrac{1}{2}(\Omega-W)+\mathfrak{G}\sin\tfrac{1}{2}(\Omega-W)\}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\tfrac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\tfrac{1}{2}(\Omega-W)},$$

$$\cos V=(-1)^k\cdot\frac{i\mathfrak{H}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\tfrac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\tfrac{1}{2}(\Omega-W)}$$

oder

$$\sin V = -\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+\mathfrak{G}\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)\}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)},$$

$$\cos V = (-1)^k\,.\,\frac{i\mathfrak{H}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}.$$

folglich ist entweder

$$\cos U\cos V = \frac{i\mathfrak{H}\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)},$$

$$\sin U\cos V = \frac{i\mathfrak{H}\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)},$$

$$\sin V = -\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+\mathfrak{G}\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)\}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\Omega-W)}$$

oder

$$\cos U\cos V = \frac{i\mathfrak{H}\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)},$$

$$\sin U\cos V = \frac{i\mathfrak{H}\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)},$$

$$\sin V = -\frac{i\{\mathfrak{F}\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+\mathfrak{G}\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)\}}{(f\mathfrak{H}-h\mathfrak{F})\cos\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)+(g\mathfrak{H}-h\mathfrak{G})\sin\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)}.$$

Denkt man sich nun diese Ausdrücke in die aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von P, nämlich in

$$P = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\cos U\cos V+\mathfrak{B}\sin U\cos V+\mathfrak{C}\sin V}$$

$$P = \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V+\mathfrak{B}'\sin U\cos V+\mathfrak{C}'\sin V}$$

eingeführt, und dann die Producte

$$P\cos U\cos V,\ P\sin U\cos V,\ P\sin V,$$

als die Werthe von

$$x-f,\ y-g,\ z-h$$

entwickelt, so ist klar, dass die Grösse i ganz aus der Rechnung herausfällt, und man daher für jede der Differenzen

$$x-f,\ y-g,\ z-h$$

nicht, wie es nach dem Obigen scheinen könnte, vier, sondern bloss zwei Werthe erhält. Zugleich erhellet aber auch aus dem Bisherigen mit völliger Deutlichkeit, dass man für U bloss die beiden Werthe $\frac{1}{2}(\Omega-W)$ und $\frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)$, oder dass man bloss

$$U = \begin{cases}\frac{1}{2}(\Omega-W)\\ \frac{1}{2}(\pi-\Omega-W)\end{cases}$$

zu setzen braucht.

Hat man U, so findet man V am leichtesten mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$\tang V = -\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}}\cos U-\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}\sin U.$$

Ist Ψ der Werth von V, welcher, absolut genommen, am kleinsten ist, so ist bekanntlich allgemein

$$V = \Psi + k\pi,$$

wo k jede positive oder negative ganze Zahl sein kann, und folglich

$$\sin V = (-1)^k \sin \Psi, \quad \cos V = (-1)^k \cos \Psi;$$

woraus man sieht, dass die, geraden und ungeraden Werthen von k entsprechenden Werthe von $\sin V$ und $\cos V$ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ob man nun für k eine gerade oder ungerade, übrigens an sich willkührliche, ganze Zahl setzen muss, ist nach den Vorzeichen zu beurtheilen, welche $\sin V$ und $\cos V$ zufolge der aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\sin V = -\frac{i(\mathfrak{F}\cos U + \mathfrak{G}\sin U)}{(f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})\cos U + (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\sin U},$$

$$\cos V = \frac{i\mathfrak{H}}{(f\mathfrak{H} - h\mathfrak{F})\cos U + (g\mathfrak{H} - h\mathfrak{G})\sin U}$$

haben müssen. Weil man aber nach dem Vorhergehenden bekanntlich sowohl $i = E\cos C$, als auch $i = -E\cos C$ setzen kann, es aber auch ganz gleichgültig ist, welches von beiden man thut, da i am Ende aus der Rechnung ganz herausfällt, so kann man offenbar immer

$$V = \Psi$$

setzen.

Hat man auf diese Weise auch V gefunden, so berechne man P mittelst einer der beiden Formeln

$$P = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\cos U\cos V + \mathfrak{B}\sin U\cos V + \mathfrak{C}\sin V},$$

$$P = \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{A}'\cos U\cos V + \mathfrak{B}'\sin U\cos V + \mathfrak{C}'\sin V};$$

und hierauf die Differenzen $x-f$, $y-g$, $z-h$ mittelst der Formeln

$$x - f = P\cos U\cos V,$$
$$y - g = P\sin U\cos V,$$
$$z - h = P\sin V;$$

oder die Coordinaten x, y, z mittelst der Formeln

$$x = f + P\cos U\cos V,$$
$$y = g + P\sin U\cos V,$$
$$z = h + P\sin V.$$

Dann berechne man x_1, y_1, z_1 mittelst der Formeln

$$x_1 = -r\sin(\omega - \varphi) + x\sin\omega\cos 15T + y\sin\omega\sin 15T - z\cos\omega$$
$$y_1 = -x\sin 15T + y\cos 15T,$$
$$z_1 = -r\cos(\omega - \varphi) + x\cos\omega\cos 15T + y\cos\omega\sin 15T + z\sin\omega$$

und behalte bloss dasjenige der beiden Systeme von x, y, z und x_2, y_2, z_2 bei, welchem ein positiver Werth von z_2 entspricht.

Nun berechne man endlich noch R und R_2 mittelst der Formeln

$$\tang \xi = \frac{y}{x};$$

$$\tang \chi = \frac{z}{x} \cos \xi,\ \tang \chi = \frac{z}{y} \sin \xi;$$

$$R = \frac{x}{\cos \xi \cos \chi},\ R = \frac{y}{\sin \xi \cos \chi},\ R = \frac{z}{\sin \chi}.$$

und

$$\tang \xi_2 = \frac{y_2}{x_2};$$

$$\tang \chi_2 = \frac{z_2}{x_2} \cos \xi_2,\ \tang \chi_2 = \frac{z_2}{y_2} \sin \xi_2;$$

$$R_2 = \frac{x_2}{\cos \xi_2 \cos \chi_2},\ R_2 = \frac{y_2}{\sin \xi_2 \cos \chi_2},\ R_2 = \frac{z_2}{\sin \chi_2}.$$

Auf diese Weise ist nun die Lage der Wolke im Raume vollkommen bestimmt.

§. 9.

Will man die gemessene Höhe der Wolke von der Strahlenbrechung befreien, so muss man, wie hier aus der Lehre von der terrestrischen Refraction, die doch *) bei unserm Problem jedenfalls in Anwendung zu bringen ist, als bekannt vorausgesetzt werden kann, die horizontale Entfernung der Wolke von dem Beobachtungsorte wenigstens näherungsweise kennen. Um daher im Stande zu sein, die Refraction in Rechnung zu bringen, kann man nur so verfahren, das man nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Anleitung zuerst mit der uncorrigirten Höhe der Wolke deren Coordinaten x_2, y_2, z_2 berechnet, und daraus die horizontale Entfernung

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_2^2\left(1 + \frac{y_2^2}{x_2^2}\right)} = \sqrt{x_2^2(1 + \tang \xi_2^2)}$$

$$= \sqrt{x_2^2 \sec \xi_2^2} = \pm \frac{x_2}{\cos \xi_2},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der Bruch $\frac{x_2}{\cos \xi_2}$ eine positive oder eine negative Grösse ist, der Wolke von dem Beobachtungsorte herleitet, dann die gemessene Höhe auf die aus der Geodäsie hinreichend bekannte Weise mit Hülfe des bekannten Coefficienten der terrestrischen Refraction wegen der Strahlenbrechung corrigirt, und hierauf nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Anleitung mit der corrigirten Höhe der Wolke deren Coordinaten von Neuem berechnet, wobei wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, dass man dieses Verfahren nach der bekannten Methode der successiven Näherungen beliebig oft wiederholen oder beliebig weit fortsetzen kann.

*) Nicht die astronomische Refraction.

$$\left.\begin{array}{l}
z - z_1 = -\frac{c}{b}(y-y_1) - \frac{c}{a}(x-x_1) \\
z - z_2 = -\frac{c}{b}(y-y_2) - \frac{c}{a}(x-x_2) \\
z - z_3 = \quad \frac{c}{b}(y-y_3) - \frac{c}{a}(x-x_3) \\
z - z_4 = \quad \frac{c}{b}(y-y_4) - \frac{c}{a}(x-x_4) \\
z - z_5 = \quad \frac{c}{b}(y-y_5) + \frac{c}{a}(x-x_5) \\
z - z_6 = \quad \frac{c}{b}(y-y_6) + \frac{c}{a}(x-x_6) \\
z - z_7 = -\frac{c}{b}(y-y_7) + \frac{c}{a}(x-x_7) \\
z - z_8 = -\frac{c}{b}(y-y_8) + \frac{c}{a}(x-x_8)
\end{array}\right\} \ldots . 9)$$

Aus diesen folgt aber, dass:

$$\left.\begin{array}{lll}
x_1 = -x_2, & y_1 = -y_2, & z_1 = -z_2; \\
x_1 = \quad x_3, & y_1 = -y_3, & z_1 = \quad z_3; \\
x_1 = -x_4, & y_1 = \quad y_4, & z_1 = -z_4; \\
x_1 = -x_5, & y_1 = -y_5, & z_1 = \quad z_5; \\
x_1 = \quad x_6, & y_1 = \quad y_6, & z_1 = -z_6; \\
x_1 = -x_7, & y_1 = -y_7, & z_1 = \quad z_7; \\
x_1 = \quad x_8, & y_1 = -y_8, & z_1 = -z_8.
\end{array}\right\} \ldots . 10)$$

Schon aus diesen Gleichungen zwischen den Coordinaten der Berührungspunkte können wir schliessen, dass der Mittelpunkt des Ellipsoids im Coordinaten-Anfang O liegt; wir wollen jedoch dieses genau auf rein analytischem Wege nachweisen.

Es sei nämlich:

$$\left.\begin{array}{r}
Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz \\
+ 2A''z + 2B''y + 2C''x - D = 0
\end{array}\right\} \ldots . 11)$$

die Gleichung des gesuchten Ellipsoids, so ist die Gleichung der Ebene welche diese Fläche berührt:

$$z - Z' = (x - X')\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y - Y')\left(\frac{dz}{dy}\right) \ldots . 12)$$

wo X', Y', Z' die Coordinaten des Berührungspunktes sind. Wir finden aber

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{Cx + A'y + B'z + C''}{Az + B'x + C'y + A''}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{By + A'x + C'z + B''}{Az + B'x + C'y + A''}.$$

Soll nun die erste der Ebenen in 9. (also die Ebene ABE) das Ellipsoid im Punkte x_1, y_1, z_1 berühren, so muss jene Gleichung mit der in 12. identisch sein, wenn wir in diese die soeben ge-

Addiren wir die beiden letztern Gleichungen, so erhalten wir:

$$C'c - A'a = 0 \text{ also } C'c = A'a \quad \ldots . \; 29)$$

Dadurch ist aber auch:

$$(Ac - B'a)z_1 = -(B'c - Ca)x_1 \quad \ldots . \; 30)$$

Ferner folgt aus 21. und 23.

$$(Ac + C'b)z_1 = (B'c + A'b)x_1 + (C'c + Bb)y_1 \quad \ldots . \; 31)$$

und aus 17. ist:

$$(Ac + C'b)z_1 = -(B'c + A'b)x_1 + (C'c + Bb)y_1 \quad \ldots . \; 32)$$

also

$$(Ac + C'b)z_1 = (C'c + Bb)y_1 \quad \ldots . \; 33)$$

Eben so finden wir aus 22. 24. 26.

$$(Ac + B'a)z_1 = (B'c + Ca)x_1 \quad \ldots . \; 34)$$

Addiren wir die Gleichungen 30. und 34. so ist

$$Acz_1 = Cax_1 \quad \ldots . \; 35)$$

Subtrahiren wir aber 30. und 34. voneinander, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} B'az_1 = B'cx_1 \text{ oder} \\ az_1 = cx_1 \end{array}\right\} \ldots . \; 36)$$

Auf ähnliche Art finden wir aus 22. 24. 26.

$$(C'c + A'a)y_1 = 0 \text{ oder } C'c = -A'a \quad \ldots . \; 37)$$

Wir bemerkten aber, dass die Gleichungen 29. 36. und 37. und die, welche wir aus 1. erhalten, wenn wir statt x, y, z die Coordinaten x_1, y_1, z_1 setzen, nemlich $z_1 = c - \frac{cy_1}{b} - \frac{cx_1}{a}$, nur alsdann zugleich bestehen können, wenn wir

$$A' = 0, \; C' = 0, \; B' = 0 \quad \ldots . \; 38)$$

setzen. Führen wir die gefundenen Werthe von A', B', C'; A'', B'', C'' in irgend zwei der Gleichungen 13. 14. und 15. u. s. w. ein, so erhalten wir:

$$y_1 = \frac{Ac}{Bb} z_1, \; x_1 = \frac{Ac}{Ca} z_1 \quad \ldots . \; 39)$$

Die Gleichung 11. erhält also die Form:

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 - D = 0 \quad \ldots . \; 40)$$

Aus 39. und der Gleichung $z_1 = c - \frac{cy_1}{b} - \frac{cx_1}{a}$ erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{a^2b^2cBC}{a^2b^2BC + a^2c^2AC + b^2c^2AB}, \\ y_1 = \dfrac{a^2c^2bAC}{a^2b^2BC + a^2c^2AC + b^2c^2AB}, \\ x_1 = \dfrac{b^2c^2aAB}{a^2b^2BC + a^2c^2AC + b^2c^2AB} \end{array}\right\} \ldots . \; 41)$$

Da der Punkt (x_1, y_1, z_1) ebenfalls auf der Oberfläche des Ellip-

$$4a^2b^2utv + 4b^2c^2tv + a^2c^2uv - 3a^2b^2c^2ut = 0,$$
$$4a^2b^2utv + 4a^2c^2uv + b^2c^2tv - 3a^2b^2c^2ut = 0.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhalten wir:

$$u = \frac{b^2}{a^2}t; \text{ also: } v = \frac{4b^2c^2t}{4b^2t + 5c^2} \quad \ldots 48)$$

Diese Werthe von u und v, in 43. substituirt, geben:

$$t = \frac{c^2}{b^2}, \text{ also } u = \frac{c^2}{a^2}, \; v = \frac{c^2}{3};$$

mithin wird die Gleichung 40. zu:

$$\left(\frac{z\sqrt{3}}{c}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{b}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{a}\right)^2 = 1 \quad \ldots 49)$$

Es sind daher $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$ diejenigen drei zugeordneten Durchmesser des Ellipsoids, welche mit den drei Durchmessern AC, BD und EF des rhombischen Octaeders zusammenfallen.

Endlich finden wir die Coordinaten der Berührungspunkte, indem wir jede der Gleichungen 41. im Zähler und Nenner mit $\frac{D}{ABC}$ vervielfachen, alsdann statt $\frac{D}{A}, \frac{D}{B}, \frac{D}{C}$ die gefundenen Werthe $\frac{c^2}{3}, \frac{b^2}{3}, \frac{a^2}{3}$ setzen, wodurch wir:

$$x_1 = \frac{a}{3}, \; y_1 = \frac{b}{3}, \; z_1 = \frac{c}{3};$$
$$x_2 = -\frac{a}{3}, \; y_2 = -\frac{b}{3}, \; z_2 = -\frac{c}{3};$$
$$x_3 = \frac{a}{3}, \; y_3 = -\frac{b}{3}, \; z_3 = \frac{c}{3};$$
$$x_4 = -\frac{a}{3}, \; y_4 = \frac{b}{3}, \; z_4 = -\frac{c}{3};$$
$$x_5 = -\frac{a}{3}, \; y_5 = -\frac{b}{3}, \; z_5 = \frac{c}{3};$$
$$x_6 = \frac{a}{3}, \; y_6 = \frac{b}{3}, \; z_6 = -\frac{c}{3};$$
$$x_7 = -\frac{a}{3}, \; y_7 = \frac{b}{3}, \; z_7 = \frac{c}{3};$$
$$x_8 = \frac{a}{3}, \; y_8 = -\frac{b}{3}, \; z_8 = -\frac{c}{3};$$

erhalten.

II.

Es ist ein Parallelepiped gegeben: man soll das kleinste Ellipsoid um dasselbe beschreiben.

Wir nehmen die drei in einer Ecke F (Taf. V. Fig. 2.) des Parallelepipeds zusammenstossenden Kanten FI, FH und FP als die Axen der x, y, z; die Grössen dieser Kanten selbst seien

Ganz wie so eben finden wir mittelst der Punkte A und L, deren Coordinaten $x=a$, $y=b$, $z=c$ und $x=a$, $y=b$, $z=0$ sind, den Werth von $A'=0$, so dass sich also die Gleichung 4. auf:

$$Ax^2+By^2+Cx^2-Acz-Bby-Cax=0 \ldots . 5)$$

reducirt.

Verlegen wir jetzt den Coordinaten-Anfang in den Mittelpunkt O des Parallelepipeds, und nehmen x', y', z' für die neuen Coordinaten an, so dass also $x=\frac{a}{2}+x'$, $y=\frac{b}{2}+y'$, $z=\frac{c}{2}+z'$ ist, so wird die Gleichung 5) zu:

$$A'z^2+B'y^2+C'x^2-\frac{Ac^2}{4}-\frac{Bb^2}{4}-\frac{Ca^2}{4}=0 \ldots . 6)$$

Setzen wir $\frac{B}{A}=t$, $\frac{C}{A}=u$, also $\frac{B}{C}=\frac{t}{u}$, und lassen die Accente weg, so ist:

$$\left.\begin{aligned} z^2+ty^2+ux^2 &= \frac{c^2}{4}+\frac{tb^2}{4}+\frac{ua^2}{4} \text{ oder} \\ z^2+t(y^2-\frac{b^2}{4})+u(x^2-\frac{a^2}{4}) &= \frac{c^2}{4} \end{aligned}\right\} \ldots . 7)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir, wenn wir zuerst $x=0$ und $y=0$, alsdann $x=0$ und $z=0$, und endlich $y=0$ und $z=0$ annehmen:

$$z=\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+b^2t+a^2u},\ y=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{t}(c^2+b^2t+a^2u)},$$

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{u}(c^2+b^2t+a^2u)}.$$

Dieses sind die Grössen der drei halben Durchmesser des Ellipsoids, die durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds gehen, und mit den drei in F zusammenstossenden Kanten desselben parallel sind. Bezeichnen wir wie in I. die drei Achsen des Ellipsoids mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so haben wir:

$$\text{Min.}=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1}{ut}(c^2+b^2t+a^2u)^3.(1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)},$$

und wenn wir $k=1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ setzen:

$$\text{Minim.}=\frac{\pi k}{6}\sqrt{\frac{(c^2+b^2t+a^2u)^3}{ut}} \ldots . 8)$$

Differentiiren wir zuerst nach t, alsdann nach u, und setzen die Differentialquotienten gleich Null, so erhalten wir:

$$\frac{(2b^2t-c^2-a^2u)\sqrt{c^2+b^2t+a^2u}}{2t\sqrt{ut}}=0 \ldots . 9)$$

$$\frac{(2a^2u-c^2-b^2t)\sqrt{c^2+b^2t+a^2u}}{2u\sqrt{ut}}=0 \ldots . 10)$$

Diesen Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn:

Multipliciren wir die Gleichung 4. mit dx, und integriren sodann, so erhalten wir:

$$\int y dx = -\frac{Bx^2+2Dx}{4A} \pm \frac{\{D^2+B(Bc+2D)x\}^{\frac{3}{2}}}{3AB(Bc+2D)} + \text{Const.} \quad \ldots . 5)$$

Da das Integral für $x=0$ verschwinden muss, so wird

$$\text{Const.} = \mp \frac{D^3}{3AB(Bc+2D)}.$$

Setzen wir in 5. die Grösse $x=c$ und fügen die Constante bei, so ist die parabolische Fläche

$$ACB = \mp \frac{D^3}{3AB(Bc+2D)} - \frac{Bc^2+2Dc}{4A} \pm \frac{\{D^2+B(Bc+2D)c\}^{\frac{3}{2}}}{3AB(Bc+2D)};$$

oder, wenn wir die obern Zeichen beibehalten, so erhalten wir den Inhalt der parabolischen Fläche

$$ACB = \frac{B^2c^3}{12A(Bc+2D)}.$$

Setzen wir in dem Nenner statt $Bc+2D$ seinen oben gefundenen Werth, so ist, wenn wir den parabolischen Raum ABC durch P bezeichnen:

$$P = \frac{B^2hc^3}{6(2Ah+Ba)\ (Bc-Ba-2Ah)} \text{ oder}$$

$$P = \frac{hc^3}{6(2\frac{A}{B}h+a)\ (c-a-2\frac{A}{B}h)}.$$

Die Grösse $\frac{A}{B}$ ist noch unbestimmt. Setzen wir dieselbe $=z$, so ist:

$$P = \frac{hc^3}{6(2hz+a)\ (c-a-2hz)}.$$

Wird dieser Ausdruck nach z differentiirt, und das Differential $\frac{dP}{dz}=0$ gesetzt, so kann das Maximum oder Minimum desselben bestimmt werden.

Es ist aber

$$\log n\ P = \log n\ hc^3 - \log n\ 6 - \log n\ (2hz+a) - \log n\ (c-a-2hz),$$

mithin

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{2h}{2hz+a} + \frac{2h}{c-a-2hz} = 0$$

folglich

$$z = \frac{c-2a}{4h} = \frac{A}{B}, \text{ also } B = \frac{4Ah}{c-2a}.$$

Werden nun die gefundenen Werthe von B, C, D, E, F in der Gleichung 1. substituirt, so ist folgende die Gleichung der gesuchten Parabel:

$$(c-2a)y^2 + 4hxy + \frac{4h^2x^2}{c-2a} + \frac{hc(4a-c)y}{c-2a} - \frac{4h^2cx}{c-2a} = 0 \quad \ldots . 6)$$

XXXIII.

Prüfungs-Aufgaben, die in Cambridge den Candidaten des Baccalaureates gegeben worden sind *). Aus dem Englischen übersetzt und mit Bemerkungen begleitet

von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

Nr. 1. 1834.

(A.)

1. Reducire 36 L. 7 sl. $8\frac{1}{2}$ d. in Farthings.
2. Dividire 19 L. 16 sl. $10\frac{1}{2}$ d. durch 46 .... Antw. 8 sl. $7\frac{1}{2}$ d. $\frac{3}{23}$ **).
3. Welchen Preis haben 5 Ctr. 3 Qrt. 18 Pfd. zu 3 sl. 6 d. per Pfd.?
4. Beweise dass $\frac{5}{9}$ dividirt durch 7 ist $\frac{5}{63}$:
5. Multiplicire 2,83 mit 0,013 und beweise die Richtigkeit des Produktes.
6. Verwandle 15 sl. $4\frac{3}{4}$ d. in $\frac{1}{10}$ des Pfundes, und finde den Werth von 0,4786 Tagen in Stunden, Minuten und Secunden.
7. Ziehe die Quadratwurzel aus 2209. Beweise die Regel für die Bestimmung der Anzahl von Stellen in der Wurzel.
8. Welche Länge muss ein Teppich haben der $\frac{3}{4}$ Yard breit ist und ein Zimmer von $6\frac{1}{2}$ *yds* lang und $5\frac{1}{4}$ breit bedecken soll?

---

*) Nicht wegen der Aufgaben an sich, sondern um zu zeigen, wie auf den englischen, so manche bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit darbietenden Lehranstalten die mathematischen Prüfungen gehandhabt werden, habe ich die folgenden Aufgaben nebst den höchst einsichtsvollen Bemerkungen des Herrn Uebersetzers zu denselben hier abdrucken lassen, welchem letztern die Leser des Archivs sich mit mir für diese in pädagogischer Rücksicht so interessante Mittheilung gewiss zu dem aufrichtigsten Danke verpflichtet fühlen werden.

Der Herausgeber.

**) Die Antwort musste heissen 8 sl. $7\frac{49}{92}$ d.; aber die Engländer rechnen nach Farthings, drücken übrigens dieselben als $\frac{1}{4}$ von ihren Pfennigen (pence) aus, geschrieben d (das Normännische deniers) danach sind $\frac{49}{92}$ Pf. $= \frac{49}{23}$ f. $= \frac{1}{2}$ d. $\frac{3}{23}$. M.

9. Was betragen die einfachen Zinsen von 63 L. 15 sl. 7 d. in $1\frac{1}{4}$ Jahr zu $4\frac{1}{2}$ Proc.; und wie viel ist der Betrag zusammengesetzter Zinsen von 540 L. in 3 Jahren zu 4 Proc.? Antw. 3 L. 11 sl. $8\frac{3}{4}$ .... 607 L. 8 sl. $6\frac{1}{4}$ d. *)

10. Wenn 7 Mann 6 Acker in 12 Stunden ärndten können, wieviel werden 15 Acker in 14 Stunden ärndten?

11. Suche das grösste gemeinschaftliche Maass für die Bruchsglieder von $\frac{x^3-9x^2+23x-15}{x^2-8x+7}$ und bringe den Bruch auf seine kleinsten Glieder.

12. Löse folgende Gleichungen:

$$(1) \ldots \frac{x}{2}+\frac{x}{3}=26-\frac{x}{4}$$

$$(2) \ldots \frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}$$

$$(3) \ldots \frac{2x+3y}{6}-\frac{x}{3}=1,$$

$$\frac{7y-3x}{2}+10y=9$$

$$(4) \ldots x+y-z=8$$

$$2x-y+3z=21$$

$$4z+3y-2x=17$$

13. Beweise die Regel für die Ergänzung des Quadrates bei der Auflösung quadratischer Gleichungen, und löse

$$(1) \ldots 4x^2-3x=85$$

$$(2) \ldots \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x-\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{m}{n} \text{ **)}.$$

---

*) 3 L. 11 sl. 9,01875 d. und 607 L. 8 sl. 6,3744 d. M.

**) Schreibt man zuvor $\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{y-\sqrt{y^2-a^2}}=b$, was nur einfacher, sonst ab[illegible] dasselbe ist, so wird $\frac{y^2+y^2-a^2+2y\sqrt{y^2-a^2}}{a^2}=b$,

$$2y\sqrt{y^2-a^2}=a^2b+a^2-2y^2=a^2(b+1)-2y^2,$$

$$4y^2y^2-4y^2a^2=a^4(b+1)^2+4y^4-4a^2(b+1)y^2.$$

Da sich $4y^4$ und dann a^2 als Factor hebt, so wird $(4(b+1)-4$[illegible]$=4by^2=a^2(b+1)^2$,

$$y=\pm\frac{a(b+1)}{2\sqrt{b}}$$

$$a+x=a\frac{\pm\frac{m+n}{n}}{2\sqrt{\frac{mn}{n^2}}}=a.\frac{\pm(m+n)}{2\sqrt{mn}}$$

$$x=a(\frac{\pm(m+n)}{2\sqrt{mn}}-1)$$

14. Zeige dass $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$ Grössen sind, die in arithmetischer Progression stehen, und bestimme die Summe von 8 Gliedern der Reihe, von welcher sie die drei ersten sind.

Suche auch die Summe von n Gliedern der Reihe $\frac{a}{r} - \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} - \dots$ In welchem Falle wird eine unendliche Menge von Gliedern der letzten Reihe endlich sein?

15. Beweise die Regeln, durch welche die Anzahl von Permutationen und Combinationen von n Dingen, die 3 und 3 zusammengenommen werden, zu finden ist.

Wenn das Gesetz für den Ausdruck der Permutation von Dingen, die zu r und r zusammengenommen werden, zugegeben wird, zu beweisen, dass es auch richtig ist, wenn man sie zu $r+1$ und $r+1$ zusammen nimmt.

16. Wenn $a : b = c : d = e : f$ beweise dass $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$

und $a : b = a + c + e : b + d + f$

17. Suche den Werth von 1 L. das 100 Jahr zu 4 Proc. Zins von Zins getragen hat.

Gegeben ist $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$

und $\log 1{,}482 = 0{,}70333$

18. Gieb das $(\frac{n}{2})$te Glied von $(a - x)^n$ wenn $\frac{n}{2}$ unpaar ist.

Nr. 2. 1834.

(B.)

1. Reducire 125 Yard 2′ 4″ zu Zollen.
2. Beweise dass $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{7}$ so viel als $\frac{12}{35}$ sind.
3. Theile 3 L. 15 sl. $5\frac{1}{2}$ d. durch 23. Antw. 3 sl. $3\frac{1}{4}$ d. $\frac{11}{23}$. Vergleiche die Anm. zu 2. in der vorigen Aufgabenreihe.
4. Suche den Lohn von 6 Arbeitern für $28\frac{1}{2}$ Tag wenn 2 sl. 3 d. täglich bezahlt werden.

$$x'' = a\left(\frac{-(m+n)}{2\sqrt{mn}} - 1\right) = -a\left(\frac{m+n}{2\sqrt{mn}} + 1\right)$$

$$x' = a\frac{(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}}$$

$$x'' = -a\frac{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}}$$

Im Original ist angegeben:

$$x = \frac{a(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2}{2\sqrt{mn}}$$

was offenbar fehlerhaft ist: denn die kleinere Wurzel wird positiv, die grössere negativ, und beide können nicht einerlei Zeichen erhalten. M.

5. Multiplicire 36,2 mit 4,57 und beweise die Richtigkeit des Productes.

6. Verwandle 15^h 4^m 64 in Zehnteltage; und finde den Werth von 5,734 L.

7. Suche die Interessen von 963 L. 10 sl. 6 d. für $\frac{3}{4}$ Jahr zu $3\frac{1}{2}$ Proc. Suche gleichfalls den Betrag von 130 L. in 3 Jahren zu 5 Proc. in Zins von Zins.

8. Ziehe die Quadratwurzel aus 167281. Beweise die Regel die Anzahl der Wurzelstellen zu bestimmen.

9. Wenn 69 Yard eines Teppichs von $\frac{3}{4}$ Yard Breite ein Zimmer von $10\frac{1}{2}$ Yard Länge bedecken, die Breite des Zimmers zu finden.

10. Wenn 800 Soldaten 5 Tonnen Mehl in 6 Tagen verzehren, wie viel Soldaten werden 15 Tonnen in 2 Tagen verzehren?

11. Suche das grösste gemeinschaftliche Maass der Glieder des Bruches $\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-14x-15}$ und reducire den Bruch auf seine kleinsten Glieder.

12. Löse folgende Gleichungen:

$$(1) \ldots x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=137-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$$

$$(2) \ldots x+\frac{3x-5}{2}=12-\frac{2x-4}{3}$$

$$(3) \ldots \frac{3x-5y}{5}+\frac{x}{2}=9$$

$$\frac{6x+2y}{8}-\frac{y}{2}=7$$

Anm. des Ueb. Im Original steht $\pm\frac{x}{2}$ in der vorletzten Gleichung, was ein Druckfehler ist.

$$(4) \ldots x+y-z=13$$

$$3x-2y+z=19$$

$$5x+4z-2x=40.$$

13. Beweise die Regel für die Ergänzung des Quadrates bei der Auflösung quadratischer Gleichungen; und löse

$$(1) \ldots 7x^2-4x=660$$

$$(2) \ldots \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}-x}=\frac{b}{c}.$$

14. Wenn $a:b=c:d$ beweise dass $a:\frac{b}{m}=c:\frac{d}{m}$ und dass

$$a:b=a+mc:b+md \text{ ist.}$$

15. Dieselbe Frage wie 15. in der vorigen Reihe.

16. Zeige dass $2\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{6}$ in arithmetischer Progression stehen und finde die Summe von 13 Gliedern der Reihe worin sie die ersten sind.

Suche auch die Summe von n Gliedern der Reihe

$$b\frac{x}{a}-b\frac{x^2}{a^2}+b\frac{x^3}{a^3}-\ldots$$

In welchem Falle wird eine unendliche Menge von Gliedern der letzten Reihe etwas Endliches geben?

17. In wie viel Jahren wird 1 L. das auf Zins von Zins zu 5 Proc. steht sich verdoppeln?

Gegeben sind $\log 1,05 = 0,0211893$

$\log 2 = 0,3010300$

18. Gieb das $p$te Glied von $(a + x)^n$ an.

Bemerkungen zu den vorhergehenden in Cambridge ertheilten Aufgaben. Von dem Uebersetzer.

Vielleicht lächelt mancher deutsche Lehrer über diese Aufgaben, indem er urtheilt: sie möchten wohl für abgehende Schüler unserer Gymnasien zu leicht sein. Es scheint wirklich so beim ersten Anblicke: aber, man vergesse nicht, dass diese Aufgaben eine ganz andere Bestimmung haben als künftige Mathematiker zu prüfen; man lege dieselben alle denjenigen vor, die einen sorgfältigen Unterricht in den Anfangsgründen gehabt haben, und ich glaube man kann eine Wette eingehen! dass unter 10 jungen Leuten nicht 9 diese Aufgaben, in einer gegebenen Frist, z. B. in einem Tage, unter Aufsicht eines Inspicienten lösen.

Wer das nicht glaubt der mache die Probe.

Es ist wahr, die Aufgaben sind leicht; darin besteht aber ihr Vorzug, und ein erfahrener Lehrer wird sie um so leichter machen, je weiter seine Erfahrung reicht: denn an leichten Aufgaben kann man eben so gut sehen wie ein gegebener Stoff verarbeitet wird, ja noch besser als an solchen, bei welchen man den gleichsam starren Stoff erst bildungsfähig machen muss. Erfindungs- und Combinationsgabe sind zu sehr von einer eigenthümlichen Meinung abhängig als dass sie vergleichbaren Prüfungen unterworfen werden könnten. Durch vielfache Uebungen kann zwar Mancher eine Richtung darauf erhalten; es ist aber sehr zu bezweifeln, ob es segensreich wirken würde, wenn eine solche Richtung bei irgend einer Bildungsanstalt die vorherrschende wäre. Wenn Lehrer der Mathematik auf Gymnasien darauf ausgehen, ihren Schülern eine Vorliebe für die Mathematik beizubringen, so werden ihnen die Lehrer in den Sprachen aufsässig; und das hat einen sehr guten Grund: denn, nach meiner Erfahrung, ist die Richtung desjenigen, der Mathematik vorzugsweise treibt, einseitig, in einem andern Sinne wie die Richtung desjenigen, der vorzugsweise alte Sprachen treibt. Diese Behauptung könnte das Thema zu einer weitläufigen Abhandlung werden: ich will mich kurz durch einen Vergleich erklären. Beide sind zwei Schwimmern zu vergleichen, von denen aber der eine blos lange und tief tauchen kann, während der andere dieses nicht vermag, dagegen sich mit Anmuth und Leichtigkeit auf der Oberfläche zu bewegen versteht. Der erste taucht nach Perlen, findet aber meist leere Muscheln; der andere müht sich ab im Wasser, indessen ein gemeiner Fischer in dem gebrech-

XXXIV.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von dem

Herrn Professor Dr. Mensing

zu Erfurt.

In den vortrefflichen „Beiträgen zu der Lehre von den positiven und negativen Grössen von Diesterweg; Bonn 1831, bei Habicht“ findet sich folgende erste geometrische Aufgabe:

Es ist ein Rechteck gegeben, und auf der Verlängerung einer Seite desselben ein Punkt; durch diesen soll man eine Gerade so legen, dass dadurch das Rechteck in zwei Paralleltrapeze zerschnitten wird und durch Zusammentreffen dieser Schnittlinie mit einer verlängerten Seite des Rechtecks ein Dreieck entsteht, welches zu einem jener Trapeze ein vorgeschriebenes Verhältniss habe.

Es wird, wobei Taf. V. Fig. 4. zu vergleichen, verlangt dass

$$(y+z)\frac{a}{2} : (b-y)\frac{x}{2} = p : t = (y+z)a : (b-y)x \text{ sei.}$$

Setzt man $p : t = a : r$, so wird

$$y+z : (b-y)x = 1 : r,$$

$$\text{oder } (y+z)r = (b-y)x \ldots\ldots (1)$$

Das ist also die zu lösende Gleichung, die zu der von Diesterweg angegebenen Construction führt, wenn man durch

$$s : m = y : z \text{ oder } s : m+s = y : y+z$$

und $s : y = x : b-y$ das y und z eliminirt und x behält.

Wir wollen aber unsere Aufmerksamkeit auf φ richten, wodurch die Aufgabe auch gelöst wird.

Es ist

$$y = s \operatorname{tg}\varphi \text{ also } y+z = (s+m)\operatorname{tg}\varphi$$

$$z = m \operatorname{tg}\varphi \text{ und durch Substitution in} \ldots (1)$$

$$x = \frac{b-y}{\operatorname{tg}\varphi}$$

XXXV.

Aufgabe aus der analytischen Geometrie.

Von

Herrn C. Scherling

Lehrer der Mathematik und Naturkunde am Catharineum zu Lübeck.

Es ist irgend ein Kegelschnitt und ein Punkt gegeben. Zieht man durch den Punkt gerade Linien, welche den Kegelschnitt in zwei Punkten durchschneiden, so fragt es sich, auf welchem geometrischen Orte die Halbirungspunkte der von dem Kegelschnitte begrenzten Stücke der letztern liegen?

Auflösung. Die Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{2m}x^2$ stellt bekanntlich alle Kegelschnitte dar, wenn der Scheitel eines Durchmessers ($2m$) als Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird; nemlich eine Ellipse, wenn m positiv, eine Hyperbel, wenn m negativ, eine Parabel, wenn m unendlich, und einen Kreis, wenn $p = 2m$ ist; in allen Fällen bedeutet p den Parameter des Durchmessers $2m$.

Man lege nun durch den gegebenen Punkt und den Mittelpunkt des Kegelschnitts die Axe der x (bei der Parabel parallel mit der Axe), die Axe der y aber wieder durch den gegebenen Punkt und parallel mit dem conjugirten Durchmesser (bei der Parabel parallel mit der Tangente durch den Scheitel, in welchem die Axe der x dieselbe schneidet); so hat man, wenn a die Abscisse des Scheitels des Durchmessers ist, welcher als Axe der x dient, die Gleichung

$$y^2 = p(x-a) - \frac{p}{2m}(x-a)^2.$$

Legt man nun durch den gegebenen Punkt oder den Anfangspunkt der Coordinaten eine gerade Linie $y = \alpha x$, so hat man für die Abscissen der Durchschnittspunkte die Gleichung

$$\alpha^2 x^2 = p(x-a) - \frac{p}{2m}(x-a)^2$$

oder

$$x^2 - \frac{2p(m+a)}{2m\alpha^2+p}\,x = -\frac{pa(2m+a)}{2m\alpha^2+p}.$$

Die beiden Werthe, welche diese Gleichung für x liefert, stellen also die Abscissen der Durchschnittspunkte jener geraden Linie und des Kegelschnitts dar; die Abscisse der Mitte dieser Linie ist

$x = \frac{1}{2}(m + a)$, und dessen Halbmesser eben so gross ist. Die Gleichung des gegebenen Kreises wird mit Leichtigkeit auf die Form gebracht

$$y^2 + (x - 2r)^2 = m^2,$$

wobei $2r$, wie oben, $m + a$ bedeutet. Für den Fall nun, dass der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, müssen sich offenbar die Kreise schneiden, und die gemeinschaftliche Chorde wird erhalten durch Subtraction der beiden Gleichungen; sie wird nemlich dargestellt durch die Gleichung

$$2rx = a(2r + m) \text{ oder } x = \frac{a(2r + m)}{2r}.$$

Die hier in Rede stehenden Coordinaten sind jedenfalls rechtwinklig; also sieht man, dass diese gemeinschaftliche Chorde auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Es lässt sich aber auch noch mit grösser Leichtigkeit nachweisen, dass die Durchschnittspunkte die Berührungspunkte der Tangenten sind, die man vom gegebenen Punkte nach dem gegebenen Kreise ziehen kann.

Sind x' und y' die Coordinaten eines Punktes ausserhalb des Kreises, und man zieht durch denselben zwei Tangenten, so ist die Gleichung der Chorde, welche die Berührungspunkte verbindet,

$$yy' + xx' = R^2,$$

wenn R den Radius bedeutet, und die Gleichung aus dem Mittelpunkte zum Grunde liegt. Im gegenwärtigen Falle haben wir zu nehmen

$$yy' + (x - 2r)(x' - 2r) = m^2;$$

da aber der Punkt, durch den jetzt die Tangenten gezogen werden sollen, der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ist $y' = 0$, $x' = 0$, mithin ist

$$-2rx + 4r^2 = m^2 \text{ oder } 2rx = 4r^2 - m^2 = (2r + m)(2r - m)$$

$$\text{d. i. } 2rx = a(2r + m),$$

dieselbe Gleichung, die wir vorher für die beiden Kreisen gemeinschaftliche Chorde hatten; es ist mithin unsere Ordinatenaxe die Polare des Punktes $x = \frac{a(2r + m)}{2r}$, $y = 0$; oder es ist dieser Punkt der Pol zu unserer Ordinatenaxe.

Bei der Ellipse und Hyperbel erhält man, falls der gegebene Punkt ausserhalb des gegebenen Kegelschnitts liegt, für die gemeinschaftliche Chorde einen ganz ähnlichen Ausdruck: man findet nemlich

$$x = \frac{a(2m + a)}{m + a},$$

was ganz dasselbe ist, wie oben beim Kreise, wenn man $m + a = 2r$ setzt. Dieser Werth nun aber, in die Gleichung der Curve gesetzt,

XXXVI.

Fibonacci, der erste christliche Verfasser einer Abhandlung über die Algebra *).

Von dem

Herrn Doctor Gerhardt

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

Unter der Menge kleiner Staaten, in welche Italien gegen Ende des 12ten Jahrhunderts getheilt war, zeichneten sich besonders die Republiken Venedig, Genua, Pisa aus, deren Hauptstädte während der Zeit der Kreuzzüge sich des ganzen Handels nach dem Orient bemächtigt hatten. Sie waren dadurch reich, mächtig, blühend geworden. Genuesische und Pisanische Kaufleute hatten Niederlagen auf der Nordküste Afrikas, auf den Inseln des Archipelagus, in allen grossen Städten des Orients, und kamen hier überall mit den Arabern in Berührung, die damals die Träger der Wissenschaften waren. Auf ihren Reisen dahin sammelten die italienischen Kaufleute ausser ungeheuern Reichthümern einen Schatz neuer Anschauungen und neuer Kenntnisse, die sie wiederum in ihrer Heimath verbreiteten. So erhielten die Christen von den Arabern fast gleichzeitig die Algebra und die Boussole, so wie auch die Philosophie des Aristoteles.

Ein Kaufmann aus Pisa, Leonardo Fibonacci **), ist der erste christliche Verfasser einer Abhandlung über Algebra. Von den Lebensumständen dieses Mannes kennen wir nur das Wenige, was er selbst in der Vorrede zu seinem ersten und wichtigsten Werke, dem Abbacus, das im Jahre 1202 lateinisch geschrieben ist, erwähnt. Leonardo war noch Knabe, als ihn sein Vater, der die Rechte der pisanischen Kaufleute an der Douane von Bougia in Afrika wahrnahm, zu sich rief, um ihn seines künftigen Berufes wegen in der Arithmetik unterrichten zu lassen. Die Nordküste Afrika's war damals im Besitz der Araber, welche besonders die

---

*) Nach Libri hist. des math. en Italie Tom. II. gearbeitet.

**) Der Name Fibonacci ist aus filius Bonacci zusammengezogen, denn das Manuscript des Abbacus in der Magliabechischen Bibliothek zu Florenz aus dem 14ten Jahrhundert beginnt mit den Worten: Incipit liber abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci pisano, in anno 1202. Zahlreiche Beispiele ähnlicher Zusammenziehungen finden sich noch jetzt in toscanischen Familiennamen.

andern eine Darstellung des indischen Zahlensystems und in dem letzten Capitel eine Abhandlung über Algebra enthält. Da dieses Capitel in dem 2ten Theile von Libri's Geschichte der Mathematik in Italien vollständig abgedruckt ist, so können wir uns genau von seinem Inhalte überzeugen. Es besteht aus 3 Theilen: in dem ersten ist über Proportionen, im zweiten über geometrische Problème, im dritten über Algebra gehandelt. Dieser letzte Theil ist der interessanteste des ganzen Werks; jedoch zeigt eine Vergleichung desselben mit dem bekannten Werke Mohammed ben Musa's, dass Fibonacci bei der Abfassung desselben das berühmte Werk dieses arabischen Schriftstellers vor sich hatte und darnach arbeitete. Er giebt zuerst dieselben Erklärungen, betrachtet darauf dieselben sechs Fälle von Gleichungen, nämlich drei einfache, wohin die Gleichungen von der Form

$$ax^2 = bx, \; ax^2 = b, \; x = a$$

gehören, und drei zusammengesetzte, d. h. Gleichungen von der Form

$$ax^2 + bx = c, \; x^2 = ax + b, \; x^2 + a = b.$$

Bei der Lösung dieser Fälle verfährt Fibonacci ebenso ganz auf dieselbe Weise, wie Mohammed ben Musa; er giebt immer zuerst numerische Beispiele, darauf die allgemeine Regel für die Lösung jedes einzelnen Falles ohne Beweis. In allen Fällen werden, ebenfalls nach dem Beispiel der Araber, sämmtliche Glieder der Gleichungen als positiv angenommen. Zuletzt folgt der Beweis, der in einer geometrischen Construction der Gleichung besteht. Das Ganze beschliesst eine Menge von Aufgaben, von denen jede auf einen der oben erwähnten sechs Fälle zurückgeführt wird.

Demnach scheint dieser algebraische Theil nur eine Bearbeitung des oben erwähnten arabischen Werkes zu sein. Die Wissenschaft selbst ist hier von Fibonacci nicht weiter gefördert, denn er lässt ebenso wie die Araber, die zweite Wurzel bei der Lösung der Gleichungen des zweiten Grades unberücksichtigt; ja er ist nicht einmal so weit gegangen, als Mohammed ben Musa, der die Existenz der zweiten Wurzel wenigstens für die Gleichung $ax^2 + b = cx$ angedeutet hatte.

Wir sind jedoch weit entfernt, diesen Mangel Fibonacci zum Vorwurf zu machen; seine Schriften zeichnen sich nicht allein vor denen seiner Zeitgenossen, sondern auch vor denen eines Baco, eines Raimundus Lullus, eines Albert des Grossen, die nach ihm schrieben und die ausgezeichnetsten Männer ihrer Zeit waren, rühmlichst aus, indem sie nur Wahrheiten enthalten, anstatt dass man in den Werken der damaligen Zeit den finstersten Aberglauben mit einzelnen richtigen Aussprüchen und Urtheilen gepaart findet.

---

12) De Solutionibus multarum positarum quaestionum quas erraticas appellamus.

13) De regula eleatayin, qualiter per ipsum fere omnes erraticae quaestiones solvantur.

14) De reperiendis radicibus quadratis et cubiis et multiplicatione et divisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicium.

15) De regulis et proportionibus geometriae pertinentibus, de quaestionibus algebrae et almachabelae.

Fibonacci hatte auch bei der Abfassung seines Abbacus nur das rein Praktische im Auge *); er wollte seine Mitbürger mit den Vortheilen bekannt machen, die das indische Zahlensystem in der Rechnung vor denen voraus hatte, die bisher in Italien und andern Ländern gebräuchlich waren. Dies ist sein Hauptverdienst, wofür ihm die Nachwelt den grössten Dank schuldig ist. —

Da aber die übrigen Schriften Fibonacci's erwähnt worden sind, so möge jetzt noch eine kurze Beschreibung derselben folgen. Die Practica geometriae ist ein sehr voluminöses Werk, das in 8 Distinctionen eingetheilt ist und von dem verschiedene Manuscripte existiren, die beweisen, dass es der Verfasser mehrmals überarbeitet hat. Den Hauptinhalt desselben bilden Untersuchungen über die Ausmessung der Körper; besonders zu bemerken ist aber, dass darin das Theorem vorkommt, in welchem die Fläche eines Dreiecks durch die 3 Seiten bestimmt wird, ein Satz, der sich schon in den Schriften Brahmeguxta's findet **). Fibonacci hat ihn wahrscheinlich aus einer Schrift des Juden Savosarda entlehnt, der im 12ten Jahrhundert lebte und dessen Werk von Plato von Tivoli ins Lateinische übersetzt ist. Indessen werden auch in der Practica geometriae algebraische Gegenstände abgehandelt; so findet sich in der zweiten Distinction die Ausziehung der Quadratwurzeln, in der fünften die der Cubikwurzeln und am Ende des Werks Probleme aus der unbestimmten Analysis.

Fibonacci hat auch eine Abhandlung über die Quadratzahlen geschrieben, die von ihm selbst, von Lucas Paciolo, Ghaligai, Xylander und Baldi erwähnt wird, die aber in neuester Zeit nicht wieder hat aufgefunden werden können. Paciolo hat einen Theil derselben seiner Summa arithmetica einverleibt, und Ghaligai scheint alles das daraus entnommen zu haben, was er über unbestimmte Analysis sagt. Aus einer Vergleichung beider Schriften lässt sich die Behauptung Xylander's, Fibonacci habe diese Abhandlung aus der Arithmetik des Diophantus entlehnt, zurückweisen; beide haben keine Aehnlichkeit mit einander. Fibonacci giebt unter andern darin die Summe der Reihe der natürlichen Zahlen, die ihrer Quadrate, so wie auch die allgemeine Formel zur Bildung arithmetischer Dreiecke; es findet sich auch daselbst die Lösung eines besondern Falles von dem schwierigen Problem: eine Quadratzahl zu finden, so dass, wenn man zu derselben eine gegebene Zahl addirt oder davon subtrahirt, sie immer ein Quadrat bleibt.

---

*) Sane hic liber magis quam ad theoricam spectat ad practicam, sagt er in der Vorrede.

**) Vergl. die historischen Notizen, die Chasles über dieses Theorem in seiner Geschichte der Geometrie (p. 480 ff. der Uebersetzung von Sohnke) beibringt. Derselbe sagt, dass es sich in der Practica geometriae nach der Art der Araber bewiesen findet: hieraus könnte man schliessen, dass Fibonacci es unmittelbar von den Arabern entlehnt habe, und nicht von Savosarda, wie Libri meint, zumal da in dem Werke des letztern der Beweis fehlt.

XXXVII.

Ueber den Ursprung und die Verbreitung unseres gegenwärtigen Zahlensystems *).

Von dem

Herrn Doctor Gerhardt

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

Zwischen Libri und Chasles, dem Verfasser des „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie etc. Brux. 1837" (ins Deutsche übersetzt von Sohnke) ist in neuester Zeit ein heftiger Streit über den Ursprung unseres gegenwärtigen Zahlensystems ausgebrochen. Jener behauptet, dass die Christen dasselbe den Arabern zu verdanken hätten und dass namentlich Fibonacci zuerst die Kenntniss desselben verbreitet habe; dieser meint, dass unser Zahlensystem aus dem der Griechen und Römer entstanden sei, und will das erste Vorkommen desselben den Werken des Boetius vindicirt wissen, der es wiederum den Pythagoräern zuschreibt. Libri hat jedoch die kühnen Hypothesen und irrigen Ansichten des letzteren genügend widerlegt, und Chasles selbst hat in einer Note am Ende seines Werkes seinen Irrthum bekannt. Die Stelle des Boetius, auf welche Chasles seine Ansichten basirt und die man in dem oben genannten Werke vollständig abgedruckt findet, beweist weiter nichts, als dass man sich zur Zeit des Boetius gewisse Abkürzungen in der Multiplication und Division erlaubte, und besonderer Kunstgriffe und Zeichen dabei bediente, wie es schon seit den ältesten Zeiten Sitte war, und die Fibonacci auch auf seinen Reisen fand. Chasles hatte sich durch diese Stelle zu der offenbar irrigen Ansicht verleiten lassen, dass die Zahlensysteme der Griechen und Römer von dem unsrigen nur wenig verschieden wären, denn beiden läge eine Progression nach Zehn zu Grunde und beide drückten irgend eine Zahl auf dieselbe Art durch Einer, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. aus mit Hülfe der neun Grundzahlen Eins, Zwei, Drei, ... Neun. Aber es ist bekannt, dass unser Zahlensystem von denen der Alten sich

---

*) Ausser Libri hist. des math. en Italie ist hierbei noch benützt Chasles Geschichte der Geometrie übersetzt von Sohnke, und Hüllmann über das Städtewesen des Mittelalters.

scheinlich, dass sie ihre dort erworbenen Kenntnisse für sich behielten und die Ausbreitung derselben unter ihren Landsleuten unterliessen. Als Beispiel mag hier der bekannte Gerbert erwähnt werden, der zu seiner Ausbildung nach Spanien zu den Sarazenen gegangen war und nach seiner Rückkehr, im Jahre 999 unter dem Namen Sylvester II. den päpstlichen Stuhl bestieg. Auf seinem Rückwege verbreitete er eifrigst seine Kenntnisse, aber die Unwissenheit seiner Zeitgenossen war so ungeheuer, dass man ihn seiner neuen Lehren wegen verketzerte und der Magie anklagte. Seine geometrischen Schriften behandeln zwar nur die elementarsten Gegenstände, aber unmöglich kann diess Anlass zu zweifeln geben, ob Gerbert wirklich seine Kenntnisse den Arabern verdankt, wie Chasles zu behaupten geneigt ist; vielmehr beweist es meiner Meinung nach, dass Gerbert ein guter Pädagog war, der erkannte, dass die hohen Kenntnisse, die er bei den Arabern gewonnen hatte, für seine Landsleute eine zu unverdauliche Speise waren. Von grösserer Wichtigkeit scheinen seine arithmetischen Schriften zu sein, die grösstentheils noch unedirt in der Bibliothek des Vatikan liegen. Es findet sich darin nach der Behauptung Chasles ein Zahlensystem, von dem damals gebräuchlichen lateinischen verschieden ist. Der Thätigkeit und dem Lehreifer Gerberts verdankte namentlich die Schule zu Rheims ihre Blüthe. Wissbegierige Männer strömten aus Frankreich und Deutschland herbei, um sich unter ihm zu bilden, und die hinterlassenen Manuscripte eines Adalboldus, Bischofs von Utrecht, eines Heriger, Abts von Laubes, und Bernelius, die sämmtlich seine Schüler waren, beweisen, dass Gerbert denselben seine bei den Arabern gewonnenen Kenntnisse mittheilte. Sie setzten das angefangene Werk ihres Meisters eifrigst fort, und noch im 12ten Jahrhundert gewährten die Bäume Schatten und Früchte, welche Gerbert im 10ten zu Rheims gepflanzt hatte. Durch Sprösslinge davon sind in Frankreich und Deutschland verschiedene Stämme unmittel- oder mittelbar veredelt worden. Solange jedoch die bisher in dem Staube der Bibliotheken vergraben liegenden Manuscripte nicht veröffentlicht werden, lässt sich über die Thätigkeit und Wirksamkeit Gerberts, wie seiner Schüler, nichts behaupten, und Franzosen und Deutsche müssen vor der Hand zugestehen, dass zuerst von Italien aus durch Fibonacci unser gegenwärtiges Zahlensystem in Europa verbreitet worden ist. Das steht allerdings fest, dass in Deutschland die Geistlichen, denen die Sorge des Unterrichts oblag, im 11ten, 12ten, 13ten Jahrhundert an nichts weniger dachten, als für Bildung thätig zu sein. Seitdem hohe, wie niedrige Stellen käuflich wurden, seitdem die hohe, wie die niedrige Geistlichkeit dahin strebte, immer mehr weltliche Macht sich zu verschaffen, seitdem jene den lebhaftesten Antheil an der Politik nahm, und diese sich sogar mit Handel befasste, da gingen auch die letzten Spuren der ächten, wissenschaftlichen Bildung verloren. Der Unterricht beschränkte sich auf nothdürftiges Lesen und Schreiben. Es blieb ihnen keine Zeit übrig, an ihre eigene Ausbildung zu denken, fortwährende Streitigkeiten mit den Bürgerschaften, in deren Nähe sie wohnten, über Gerichtsbarkeit und weltliche Macht nahmen ihre ganze Thätigkeit in Anspruch, und sie hielten mit aller Gewalt, die ihnen zu Gebote stand, das Volk in Unwissenheit zurück und hinderten jedes kühne Emporstreben.

stellten Preisaufgabe befassen sollte, ob es nämlich vor Rudolff von Jauer deutsche Kossisten gegeben habe, welche die Algebra auf eigenthümliche Weise ausbildeten.

XXXVIII.

Ueber eine Aufgabe der praktischen Geometrie.

Von dem

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

Im ersten Theile von Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben findet sich folgendes Problem in §. 149. vorgelegt: aus den drei Spitzen eines gegebenen Dreieckes wird ein Thurm gesehen, dessen Fuss mit dem Dreiecke in Einer Ebene liegt; die Winkel, unter welchem er aus denselben erscheint, sind gegeben: man soll die Entfernung des Thurmes von jedem dieser drei Punkte finden. Die Lösung hat der Verfasser dadurch erhalten, dass er zwei Hülfslinien einführt, x und y, welche zuletzt aus zwei Gleichungen gefunden werden müssen, von denen die eine vom ersten und die andere vom zweiten Grade ist. Die Coefficienten dieser Gleichungen sind aber bereits so zusammengesetzt und so wenig elegant oder symmetrisch gebaut, dass Meier Hirsch sich begnügt hat, die erwähnten Endgleichungen aufzustellen und die wirkliche Entwickelung von x und y auf die jedesmalige numerische Rechnung zu verweisen.

Indessen lässt die vorgelegte Aufgabe eine sehr einfache und auch ziemlich elegante Lösung zu. Bezeichnet man nämlich die Winkel des gegebenen Dreieckes mit ABC, ihre Gegenseiten mit abc, die Höhe des Thurmes mit h, seine Abstände von den Dreieckspitzen ABC bezüglich mit $a_1 b_1 c_1$, ferner die zwischen a_1 und c_1 und zwischen b_1 und c_1 am Fusse des Thurmes liegenden Winkel respective mit o und u, und nennt endlich die Winkel, unter welchen der Thurm von ABC aus gesehen wird, der Reihe nach $\alpha\beta\gamma$, so ist die Auflösung in folgenden einfachen Formeln enthalten:

$$\cos(C+o+u)=\frac{a^2\cot^2\alpha+b^2\cot^2\beta-c^2\cot^2\gamma}{2ab\cot\alpha\cot\beta}$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(A-u) = \pm\sqrt{\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,(-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}}$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(B-o) = \pm\sqrt{\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\,(-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}}$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(C+o+u) = \pm\sqrt{\frac{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,(-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c})}}$$

dann berechne man die Hülfswinkel $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ aus den Gleichungen:

$$\cos 2\varphi_1 = \cos 2\beta \cos 2\gamma + \sin 2\beta \sin 2\gamma \cos u$$

$$\cos 2\varphi_2 = \cos 2\alpha \cos 2\gamma + \sin 2\alpha \sin 2\gamma \cos o$$

$$\cos 2\varphi_3 = \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos (o+u)$$

so wird

$$h = \frac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin\varphi_1} = \frac{b \sin\alpha \sin\gamma}{\sin\varphi_2} = \frac{c \sin\alpha \sin\beta}{\sin\varphi_3}$$

woraus sich wiederum $a_1 b_1 c_1$ unmittelbar ergeben. — Beispielshalber füge ich noch die Resultate einer Rechnung bei, die nach folgenden Daten geführt wurde:

$$c = 1370{,}059 \quad \gamma = 9^\circ\ 54'$$
$$b = 870{,}447 \quad \beta = 10^\circ\ 35'$$
$$a = 707{,}295 \quad \alpha = 12^\circ\ 14'.$$

Dies gab zuvörderst:

$$C = 120^\circ\ 11'\ 8'',88 \text{ und } \mathfrak{c} = 7850{,}085$$
$$B = 33\ \ 18\ \ 39,66 \qquad \mathfrak{b} = 4658{,}687$$
$$A = 26\ \ 30\ \ 11,46 \qquad \mathfrak{a} = 3262{,}180.$$

Hieraus ergab sich nun in dem einen Fall, nämlich $A < u$,

$$o+u = 75^\circ\ 23'\ 25'',96 \quad c_1 = 1282{,}52$$
$$o = 42\ \ 28\ \ 50,00 \quad b_1 = 1197{,}98 \quad h = 223{,}836$$
$$u = 32\ \ 54\ \ 35,96 \quad a_1 = 1032{,}37$$

für den andern Fall $A > u$ hingegen wurde

$$o+u = 44^\circ\ 14'\ 16'',28 \quad c_1 = 2058{,}26$$
$$o = 24\ \ 8\ \ 29,32 \quad b_1 = 1922{,}59 \quad h = 359{,}224$$
$$u = 20\ \ 5\ \ 46,96 \quad a_1 = 1656{,}81$$

gefunden.

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass das Pothenot'sche Problem sich mittelst der von mir für das geradlinige Viereck aufgefundenen Relationen ebenfalls sehr schnell und direkt lösen lässt. Behält man nämlich die Bezeichnung des Vorhergehenden bei, indem man den Fusspunkt des Thurmes als vierten Punkt betrach-

Man erhält aus der zweiten Reihe durch Entwickelung aller Glieder:

$$
\begin{array}{llllll}
b_1 x - b_1 x^2 & + \; b_1 x^3 & - \ldots\ldots\ldots & \pm n_0 \;\; b_1 & x^{n+1} & \mp \ldots \\
\quad + b_2 & - 2b_2 & + \ldots\ldots & \mp n_1 \;\; b_2 & & \pm \ldots \\
 & + \;\; b_3 & - \ldots\ldots & \pm n_2 \;\; b_3 & & \mp \ldots \\
 & & & \;\;\cdot & & \\
 & & & \;\;\cdot & & \\
 & & & \;\;\cdot & & \\
 & & & + n_{n-2} b_{n-1} & & - \ldots \\
 & & & - n_{n-1} b_n & & + \ldots \\
 & & & + n_n \;\; b_{n+1} & & - \ldots
\end{array} \qquad (3)
$$

Folglich durch Vergleichung mit (1)

$$b_1 = a_1, \; b_2 = b_1 + a_2, \; b_3 = 2b_2 - b_3 + a_3, \ldots \text{ u. s. f.}$$
$$= a_1 + a_2 \qquad = a_1 + 2a_2 + a_3$$

Diess scheint auf folgendes Gesetz zu deuten:

$$b_n = (n-1)_0 a_1 + (n-1)_1 a_2 + (n-1)_2 a_3 + \ldots + (n-1)_{n-1} a_n. \quad (4)$$

Wir wollen nun annehmen, dass diese Relation für diesen und alle vorhergehenden Koeffizienten richtig sei und dann den folgenden Koeffizienten b_{n+1} daraus ableiten. Durch Vergleichung der allgemeinen Glieder von (1) und (3) erhält man sogleich:

$$b_{n+1} = n_{n-1} b_n - n_{n-2} b_{n-1} + n_{n-3} b_{n-2} - \ldots\ldots\ldots + a_{n+1}.$$

Folglich, wenn wir jeden der Koeffizienten b_n, b_{n-1}, ... aus der Formel (4) bestimmen:

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} = \; & n_{n-1}[(n-1)_0 a_1 + (n-1)_1 a_2 + (n-1)_2 a_3 + \ldots\ldots] \\
& - n_{n-2}[(n-2)_0 a_1 + (n-2)_1 a_2 + (n-2)_2 a_3 + \ldots\ldots] \\
& + n_{n-3}[(n-3)_0 a_1 + (n-3)_1 a_2 + (n-3)_2 a_3 + \ldots\;\;] \\
& - \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \qquad\qquad + a_{n+1}
\end{aligned}
$$

Oder, wenn wir diese Reihen in vertikaler Richtung summiren:

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} = \; & [n_{n-1}(n-1)_0 - n_{n-2}(n-2)_0 + n_{n-3}(n-3)_0 - \ldots\ldots]a_1 \\
& + [n_{n-1}(n-1)_1 - n_{n-2}(n-2)_1 + n_{n-3}(n-3)_1 - \ldots\ldots]a_2 \\
& + [n_{n-1}(n-1)_2 - n_{n-2}(n-2)_2 + n_{n-3}(n-3)_2 - \ldots\;\;]a_3 \\
& + \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \qquad\qquad + a_{n+1}
\end{aligned}
$$

Da nun $n_{n-1} = n_1$, $n_{n-2} = n_2$, ... ist, so lässt sich jede der eingeklammerten Reihen nach der bekannten Formel

$$\left.\begin{array}{l} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots \\ = (\frac{1+x}{x}) + \frac{1}{2}(\frac{1+x}{x})^2 + \frac{1}{3}(\frac{1+x}{x})^3 + \ldots \\ \qquad \ldots + \frac{1}{n+1}(\frac{x}{1+x})^{n+1} + \ldots \end{array}\right\} +1 > x > -1$$

also:

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1},\ a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = -\frac{1}{4}, \ldots$$

und nach (5)

$$\frac{1}{n+1} = n_0 - \frac{1}{2}n_1 + \frac{1}{3}n_2 - \frac{1}{4}n_3 + \ldots \quad (7)$$

Diese schon bekannte Eigenschaft der Binomialkoeffizienten findet sich gewöhnlich mit bei der Integration logarithmischer Differenziale. Will man einmal höhere Analysis zulassen, so kann man alle hier entwickelten Formeln sehr kurz mittelst bestimmter Integrale ableiten, auf welchem Wege sie auch gelegentlich gefunden werden.

IV. Eine andere ähnlich gebildete Relation beruht auf der Summe der Reihe

$$\left.\begin{array}{l} S = x - (1 - \frac{1}{2})x^2 + (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^3 \\ \qquad - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4})x^4 + \ldots,\ +1 > x > -1. \end{array}\right\} (8)$$

Um dieses S zu finden multipliziren wir die Reihe mit $1+x$, und erhalten so:

$$\begin{array}{rl} (1+x)S = x - (1-\frac{1}{2})x^2 + (1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3 - (1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})x^4 + \ldots \\ +1 \ \Big| \ -(1-\frac{1}{2}) \ \Big| \ +(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) \ \Big| \ - \ldots \\ = x + \frac{1}{2}x^2 \qquad + \frac{1}{3}x^3 \qquad + \frac{1}{4}x^4 + \ldots \\ = -\operatorname{Log}(1-x) \end{array}$$

mithin

$$S = \frac{-\operatorname{Log}(1-x)}{1+x}.$$

Ein zweiter Ausdruck für dieses S findet sich so. Es ist

$$-\operatorname{Log}(1-x) = \operatorname{Log}(1 - \frac{x}{1+x}) - \operatorname{Log}(1 - \frac{2x}{1+x});$$

folglich, wenn man noch mit $1+x$ dividirt und die Logarithmen in Reihen verwandelt,

$$S = \frac{1}{1+x}\left[\frac{2-1}{1}(\frac{x}{1+x}) + \frac{2^2-1}{2}(\frac{x}{1+x})^2 + \frac{2^3-1}{3}(\frac{x}{1+x})^3 + \ldots\right]$$

also

$$b_{n+1}=\frac{1}{2n+1},\ a_1=1,\ a_2=-\frac{2}{3},\ a_3=\frac{2.4}{3.5},\ldots$$

und

$$\frac{1}{2n+1}=x_0-\frac{2}{3}x_1+\frac{2.4}{3.5}x_2-\frac{2.4.6}{3.5.7}x_3+\ldots (13)$$

was man als die Umkehrung der vorhergehenden Formel ansehen kann.

XL.

Berechnung des Wheatstone'schen Versuches zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des electrischen Lichtes.

Von

Herrn J. Flesch

Lehrer der Mathem. und der Naturwissensch. an der Realschule zu Düsseldorf.

1.

Eine breite Metallplatte, in Form eines Parallepipedon, mit zwei polirten Grenzebenen bewege sich um eine vertikale Achse, welche die Platte in der Mitte ihrer Dicke, den vier vertikalen Seitenflächen parallel, durchsetze. A (Taf. V. Fig. 6.) sei ein leuchtender Punkt, $AO=a$ seine Entfernung von der Drehungsachse, die in O auf der Ebene der Figur senkrecht stehe; OS der Durchschnitt des Metall-Doppelspiegels mit einer den leuchtenden Punkt enthaltenden Horizontalebene; A' und A'' die Bilder des leuchtenden Punktes für die Lagen des Spiegels OS' und OS''; es sei ferner der Drehungswinkel des Spiegels $S'OS''=\alpha$. Dann ist auch $A'AA''=\alpha$, und $Ap=a\cos\alpha$; folglich $AA''=2a\cos\alpha$; mithin ist

$$r=2a\cos\alpha \ldots (\mathrm{I.})$$

die Polargleichung der Kurve, welche das Bild des leuchtenden Punktes beschreibt, der Pol derselben der leuchtende Punkt selbst. Auf rechtwinklige Coordinaten vom Anfangspunkt A und der Abscissenachse AO bezogen nimmt dieselbe die Gestalt

beschrieben; folglich scheint der leuchtende Punkt durch die Bewegung des Spiegels statt in M in N sich zu befinden und den Weg AN durchlaufen zu haben, während er doch wirklich den Weg AM zurückgelegt hat. Seine scheinbare Geschwindigkeit auf dem Wege AP zur wahren Geschwindigkeit auf dem eigentlich durchlaufenen Wege AB verhält sich wie

$$\frac{\sqrt{v^2+c^2}}{v}, \ldots . \text{(III.)}$$

ist also grösser geworden.

Ist nun aber

$$t' > 0,$$

dauert also der Lichteindruck eine Zeit lang fort, so erscheint z. B. wenn der leuchtende Punkt in M anlangt, sein Bild in N. Nun dauert aber der Lichteindruck in N während t' Sekunden fort; der Spiegel beschreibt während dieser Zeit den Bogen ct', folglich beschreibt auch das Bild des leuchtenden Punktes M von N aus einen gleichen Bogen ct'. Der leuchtende Lichtweg, welcher für $t'=0$ eine blosse Linie AP ist, wird also für $t'>0$ ein Parallelogramm sein, dessen andere Dimension folglich ct', gleich dem Produkte der Rotationsgeschwindigkeit in die Zeitdauer des Lichteindruckes ist; also unabhängig von v.

Es sei nun α der Winkel, um welchen das Bild der leuchtenden Linie von der vertikalen Lage abgelenkt erscheint; dann ist offenbar

$$c = v \text{ tang } \alpha \ldots . \text{(IV.)}$$

und hieraus ergiebt sich die Geschwindigkeit des leuchtenden Punktes

$$v = \frac{c}{\text{tang } \alpha} \ldots . \text{(V.)}$$

Macht z. B. der Doppelspiegel in 1 Sekunde n Rotationen, so wird das Bild eines leuchtenden Punktes in derselben Zeit $2n$ Kreisumfänge durchlaufen; ist der Radius des Kreises $=r$, so ist also der in 1 Secunde von dem Bilde des leuchtenden Punktes beschriebene Weg

$$c = 4\pi nr$$

und dieser Werth, in die Formel (V.) substituirt, gibt

$$v = \frac{4\pi nr}{\text{tang } \alpha} \ldots . \text{(VI.)}$$

3.

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass unter übrigens gleichen Umständen die zu bestimmende Geschwindigkeit des leuchtenden Punktes um so grösser ist, je weniger sich das Bild seines Lichtweges von der vertikalen Lage entfernt. Bliebe letzteres bei jeder beliebig grossen Rotationsgeschwindigkeit des Metallspiegels und jeder möglichen Entfernung der leuchtenden Linie von der Umdrehungsachse stets senkrecht, so könnte die gesuchte Geschwindigkeit nur unendlich gross sein. Da aber eine absolut unendliche

sultat der Rechnung; der Versuch aber zeigt unter den angeführten Bedingungen das Bild der leuchtenden Linie vollkommen vertikal, was uns also zu dem Schlusse berechtigt, dass die Geschwindigkeit des elektrischen Lichtes ausserordentlich gross sein müsse, so dass wir auf diesem Wege nicht im Stande zu sein scheinen, dieselbe numerisch zu bestimmen. Wheatstone hat deshalb diesen Versuch dahin abgeändert, dass er dem oben beschriebenen Spiegelapparate 6 gleich grosse, auf derselben Vertikallinie befindliche, Metallkugeln gegenüberstellt (Taf. V. Fig. 8.), von denen die erste a mit der äusseren Belegung eines geladenen Condensators, z. B. einer Leidener Flasche, die beiden folgenden b und c, so wie d und e, aber durch 2 Messingdrähte von gleicher und möglichst bedeutender Länge mit einander verbunden sind. In dem Augenblicke nun, wo man die Kugel f mit der inneren Belegung der Flasche in Verbindung setzt, zeigen sich 3 elektrische Funken, welche von a nach b, von c nach d und von e nach f überspringen. Jeder derselben bildet eine senkrechte Lichtlinie, deren Bild vollkommen vertikal erscheint. Das Auge erkennt die 3 Funken als gleichzeitige, aber der Spiegel zeigt durch Reflexion die Bilder der beiden äusseren in derselben Vertikallinie, das Bild des mittleren hingegen merklich von dieser Linie entfernt. Hieraus schliessen wir, dass die beiden äusseren Funken genau in demselben Augenblicke überspringen, der mittlere dagegen um eine nicht zu vernachlässigende Zeitgrösse gegen die andern verspätet ist. Und dieser Zeitraum ist offenbar derselbe, den die Electricität gebraucht, um einen der beiden Metalldrähte $bgc = dhe = p$ Meter zu durchlaufen. Misst man nun den Bogen $cd' = q$ Meter, den während derselben Zeit der Spiegel durchlaufen, so findet man die gesuchte Geschwindigkeit des elektrischen Fluidums durch die Proportion

$$v : 4\pi n r = p : q;$$

folglich ist

$$v = \frac{4\pi n r p}{q} \text{ Meter. (VII.)}$$

Auf diesem Wege fand Wheatstone, dass die Electricität auf einem Messingdrahte von 0,002 Meter Dicke mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 460000000 Meter = 62000 geographischen Meilen in 1 Secunde, also bei weitem schneller als das Licht, sich fortpflanze. Man vergleiche Lamé Cours de physique de l'école polytechnique. 717.

Ich weiss nicht, ob ich mich täusche; aber mir scheint dieser Versuch ein nicht unwichtiges Element zu Gunsten der Symmer'schen Hypothese über die Elektricität zu enthalten; denn die Gleichzeitigkeit der beiden äusseren Funken und die Verspätung des mittleren gegen jene, so wie überhaupt die Symmetrie der Erscheinung, von der Mitte aus betrachtet, scheinen auf zwei verschiedene, einander gegenseitig entgegenströmende und in der Mitte sich neutralisirende Fluida hinzudeuten; — jedoch sei diese alte Streitfrage Männern von gediegenerem Urtheil übergeben.

$$P=\frac{h}{3}\{B+b+\sqrt{Bb}\} \quad (1)$$

Denn zerlegt man dieselbe in n dreiseitige Pyramiden, so hat man (Éléments de géométrie par Legendre liv. VI. prop. 21) unter ähnlichen Bezeichnungen folgende Gleichungen:

$$p'=\frac{h}{3}\{B'+b'+\sqrt{B'b'}\},$$

$$p''=\frac{h}{3}\{B''+b''+\sqrt{B''b''}\}, \quad (2)$$

$$p'''=\frac{h}{3}\{B'''+b'''+\sqrt{B'''b'''}\} \text{ u. s. w.}$$

mithin

$$p'+p''+p'''+\text{etc.}=\frac{h}{3}\{B'+B''+B'''+\text{etc.})+(b'+b''+b'''+\text{etc.})$$
$$+(\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.})\} \quad (3)$$

Nun aber ist offenbar

$$p'+p''+p'''+\text{etc.}=P$$
$$B'+B''+B'''+\text{etc.}=B$$
$$b'+b''+b'''+\text{etc.}=b$$

folglich ist

$$P=\frac{h}{3}\{B+b+(\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.})\}. \quad (4)$$

Es muss also noch gezeigt werden, dass

$$\sqrt{Bb}=\sqrt{(B'+B''+B'''+\text{etc.})\,(b'+b''+b'''+\text{etc.})}$$
$$=\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.} \quad (5)$$

Aber

$\frac{B'}{b'}=\frac{B''}{b''}=\frac{B'''}{b'''}=\text{etc.}$, mithin (Archiv. Th. I. S. 292.) ist auch

$$\frac{B'+B''+B'''+\ldots}{b'+b''+b'''+\ldots}=\frac{B'}{b'} \text{ und}$$

wenn man beiderseits mit $(b'+b''+b'''+\text{etc.})^2$ multiplizirt,

$$(B'+B''+B'''+\text{etc.})\,(b'+b''+b'''+\text{etc.})=\frac{B'}{b'}(b'+b''+b'''+\text{etc.})^2; \text{ also}$$

$$\sqrt{(B'+B''+B'''+\text{etc.})\,(b'+b''+b'''+\text{etc.})}=(b'+b''+b'''+\text{etc.})\sqrt{\frac{B'}{b'}}$$
$$=\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}+\text{etc.},$$

da

$$\sqrt{\frac{B'}{b'}}=\sqrt{\frac{B''}{b''}}=\sqrt{\frac{B'''}{b'''}}=\text{etc.}$$

Es gilt also dieser merkwürdige Satz (1), welcher in den Lehrbüchern der Geometrie gewöhnlich nur für dreiseitige Pyramiden bewiesen wird, für jede beliebige Anzahl von Seitenflächen.

$$\frac{b}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}} < 1, \text{ d. i. } c < 1,$$

woraus sich leicht ergiebt, dass die Gleichung

$$y^3 - 3y - 2c = 0$$

auch zum irreduciblen Falle gehört, und daher drei reelle Wurzeln hat, von denen die eine positiv ist, die beiden andern negativ sind, welches übrigens auch unmittelbar aus der Formel

$$x = y\sqrt{\frac{a}{3}}$$

geschlossen werden kann, da x nur einen reellen positiven Werth, und zwei reelle negative Werthe haben kann. Setzt man jetzt

$$y = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{1+c}{2}}}{y_1},$$

und führt dies in die obige Gleichung für y ein, so erhält man zur Bestimmung von y_1 nach leichter Rechnung die Gleichung

$$y_1^3 - 3y_1 - 2\sqrt{\frac{1+c}{2}} = 0,$$

oder, wenn man

$$\sqrt{\frac{1+c}{2}} = c_1$$

setzt, die Gleichung

$$y_1^3 - 3y_1 - 2c_1 = 0.$$

Da nach dem Obigen $c < 1$ ist, so ist offenbar auch $c_1 < 1$, und die vorhergehende Gleichung gehört folglich wieder zum irreduciblen Falle, so dass also auch y_1 drei reelle Werthe hat, von denen der eine jederzeit positiv ist, die beiden andern negativ sind. Setzt man nun ferner

$$y_1 = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{1+c_1}{2}}}{y_2},$$

und führt dies in die obige Gleichung für y_1 ein, so erhält man ganz wie vorher zur Bestimmung von y_2 die Gleichung

$$y_2^3 - 3y_2 - 2\sqrt{\frac{1+c_1}{2}} = 0,$$

oder wenn man ferner

$$\sqrt{\frac{1+c_1}{2}} = c_2$$

setzt, die Gleichung

$$y_2^3 - 3y_2 - 2c_2 = 0.$$

Weil nach dem Vorhergehenden $c_1 < 1$ ist, so ist offenbar auch $c_2 < 1$, und die vorstehende Gleichung gehört folglich wieder zum irreduciblen Falle, so dass also y_2 drei reelle Werthe hat, von de-

nen der eine positiv ist, die beiden andern negativ sind. Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann unterliegt keinem Zweifel. Setzt man also

$$\frac{b}{2}\left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=c,$$

$$\sqrt{\frac{1+c}{2}}=c_1,$$

$$\sqrt{\frac{1+c_1}{2}}=c_2,$$

$$\sqrt{\frac{1+c_2}{2}}=c_3,$$

u. s. w.

$$\sqrt{\frac{1+c_{n-1}}{2}}=c_n,$$

und lässt jetzt

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

die reellen positiven Wurzeln der Gleichungen

$$y^3-3y-2c=0,$$

$$y_1{}^3-3y_1-2c_1=0,$$

$$y_2{}^3-3y_2-2c_2=0,$$

$$y_3{}^3-3y_3-2c_3=0,$$

u. s. w.

$$y_n{}^3-3y_n-2c_n=0$$

bedeuten, was offenbar verstattet ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$y=1+\frac{2c_1}{y_1},$$

$$y_1=1+\frac{2c_2}{y_2},$$

$$y_2=1+\frac{2c_3}{y_3},$$

u. s. w.

$$y_{n-1}=1+\frac{2c_n}{y_n};$$

folglich

$$y=1+\cfrac{2c_1}{1+\cfrac{2c_2}{1+\cfrac{2c_3}{1+\ldots+\cfrac{2c_{n-1}}{1+\cfrac{2c_n}{y_n}}}}}.$$

Weil nach dem Vorhergehenden $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots c_n$ und auch y_n, wie gross man auch n annehmen mag, lauter positive Grössen sind; so ist, wenn man

$$y = 1 + \cfrac{2c_1}{1 + \cfrac{2c_2}{1 + \cfrac{2c_3}{1 + \cfrac{2c_4}{1 + \ldots}}}}$$

setzt, nach der Theorie der Kettenbrüche y zwischen jeden zwei einander benachbarten Partialbrüchen des Kettenbruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens als Gränzen enthalten, und dieser Kettenbruch kann also zur annähernden Berechnung von y sehr zweckmässig gebraucht werden. Hat man aber auf diese Weise y gefunden, so erhält man ferner mittelst der Formel

$$x = y\sqrt{\frac{a}{3}}$$

sehr leicht die reelle positive Wurzel, welche die Gleichung

$$x^3 - ax - b = 0$$

im irreduciblen Falle jederzeit haben muss.

Zur Berechnung der Zähler und Nenner

$$m_0,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5,\ \ldots;$$

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5,\ \ldots$$

des oben für y gefundenen Kettenbruchs hat man nach der Theorie der Kettenbrüche bekanntlich die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
m_0 &= 1,\\
m_1 &= 1 + 2c_1,\\
m_2 &= m_1 + 2c_2 m_0,\\
m_3 &= m_2 + 2c_3 m_1,\\
m_4 &= m_3 + 2c_4 m_2,\\
m_5 &= m_4 + 2c_5 m_3,\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
n_0 &= 1,\\
n_1 &= 1,\\
n_2 &= n_1 + 2c_2 n_0,\\
n_3 &= n_2 + 2c_3 n_1,\\
n_4 &= n_3 + 2c_4 n_2,\\
n_5 &= n_4 + 2c_5 n_3,\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Setzt man

$$m_0 = 2c_1 \,.\, \mu_2,$$
$$m_1 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, \mu_3,$$
$$m_2 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, \mu_4,$$
$$m_3 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, \mu_5,$$
$$m_4 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, 2c_5 \,.\, \mu_6,$$
$$m_5 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, 2c_5 \,.\, 2c_6 \,.\, \mu_7,$$

u. s. w.

so ist nach dem Vorhergehenden

$$m_2 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, (\mu_2 + \mu_3),$$
$$m_3 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, (\mu_3 + \mu_4),$$
$$m_4 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, (\mu_4 + \mu_5),$$
$$m_5 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, 2c_5 \,.\, (\mu_5 + \mu_6),$$

u. s. w.

und folglich, wenn man diese Ausdrücke von m_2, m_3, m_4, m_5, ... mit den vorhergehenden Ausdrücken derselben Grössen vergleicht, offenbar:

$$2c_3 \,.\, \mu_4 = \mu_2 + \mu_3,$$
$$2c_4 \,.\, \mu_5 = \mu_3 + \mu_4,$$
$$2c_5 \,.\, \mu_6 = \mu_4 + \mu_5,$$
$$2c_6 \,.\, \mu_7 = \mu_5 + \mu_6,$$

u. s. w.

folglich

$$\mu_4 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2c_3},$$
$$\mu_5 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2c_4},$$
$$\mu_6 = \frac{\mu_4 + \mu_5}{2c_5},$$
$$\mu_7 = \frac{\mu_5 + \mu_6}{2c_6},$$

u. s. w.

Weil nach dem Obigen offenbar

$$\mu_2 = \frac{1}{2c_1}, \quad \mu_3 = \frac{1 + 2c_1}{2c_1 \,.\, 2c_2}$$

ist; so ist, wenn man $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 1$ setzt,

$$\mu_2 = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2c_1}, \quad \mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2c_2}.$$

Setzt man auf ähnliche Art

$$n_0 = 2c_1 \,.\, \nu_2,$$
$$n_1 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, \nu_3,$$
$$n_2 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, \nu_4,$$
$$n_3 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, \nu_5,$$
$$n_4 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, 2c_5 \,.\, \nu_6,$$
$$n_5 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, 2c_5 \,.\, 2c_6 \,.\, \nu_7,$$

u. s. w.

so ist nach dem Obigen

$$n_2 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, (\nu_2 + \nu_3),$$
$$n_3 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, (\nu_3 + \nu_4),$$
$$n_4 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, (\nu_4 + \nu_5),$$
$$n_5 = 2c_1 \,.\, 2c_2 \,.\, 2c_3 \,.\, 2c_4 \,.\, 2c_5 \,.\, (\nu_5 + \nu_6),$$

u. s. w.

und folglich

$$2c_3 \,.\, \nu_4 = \nu_2 + \nu_3,$$
$$2c_4 \,.\, \nu_5 = \nu_3 + \nu_4,$$
$$2c_5 \,.\, \nu_6 = \nu_4 + \nu_5,$$
$$2c_6 \,.\, \nu_7 = \nu_5 + \nu_6,$$

u. s. w.

also

$$\nu_4 = \frac{\nu_2 + \nu_3}{2c_3},$$
$$\nu_5 = \frac{\nu_3 + \nu_4}{2c_4},$$
$$\nu_6 = \frac{\nu_4 + \nu_5}{2c_5},$$
$$\nu_7 = \frac{\nu_5 + \nu_6}{2c_6},$$

u. s. w.

Weil nach dem Obigen offenbar

$$\nu_2 = \frac{1}{2c_1}, \quad \nu_3 = \frac{1}{2c_1 \,.\, 2c_2}$$

ist; so ist, wenn man $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 0$ setzt,

$$\nu_2 = \frac{\nu_0 + \nu_1}{2c_1}, \quad \nu_3 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2c_2}.$$

Ueberhaupt hat man also zur Berechnung der Grössen

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \ldots;$$
$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \ldots$$

die folgenden Ausdrücke:

$$\mu_0 = 0, \qquad \nu_0 = 1;$$
$$\mu_1 = 1, \qquad \nu_1 = 0;$$
$$\mu_2 = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2c_1}, \; \nu_2 = \frac{\nu_0 + \nu_1}{2c_1};$$
$$\mu_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2c_2}, \; \nu_3 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2c_2};$$
$$\mu_4 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2c_3}, \; \nu_4 = \frac{\nu_2 + \nu_3}{2c_3};$$
$$\mu_5 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2c_4}, \; \nu_5 = \frac{\nu_3 + \nu_4}{2c_4};$$
$$\mu_6 = \frac{\mu_4 + \mu_5}{2c_5}, \; \nu_6 = \frac{\nu_4 + \nu_5}{2c_5};$$
u. s. w. u. s. w.

Hat man auf diese Weise die in Rede stehenden Grössen berechnet, so sind die Partialbrüche des oben für y gefundenen Kettenbruchs offenbar nach der Reihe:

$$\frac{\mu_2}{\nu_2}, \frac{\mu_3}{\nu_3}, \frac{\mu_4}{\nu_4}, \frac{\mu_5}{\nu_5}, \frac{\mu_6}{\nu_6}, \ldots\ldots$$

Clausen hat seine Methode erläutert und ihre Zweckmässigkeit nachgewiesen an dem aus dem Mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 390. entlehnten Beispiele

$$x^3 - 2100\, x - 24000 = 0,$$

wobei wir jedoch hier nicht länger verweilen wollen, da die Rechnung nach den obigen Formeln keine Schwierigkeit hat.

Nach dem Obigen sind die Grössen $c, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots.$ sämmtlich kleiner als die Einheit. Leicht kann man aber auch zeigen, dass dieselben fortwährend wachsen, und sich daher der Einheit immer mehr und mehr nähern. Es ist nämlich überhaupt

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}},$$

und folglich

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2c_n^2}} = \sqrt{\frac{1}{2c_n} + \frac{1}{2c_n^2}}.$$

Weil nun $c_n < 1$, also auch $c_n^2 < 1$ ist, so ist $2c_n < 2$, so wie $2c_n^2 < 2$, und folglich

$$\frac{1}{2c_n} > \frac{1}{2}, \; \frac{1}{2c_n^2} > \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{1}{2c_n} + \frac{1}{2c_n^2} > 1, \; \sqrt{\frac{1}{2c_n} + \frac{1}{2c_n^2}} > 1,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} > 1 \text{ oder } c_{n+1} > c_n,$$

wie behauptet wurde. G.

Der vorliegende vierte Theil enthält manches Eigenthümliche, wie z. B. einen allgemeinen Beweis der bekannten Ausdrücke für sin $(\alpha \pm \beta)$ und cos $(\alpha \pm \beta)$, Einiges in der Behandlung der Kugeldreiecke, in der analytischen Darstellung der Lehre von den Linien des zweiten Grades, u. s. w. In der Trigonometrie namentlich sind die den verschiedenen Aufgaben beigefügten vollständig ausgerechneten Beispiele eine sehr zweckmässige Zugabe und gewähren jedenfalls dem Lehrer grosse Erleichterung bei'm Unterrichte. Auch hat der Herr Vf. überall, wo es die Natur des Gegenstandes gestattete, die Anwendungen, welche sich von den vorgetragenen theoretischen Lehren machen lassen, besonders berücksichtigt, welches der Belebung des Vortrags und der Erhöhung des Interesses der Schüler an dem mathematischen Unterrichte nicht anders als äusserst förderlich sein kann. Gutes Papier und deutlicher Druck dienen dem Buche ebenfalls sehr zur Empfehlung.

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik von L. B. Francoeur. Nach der vierten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe (1837) aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen, von Dr. E. Külp, Lehrer der Math. und Physik an der höhern Gewerbschule zu Darmstadt. Ersten Bandes erstes Buch. Die Arithmetik. Ersten Bandes zweites Buch. Die niedere Algebra. Ersten Bandes drittes Buch. Die Elementar-Geometrie. Ersten Bandes viertes Buch. Die analytische Geometrie in der Ebene. Zweiten Bandes erstes Buch. Die höhere Algebra. Bern, Chur und Leipzig. 1839—1841.

Francoeur's Werk über die gesammte reine Mathematik ist in Deutschland hinreichend bekannt und in Frankreich wegen seiner Deutlichkeit und Vollständigkeit sehr beliebt, wovon schon die wiederholten Auflagen desselben hinreichend zeugen. Seine Uebertragung in's Deutsche, wenn wir dieselbe auch nicht gerade für ein Bedürfniss halten können, erscheint doch, wie auch der Herr Uebersetzer in der Vorrede bemerkt, dadurch gerechtfertigt, weil wir im Deutschen unsers Wissens kein Werk besitzen, in welchem sich die gesammte reine Mathematik von ihren niedrigsten bis zu ihren höchsten Theilen in einem systematischen Zusammenhange, wie dies in dem Werke von Francoeur versucht worden ist, dargestellt findet. Wir glauben daher, dass in dieser Beziehung die vorliegende Uebersetzung, welche als solche nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint, der französischen Sprache unkundigen Lesern erwünscht und angenehm sein wird. In's Einzelne einzugehen, verbietet uns hier um so mehr die Beschränktheit des Raums, je mehr wir uns vorauszusetzen berechtigt halten, dass das Original auch in Deutschland längst hinreichend bekannt ist. Der Herr Uebersetzer wird gewiss auch die noch übrigen, die höhere Analysis betreffenden Theile bald folgen lassen.

Lehrbuch der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt von J. A. Grunert. Zweiter Theil. Zweite Abtheilung. Geodäsie oder die Lehre vom Auf-

Schüler ein sehr wesentliches Erforderniss zum Gedeihen des mathematischen Unterrichts, wenn sich vorzüglich der Lehrer die möglichst gleichmässige Ausbildung einer ganzen Klasse zur Aufgabe gemacht hat, und hat auch noch vielfachen andern Nutzen für die allgemeine geistige Ausbildung des Schülers. Und wenn wir auch, unter der nie zu erlassenden Bedingung, dass der Lehrer seinen Vortrag streng an ein gutes Lehrbuch anschliesst, zur Ersparung von Zeit die Ausarbeitung des sogenannten Hauptheftes aufzugeben oder vielmehr in den eigenen Willen und Fleiss der Schüler zu stellen uns entschliessen möchten, so würden wir doch niemals die mit grösster Sauberkeit und grösstem Fleisse auszuführende Ausarbeitung des sogenannten Uebungsheftes erlassen, wodurch u. A. der Schüler eine Sammlung von nicht in den gewöhnlichen Lehrbüchern stehenden Sätzen und Aufgaben erhält, die für ihn von bleibendem Werthe sein, und ihm den grössten Gewinn für seine mathematische Bildung bringen muss. Ungefähr wenigstens in gleichem Sinne spricht auch der Herr Herausgeber sich aus.

Olivier: Arithmétique usuelle, cours complet de calcul théorique et pratique. Paris. 1841. 12. 2 Fr. 50 c.

Raccolta di problemi di Aritmetica, proposti sopra casi i piu frequenti nella vita commune e disposti coi respettivi risultati in ordine ai paragrafi di testi superiormente prescritti nelle scuole elementari del regno Lombardo-Veneto da Antonio Clementini. Vicenza, 1841. — Quattro parti in due fascicoli.

Saigey: Les poids et mesures du système métrique dans leurs simplicité primitive. 6me édition. Paris. 18. 15 Fr.

Die Reihenfolge der Elemente bei den Versetzungen mit und ohne Wiederholungen aus einer oder mehrern Elementen-Reihen und ihre Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, nebst einer Berechnung des Vortheils der Bank bei dem Pharao, mit fünf Tabellen. Von Dr. L. Oettinger, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Freiburg 1841. 4. 16 ggr.

Die in dieser lesenswerthen Abhandlung aufgelösten und auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandten combinatorischen Probleme sind folgende:

Die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ zur $p$ten Klasse werden gebildet. Wie gross ist die Anzahl derjenigen Gruppen, worin wenigstens k Elemente in der natürlichen Ordnung ihrer Stellenzahlen hinter einander erscheinen?

Die Versetzungen ohne Wiederholungen aus den Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ zur $p$ten Klasse werden gebildet. Wie gross ist die Zahl der Gruppen, worin wenigstens k Elemente in der Reihenfolge ihrer Stellenzahlen erscheinen?

Die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen werden zur (ps)ten Klasse gebildet und in s Abtheilungen geschieden angenommen. Die p Elemente einer jeden Abtheilung werden als

zusammengehörig betrachtet. Wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin p zusammengehörige Elemente nur eine und dieselbe Stellenzahl tragen?

Die Versetzungen ohne Wiederholungen aus r Elementenreihen, von denen jede m Elemente zählt, werden zur (ps)ten Klasse gebildet und in s Abtheilungen zu je p Elementen geschieden angenommen. Die p Elemente einer jeden Abtheilung werden als zusammengehörig betrachtet. Wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin p, in eine Abtheilung gehörige, Elemente nur eine und dieselbe Stellenzahl tragen?

Die Versetzungen mit Wiederholungen werden aus m Elementen zur $p$ten Klasse gebildet. Wie gross ist die Anzahl der Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens $k$mal hinter einander erscheinen wird?

Die Versetzungen ohne Wiederholungen aus r Elementenreihen, von denen jede m Elemente zählt, werden zur $p$ten Klasse gebildet. Wie gross ist die Zahl der Gruppen, worin wenigstens k Elemente von einer und derselben Stellenzahl hinter einander erscheinen?

Ausserdem enthält diese Abhandlung noch eine Anwendung auf die Berechnung des Vortheils der Bank beim Pharao, welche hier vollständiger als irgendwo von zwei verschiedenen Ansichten aus entwickelt und durch die fünf beigefügten Tabellen, wenn sie in bestimmten Fällen numerisch ausgeführt werden soll, erleichtert wird.

The Theory of Equations. By the Rev. Robert Murphy. 4s. cloth.

Gregory Differential and integral calculus. [illegible]

Geometrie.

Die ersten Elemente der Geometrie und Trigonometrie von M. [illegible], Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Bern. [illegible] Leipzig [illegible]

In der ebenen Geometrie und [illegible] Legendre [illegible] Trigonometrie [illegible] Lefébure de Fourcy. Die Darstellung ist [illegible] und das Buch kann in den Händen eines geschickten Lehrers mit Nutzen beim Unterricht gebraucht werden. [illegible] haben wir nicht gefunden [illegible]

liegen, und in jedem solchen *n*seite keine vier Ebenen durch einen und denselben Punkt gehen,

was auf die Allgemeinheit der Betrachtungen ohne Einfluss ist, da sich aus diesen Gestalten alle übrigen mit Leichtigkeit ableiten lassen.

Werden im *n*eck drei nicht benachbarte Seiten bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt erweitert, und im *n*seit drei nicht benachbarte Scheitel durch eine Ebene verbunden, so entsteht bezüglich ein Nebenscheitel oder eine Nebenseite. Die Nebenkanten aber gehen dort aus der Verbindung zweier nicht benachbarten Scheitel, und hier aus der Begegnung zweier nicht benachbarten Seiten hervor.

Aus jenen Bestimmungen folgt unmittelbar, dass in allen solchen *n*ecken alle Seiten, und in allen solchen *n*seiten alle Ecken dreikantig sind, während dort die Ecken und hier die Seiten mehrkantig sein können.

Da es zu jedem solchen *n*ecke ein correspondirendes *n*seit giebt, so dass immer einer *m*kantigen Ecke in jenem eine *m*kantige Seite in diesem, und umgekehrt, entspricht, so hat der Vf. die Vielseite zunächst ganz ausser Acht gelassen und sich auf die Betrachtung der Vielecke beschränkt.

Hierauf hat der Vf. die Grundeigenschaften dieser Körper näher betrachtet und gezeigt, wie man auf recurrirende Weise alle möglichen zu denselben *n* Scheiteln gehörigen körperlichen *n*ecke angeben, ihren Seiten und Kanten nach vollständig bezeichnen, deren Anzahl bestimmen und zugleich diese Vielecke nach der Beschaffenheit ihrer Ecken classificiren kann.

Legt man durch einen Punkt p, welcher mit keinen drei Scheiteln eines gegebenen körperlichen *n*ecks in einerlei Ebene liegt, und durch eine continuirliche in sich selbst zurückkehrende Folge von Kanten dieses Vielecks eben so viele Ebenen und lässt das von jener Umkantung begrenzte Stück der Vielecksoberfläche verschwinden, so entsteht unter gewissen Beschränkungen durch eine solche Entseitung, die auch zugleich eine Entkantung werden kann, ein Polyeder von $(n+1)$ Scheiteln, welches 2 Seiten und 3 Kanten mehr hat, als das ursprüngliche.

Hieraus wird gefolgert, dass jedes solche einfache *n*eck $2(n-2)$ Seiten und $3(n-2)$ Kanten etc., und eben so jedes *n*seit $2(n-2)$ Ecken und $3(n-2)$ Kanten etc. hat.

Sollen nun zunächst alle zu denselben fünf Scheiteln gehörenden einfachen Fünfecke aufgefunden werden, so ergiebt sich aus den verschiedenen Entseitungsweisen des Tetraeders, dass nur zehn verschiedene Fünfecke möglich sind. Werden eben so die Sechsecke aus den Fünfecken abgeleitet, so erhält man $(180+15)$ verschiedene Polyeder, welche durch dieselben sechs Scheitel bestimmt werden u. s. w.

Diese Vielecke lassen sich nach bestimmten Gesetzen durch ihre Seiten ausdrücken, wozu bis einschliesslich zu allen Siebenecken die Vorschriften gegeben sind.

Auch lassen sich die zu einerlei Scheiteln gehörigen Formen nach den Anzahlen der darin vorkommenden 3-, 4-, 5-, . ., $(n-1)$-kantigen Ecken gruppiren. So enthält jedes Fünfeck 2 dreikantige und 3 vierkantige Ecken was der Vf. mit $2_3\ 3_4$ bezeichnet hat; während im Sechseck entweder alle Ecken vierkantig oder 2 Ecken

strebt, zu entsprechen und gemäss zu sein scheint, weshalb auch durch das vorliegende Buch das Studium anderer, allgemeiner gehaltener Werke über analytische Geometrie durchaus nicht überflüssig gemacht werden, sondern vielmehr einem Jeden, wer die analytische Geometrie in ihrem eigentlichen Wesen kennen lernen will, sehr anzurathen sein dürfte. Für den ersten Unterricht kann aber, wohin wir uns schon oben ausgesprochen haben, das vorliegende Buch einem jeden, der sichern Leitung eines Lehrers entbehrenden Anfänger recht sehr empfohlen werden. Als Einleitung sind Betrachtungen über das Wesen, den Zweck und den praktischen Nutzen der analytischen Geometrie vorausgeschickt.

Das Programm der Realschule zu Düsseldorf von Michaelis 1841 enthält die folgenden Abhandlungen:

Beschreibung einer neuen Blasmaschine am mineralogischen Löthrohr von Joseph Duhr.

Einige neue Lehrsätze, aufgestellt und bewiesen von dem Director Dr. Franz Heinen.

Beide Abhandlungen sind beachtungswerth. Die von Herrn Director Heinen mitgetheilten neuen geometrischen Lehrsätze betreffen sämmtlich die Kegelschnitte und lassen sich auch bei'm Unterrichte zweckmässig als Uebungen benutzen. Wir werden von denselben vielleicht künftig Einiges in dem Archive mittheilen.

Praktische Geometrie.

Geodäsie oder die Lehre vom Aufnehmen, das Nivelliren und die Markscheidekunst von Joh. Aug. Grunert (Lehrbuch der Mathematik und Physik für staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten und Kameralisten überhaupt. Zweiter Theil. Zweite Abtheilung). Mit dreizehn Figurentafen. Leipzig. 1842. 8.

Bloss mit Hülfe elementarer Lehren der Mathematik führe ich in diesem Lehrbuche der Geodäsie den Lehrling so weit, dass er als Schlussstein seines Wissens lernt, wie bei Messungen von grösserer Ausdehnung die sphärische Gestalt der Erde mit Hülfe des Legendre'schen Theorems zu berücksichtigen ist. Um so wenig als möglich Vorkenntnisse vorauszusetzen, habe ich selbst die sphärische Trigonometrie ausgeschlossen und Alles bloss mit Hülfe der ebenen Trigonometrie entwickelt, wobei es natürlich erforderlich war, einige nothwendige Sätze der sphärischen Trigonometrie in den Vortrag selbst mit zu verflechten. Auf die Beschreibung und Berichtigung der Instrumente, unter diesen auch des Heliotropen, ist vorzügliche Sorgfalt verwandt worden. Besonders habe ich mich eines systematischen Ganges befleissigt, der öfters in den Lehrbüchern der Geodäsie vermisst wird. Was mir eigenthümlich ist, werden Kenner leicht herausfinden; jedoch möchte ich auf die

ganz elementare Theorie der Fehler der Dreiecke, auf die Theorie des Höhenmessens mit dem Barometer, welche, wie ich glaube, mit solcher Strenge und Evidenz wie in diesem Werke bloss durch ganz elementare Hülfsmittel noch nicht entwickelt worden ist, auf die Lehre von der terrestrischen Strahlenbrechung und auf die Beweise der bekannten Reihen für sin x und cos x im siebzehnten Kapitel besonders aufmerksam zu machen und hinzuweisen mir erlauben. Auf die neuesten Methoden ist natürlich überall vorzugsweise Rücksicht genommen worden, und vorzügliche Aufmerksamkeit habe ich insbesondere der Coordinatenmethode gewidmet die nach meiner Meinung nicht genug empfohlen werden kann, und in den meisten ältern Lehrbüchern der Geodäsie leider nur zu sehr vernachlässigt oder ganz oberflächlich behandelt wird. Ueber die genauen Methoden zur Messung einer Basis und die dabei nothwendigen verschiedenen Berücksichtigungen ist auch ziemlich ausführlich gehandelt worden, und so glaube und wünsche ich, dass dieses Lehrbuch der Geodäsie geeignet sein möge, ältere zum Theil weit voluminösere Werke über seinen in jeder Beziehung so höchst wichtigen Gegenstand nicht bloss auf eine zweckmässige Weise zu ersetzen, sondern den Lehrling selbst einen ziemlichen Schritt weiter zu führen, als in diesen ältern Werken geschieht, und mit den Fortschritten, welche die Geodäsie in neuerer Zeit gemacht hat, innerhalb der durch den Zweck des Werks nothwendig gesteckten Gränzen, bekannt zu machen.

Zugleich benutze ich diese Veranlassung, die Leser dieses Lehrbuchs der Geodäsie darauf aufmerksam zu machen, dass sich auf S. 133 bei einem übrigens höchst elementaren Gegenstande ein Rechnungsfehler eingeschlichen und bis auf S. 134 fortgepflanzt hat, worauf ich, was hier mit dem verbindlichsten Danke zu bemerken meine Pflicht ist, zuerst von H. Prof. Dr. von Langsdorff in Mannheim aufmerksam gemacht worden bin. Diesen Fehler zu verbessern ist hier nicht der Ort, und ich bemerke daher nur, dass der noch in diesem Jahre erscheinenden 1sten Abth. des 2ten Theils ein, die richtigen Formeln enthaltender Carton beigelegt werden soll, welcher übrigens auch schon jetzt durch jede Buchhandlung von der Schwickertschen Buchhandlung in Leipzig unentgeldlich bezogen, und statt des fehlerhaften Blattes eingeheftet werden kann.

Grunert.

Trigonometrie.

Ein Schema zur Erleichterung des Elementarunterrichts in der Trigonometrie u. s. w. von Dr. E. W. Grebe, ordentlichem Hauptlehrer am Gymnasium zu Cassel. Cassel, 1840. 4.

Das in dieser Schrift mitgetheilte zweckmässige Hülfsmittel zur genauen Einprägung der Grundformeln der Geometrie und Trigonometrie in das Gedächtniss verdient Lehrern der Mathematik zur Beachtung empfohlen zu werden.

A. F. Padley: Solutions of trigonometrical problems, together with problems for exercise. 8. 4½ sh.

Mechanik.

Navier: Résumé des leçons de mécanique données à l'école Polytechnique. Paris. 1841. 8. 9 Fr.

Die Mechanik in Anwendung auf Künste und Gewerbe. Zweite Abtheilung. Die Mechanik flüssiger Körper. Für Praktiker bearbeitet von Dr. W. A. Rüst, Docenten an der Univers. zu Berlin. Berlin. 1841. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Den 1sten Theil s. Nr. II. S. 34.

Die geometrischen Constructionen der ebenen und konischen excentrischen Rad- und Zahn-Curven. Für den Selbstunterricht bearbeitet von Theodor Schönemann. Berlin. 1842. 8. 16 ggr.

Auch in geometrischer Beziehung beachtungswerth.

Favier: Essai sur les lois du mouvement de traction et leur application au tracé des voies de communication. Paris. 1841. 8. 6 Fr. 50 c.

Astronomie.

Astronomische Untersuchungen von Friedrich Wilhelm Bessel. Erster Band. Königsberg. 1841. 4. 6 Thlr.

Der Inhalt dieses höchst wichtigen Werkes ist folgender:

I. Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatoreal-Instruments.

II. Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte.

III. Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen.

IV. Einfluss der Präcession, Nutation und Aberration auf die Resultate mikrometrischer Messungen.

V. Beobachtungen verschiedener Sterne der Plejaden.

VI. Ueber die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe.

VII. Beobachtungen der gegenseitigen Stellungen von 38 Doppelsternen.

VIII. Ueber den Doppelstern p Ophiuchi.

Die Abhandlungen II., IV., V. sind ganz neu. Ueber die Ge-

genstände der übrigen Abhandlungen hat **Bessel** schon früher theils in den Königsberger Beobachtungen, den Astronomischen Nachrichten, der monatlichen Correspondenz und den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften Arbeiten bekannt gemacht. Fast alle diese frühern Abhandlungen werden aber hier theils mit vielen Zusätzen bereichert, theils ganz neu bearbeitet geliefert, und überhaupt ist nach des berühmten Vfs. eigner Angabe „die Veranlassung des gegenwärtigen Werkes nicht sowohl „der Wunsch, frühere Abhandlungen und Aufsätze an Einem Orte „zusammenzustellen, als das, durch Vermehrung der Hülfsmittel zu „einer Untersuchung, oder durch Erlangung besserer Einsicht in „ihre Natur, in vielen Fällen herbeigeführte Bedürfniss, an frühere „Arbeiten mehr oder weniger wesentliche Verbesserungen anzu„bringen.“ Die sonst ganz neue Abhandlung Nr. VI. enthält auch in §. 13.—§. 16. die von dem Vf. in Schumachers astronomischen Nachrichten. Nr. 415. abgesondert bekannt gemachten Untersuchungen über die Grundformeln der Dioptrik, welches wir hier wegen der Wichtigkeit und Merkwürdigkeit dieser Untersuchungen besonders hervorheben. In der Bibliothek keines Astronomen wird dieses in so vielen Beziehungen ausgezeichnete und wichtige Werk, zu dessen Fortsetzung wir dem berühmten Vf. Kraft und Gesundheit wünschen, fehlen dürfen.

Kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1842. Vorzüglich zum Gebrauch der Seeleute herausgegeben von Herrmann Karsten, Prof. der Math. und Phys. an der Universität zu Rostock. Dritter Jahrgang. Rostock. 8. 12 ggr.

Diese kleine, sehr zweckmässig für den Meridian von Greenwich berechnete Ephemeride wird gewiss den Schiffern willkommen und nützlich sein. Aber auch mancher Liebhaber der Astronomie, dem die grösseren Ephemeriden zu theuer sind, wird dieselben mit Nutzen gebrauchen können, da sie überhaupt zweckmässig eingerichtet sind und das bei Beobachtungen Unentbehrlichste ziemlich vollständig enthalten.

Astronomisches Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforscher und Geologen mit den für das Jahr 1842 vorausbestimmten Erscheinungen am Himmel. Herausgegeben von Fr. v. P. Gruithuisen. Viertes Jahr. Mit drei lithographirten Tafeln. München. 1842. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Physik.

Lehrbuch der Physik von Dr. J. Götz, Prof. am Gymnasium zu Dessau. Dritter Band. Mit drei Figurentafeln. Berlin. 1842. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Auch unter dem besondern Titel:

Die wichtigsten Lehren aus der Astronomie und Meteorologie von u. s. w.

Für ein Lehrbuch der Physik enthält dieser dritte Band insbesondere die Lehren der Astronomie ziemlich ausführlich. So enthält z. B. §. LXXXIII. auch die Olbers'sche Methode zur Berechnung der Cometenbahnen aus drei geocentrischen Beobachtungen, aber bloss die Formeln, nach denen die Rechnung zu führen ist, ohne deren Entwickelung. Offen müssen wir gestehen, dass wir eine solche blosse Aufstellung von Formeln, ohne Angabe der Gründe, auf denen dieselben beruhen, am wenigsten in einem Lehrbuche für Anfänger zweckmässig finden können, auch selbst für nutzlos halten müssen. Auch wird gewiss Niemand die bei der Bestimmung einer Cometenbahn nöthigen Rechnungen mit Sicherheit ausführen können, wenn er nicht so viele mathematische Kenntnisse besitzt, welche nöthig sind, um sich eine deutliche Einsicht in die Gründe, auf denen die bei einer solchen Rechnung erforderlichen Formeln beruhen, verschaffen zu können. Die Meteorologie scheint uns in einem Lehrbuche der Physik im Verhältniss zur Astronomie zu kurz behandelt, und berücksichtigt zu wenig die neueren grossen Fortschritte dieser Wissenschaft.

Pinaud: Programme d'un cours élémentaire de Physique. 2me édition. Toulouse. 1841. 8. 6 Fr.

Soubeiran: Précis élémentaire de physique, ou Traité de physique facil. Paris. 1841. 8. 6 Fr. 50 c.

A. Boucharlat: Cours des sciences physiques. 16. 3½ Fr.

Beweisführung, dass die Lehre der neueren Physiker vom Drucke des Wassers und der Luft falsch ist, nebst einem Versuche, die Erscheinungen an flüssigen Körpern ohne atmosphärischen Luftdruck zu erklären. Von Friedrich von Drieberg. Berlin. 1841. 8. 8 ggr.

Der Titel dieser Schrift characterisirt dieselbe hinreichend, und wir können hier den Raum zu etwas besserem als zu einer Relation über dieselbe oder gar zu einer Widerlegung benutzen.

The undulatory Theory, as applied to the Dispersion of Light; including in the substance of several Papers printed in the Philosophical Transactions, and other Journals. By the Rev. Baden Powell, Savilian Professor in the University of Oxford. 8. 9 s.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag, in Verbindung mit mehreren Mitarbeitern ausgeführt und auf öffentliche Kosten herausgegeben von Karl Kreil, Adjuncten der k. k. Sternwarte und ordentlichem Mitgliede der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Erster Jahrgang: Vom 1. Juli 1839 bis 31. Juli 1840. Prag, 1841. 4. 4 Thlr. 8 ggr.

Es ist höchst erfreulich zu sehen, wie viel jetzt auf öffentliche Kosten für Magnetismus und Meteorologie geschieht, und wie viele

„ausdrücklich mathematischen Betrachtung derselben abgehalten „zu haben; denn da sie in der That auf die elementarsten Sätze „der Proportionslehre zurückkommen, glaubte man in den Lehr-„büchern der Chemie nur auf diesen Umstand hinweisen und sich „auf einzelne Beispiele der Anwendung beschränken zu dürfen; „ein Verfahren, das man sogar in den Schriften über Stöchio-„metrie beobachtet findet, denen es — so weit dieselben mir be-„kannt geworden sind — nicht an vielfachen und interessanten „Beispielen numerischer Berechnung, wohl aber an einer genügen-„den, rein-mathematischen Begründung derselben fehlt. „Unter solchen Umständen erschien es mir der Mühe nicht unwerth, „den Gegenstand ausschliesslich von dieser Seite zu betrachten, um „für die unendliche Mannigfaltigkeit specieller Fälle allgemeine „Sätze und Regeln in der kurzen und präcisen Ausdrucksweise der „Mathematik zu gewinnen, wodurch die folgenden Mittheilungen „veranlasst wurden."

Und wir fügen hier bloss noch hinzu, dass nach unserer Ueberzeugung der Herr Vf. durch diese Mittheilungen seinen löblichen Zweck recht gut erreicht hat.

Vermischte Schriften.

Der erste Band der Acta Societatis Fennicae *) enthält die folgenden mathematischen Abhandlungen:

Ueber die Grundprincipien der Algebra.

Ueber die geometrische Theorie der körperlichen Winkel.

Ueber die Bestimmung der dritten Seite eines geradlinigen Dreiecks aus den beiden andern und dem eingeschlossenen Winkel.

Ueber die Theorie der Maxima und Minima.

Vorstehende Abhandlungen haben sämmtlich Herrn Professor von Schulten zum Verfasser, und sind französisch geschrieben.

Ueber die Vereinfachung einiger trigonometrischen Formeln von Herrn Borenius (lateinisch).

Ausserdem enthält dieser Band noch drei Abhandlungen meteorologischen Inhalts von Herrn Professor Hällstroem.

Möge die Gesellschaft in ihrer rühmlichen Thätigkeit fortfahren. Wir werden nicht ermangeln, jederzeit so bald als irgend möglich den Inhalt ihrer Acten, und Auszüge aus denselben in dieser Zeitschrift mitzutheilen.

---

*) Die nur erst vor einigen Jahren gestiftete Gesellschaft der Wissenschaften zu Helsingfors in Finnland hat schon jetzt eine höchst rühmliche Thätigkeit entwickelt. Herr Professor Nathanael Gerhard von Schulten ist beständiger Sekretair derselben.

Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Fünfter Folge erster Band. Von den Jahren 1837—1840. Prag, 1841. 4.

Dieser erste Band der fünften Folge der Abhandlungen der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften enthält die folgenden kleinern oder grössern mathematischen und physikalischen Aufsätze und Abhandlungen:

Neuer analytischer Beweis des Satzes vom Parallelogramme der Kräfte. Von Prof. Dr. J. P. Kulik. S. 2.

Ueber einen neuen elektromagnetischen Inductions-Apparat und dessen sehr kräftige physiologische Wirkungen (Erschütterungen). Von Prof. Hessler. S. 12.

Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie. Entworfen von Prof. Dr. J. P. Kulik. Prag. 1838.

Versuch einer analytischen Behandlung beliebig begrenzter und zusammengesetzter Linien, Flächen und Körper; nebst einer Anwendung davon auf verschiedene Probleme der Géometrie descriptive und Perspective. Von Prof. C. Doppler. Prag. 1839.

Jede dieser Abhandlungen bietet ein eigenthümliches Interesse dar.

Denkschriften der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 13r Bd. und 16r Bd. 1ste Abth. Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. 2r Bd. und 3r Bd. 1ste Abth. die Abhandlungen aus den Jahren 1831 bis 1840 enthaltend. München. 1837, 40. n. 8 Thlr.

Novi Commentarii Academiae scientiarum Instituti Bononiensis. Tom. IV. V. enthalten die folgenden mathematischen Abhandlungen: Jos. Venturoli: Altitudines Tiberis ad hydrometrum romanum quotidie sub meridiem observatae; Pet. Callegari: De nova solutione problematis Fermatii nec non aliorum quae ex iisdem formulis deducuntur; Fr. Bertelli: De inflexione laterum in micrometris; Al. Casinelli: Nova methodus evehendi ad potentiam quamcunque quantitates polynomias; Ders.: De aequationum algebraicarum resolutione observationes analyticae.

J. A. Coombe: Solutions of the Cambridge problems for 1840 and 1841. 8. 8½ sh.

Wichtige Nachricht.

Die Akademie der Wissenschaften zu Petersburg hat auf den Antrag ihres Sekretairs, des Herrn Staatsraths von Fuss Excellenz, beschlossen, eine Sammlung bisher ungedruckter Briefe des ältern Johann Bernoulli, seines Sohnes Daniel Bernoulli, von Nicolaus Bernoulli, Gabriel Cramer, Lambert, Naudé, Poleni, Goldbach an Leonhard Euler, und zugleich der in

den Central-Archiven zu Moscau aufgefundenen Antworten Eulers auf die Briefe von Goldbach herauszugeben. Alle diese Briefe betreffen Gegenstände der Wissenschaft, und sollen in jeder Beziehung, insbesondere aber für die Geschichte der Mathematik wichtig sein und das grösste Interesse gewähren. Zugleich beabsichtigt Herr Staatsrath von Fuss dieser Sammlung von Briefen ein vollständiges und mit der grössten Sorgfalt angefertigtes Verzeichniss aller Abhandlungen Eulers, deren Zahl, ohne die grössern separat gedruckten Werke, 700 übersteigt, mit einer genauen Nachweisung der Schriften, in denen dieselben abgedruckt sind, vordrucken zu lassen. Der Herausgeber des Archivs hält es für seine Pflicht, die Leser desselben auf dieses in jeder Beziehung wichtige und zeitgemässe Unternehmen, durch welches die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften sich gewiss alle Mathematiker zu dem grössten Danke verpflichten wird, aufmerksam zu machen, und seine Zeitschrift zu benutzen, die Nachricht von demselben in einem möglichst weiten Kreise zu verbreiten. In Schumachers astronomischen Nachrichten. N. 437. S. 91 findet man den Extrait du procès verbal de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersbourg du 24. Septembre (6. Octobre) 1841 abgedruckt, welcher das Weitere und Nähere über das in Rede stehende wichtige und höchst interessante Unternehmen enthält.

G.

VI.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Von des Herausgebers des Archivs bekanntem Lehrbuche der Mathematik für die obern Classen höherer Lehranstalten. 4 Theile. Brandenburg bei Wieseke erscheint jetzt die dritte Auflage, und zwar zuerst von dem zweiten, die Stereometrie enthaltenden Theile. Die neue Auflage dieses Theils wird in den nächsten Tagen versandt werden.

Die Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössen-Lehre. Als Leitfaden für den mathematischen Unterricht an den Königl. Artillerie-Brigade-Schulen, so wie zum Selbstunterricht für die Avancirten der Artillerie bearbeitet von F. M. Rost, Prem. Lieut. und Lehrer. Berlin. 1842. 8. 1 Thlr.

H. Forir: Essai d'un cours de mathématiques à l'usage des élèves du collège communal de Liège. 1841. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

Arithmetik.

Elementi di Aritmetica, di G. B. Rostagno della compagnia di Gesù, ad uso delle scuole della medesima compagnia. Torino. 1841. 12.

Dr. G. F. Ursin: Arithmetik, udarbeidet med stadigt Hensyn til den praktiske Anwendelse. 1841. 8. 80 sch.

in Deutschland bis jetzt so gut wie gar nicht bekannt gewesen ist. Eine selbst auch nur kurze Darstellung dieser Methode hier zu geben liegt natürlich gar nicht in dem Zwecke dieser literarischen Berichte; jedoch hoffen wir im Archive selbst auf dieselbe zurückzukommen, und die Leser mit ihrem Wesen bekannt zu machen. Für jetzt müssen wir uns begnügen, auf die von dem Herrn Vf. selbst in der Vorrede angegebenen Vorzüge der Horner'schen Methode vor andern Methoden hinzuweisen. Derselbe sagt nämlich: „Die Vorzüge der Horner'schen Methode vor der Fouriers sind in Kürze folgende:

1. Die ungemeine Leichtigkeit der Substitution einzelner Werthe sowohl, als bei der Substitution einer arithmetischen Reihe von Werthen, wodurch die Trennung der einzelnen Wurzeln sehr erleichtert wird.

2. Viel zureichendere und schneller fördernde Kennzeichen für die Imaginarität der Wurzeln.

3. Bei der Horner'schen Methode braucht man nicht früher die gleichen Wurzeln wegzuschaffen, die Wiederholung derselben ergiebt sich selbst im Verlaufe der Rechnung.

4. Der Rechnungsprocess der einzelnen Wurzeln nach der Horner'schen Methode ist zusammenhängend, Ziffer für Ziffer wird bestimmt, und hier ist es viel mehr als bei'm Fourier'schen Verfahren der Fall, dass nicht eine einzige Ziffer mehr berechnet wird, als nothwendig ist.

Wissenschaftlich höher als unsere Methode steht die Gräffe'sche, besonders nach ihrer Verbesserung und Erweiterung durch Herrn Encke, da diese auch die imaginären Wurzeln liefert, was mir bisher nach der Horner'schen nicht gelingen wollte, obwohl ich sicher hoffe, dass für die imaginären Wurzeln ein eben so einfacher Rechnungsprocess sich auffinden lassen werde.

Was aber die reellen Wurzeln betrifft, so wird hoffentlich niemand anstehen, in Hinsicht auf praktische Berechnung derselben, der Horner'schen vor der Gräffe'schen den Vorzug einzuräumen, um so mehr, da man bei der Gräffe'schen Methode alle Wurzeln zugleich suchen muss, während doch nur die reellen für den Praktiker einen Werth haben.

Zum Schluss wollen wir den Herrn Vf. nur noch auf die Schrift:

Neue Methode, die reellen rationalen und irrationalen Wurzeln numerischer Gleichungen zu finden, von C. A. Bretschneider, Professor am Realgymnasium zu Gotha. Leipzig. 1838. 4. 12 ggr.

aufmerksam machen, in welcher gleich von vorn herein ein dem Horner'schen ganz ähnlicher Algorithmus zur Bestimmung der, gewissen gegebenen Werthen ihrer unabhängigen veränderlichen Grössen entsprechenden Werthe der ganzen rationalen algebraischen Functionen gelehrt wird, und die daher überhaupt bei diesem Gegenstande genauer verglichen zu werden verdient.

Teorica e Pratica del Probabile, dell' abate Giuseppe Bravi. Seconda edizione notabilmente accresciuta. Bergamo. 1840. 8. Due vol.

Observationes, diversa calculi differentialis princi-

gewandten Mathematik. Theil I. Brandenburg. 1838. 4. S. 222. als Grundlage für den elementaren Vortrag der Lehre von den Kegelschnitten angelegentlichst zu empfehlen sich erlaubt hat, nämlich von der folgenden Definition:

„Wenn eine gerade Linie und ein Punkt ausserhalb derselben „gegeben sind, so heisst der Ort aller Punkte in dieser Ebene, „deren Entfernungen von dem gegebenen Punkte und der gegebe-„nen geraden Linie immer dasselbe Verhältniss zu einander haben, „ein Kegelschnitt, und zwar eine Parabel, wenn das constante „Verhältniss Verhältniss der Gleichheit ist, eine Ellipse, wenn es „ein Verhältniss des Kleinern zum Grössern ist, eine Hyperbel, „wenn es Verhältniss des Grössern zum Kleinern ist."

Aus dieser Definition leitet der Herr Vf. die Haupteigenschaften der Kegelschnitte fast durchgängig nach rein geometrischer Methode auf sehr einfache Weise ab, giebt Regeln zu ihrer Construction, lehrt die Quadratur der Parabel und die Cubatur des ganzen und abgekürzten Paraboloids, welche für den Forstwirth aus hinreichend bekannten Gründen von besonderer Wichtigkeit ist. Abgesehen von der speciellen Bestimmung der Schrift empfehlen wir dieselbe überhaupt Lehrern an höhern Unterrichtsanstalten zur Beachtung bei dem Vortrage der Lehre von den Kegelschnitten, und würden uns sehr freuen, wenn dieselbe einen geeigneten Gelehrten zur Abfassung eines zwar kurzen, aber doch möglichst vollständigen Lehrbuchs der Kegelschnitte für Schulen nach rein geometrischer Methode, mit Ausschliessung aller algebraischer Rechnung und mit Zugrundelegung der obigen allgemeinen Definition der Kegelschnitte, veranlassen sollte, ein Unternehmen, von welchem wir uns sehr wesentliche Förderung des Unterrichts in der Lehre von den Kegelschnitten auf Schulen versprechen. Zunächst möchten wir natürlich den geehrten Herrn Vf. selbst zur Erweiterung seiner Schrift in der so eben näher angedeuteten Weise und für den in Rede stehenden Zweck uns aufzufordern erlauben, wozu derselbe schon als Würtemberger jedenfalls besonders befähigt ist, da bekanntlich in seinem Vaterlande die rein geometrische Methode immer besonders cultivirt worden ist und noch cultivirt wird. Dass diese Methode stets die Hauptgrundlage des mathematischen Unterrichts auf Schulen bilden und immer bleiben muss, kann nicht genug eingeschärft werden, da man, wie es uns scheint, jetzt schon bei'm mathematischen Unterrichte auf Schulen hin und wieder der Rechnung ein zu grosses Feld einräumt.

H. P. Hamiltons Analytiska Framställning af Koniska Sektionerne. Ofwersatt af C. W. Eneberg. Med Fyra Plancher. Stockholm. 1841. 8. 1 Rdr. 36 sk.

Sopra i circoli osculatori delle curve, memoria letta nella pontificia accademia dei Lincei, dal dott. L. Bruned sacerdote romano. Roma. 1840. 8.

Mechanik.

The Elements of Mechanics; designed for the use of Students in the University. By James Wood, D. D. formerly Master of St. John's College Cambridge, and Dean of Ely. A New Edition, revised, re-arranged, and enlarged, by J. C. Snowball, M. A. Fellow of St. John's college, Cambridge. 1841. 8. 8 s. 6 d.

Dissertatio de pendulo et theses quas pro munere Lectoris edidit Mag. Andreas Holmstrand Collega scholae; Resp. Carol. Petro Lindström. Scarae. 1840. 4.

De motu globuli homogenei rigidi progressivo in superficee semicylindri recti concava, ratione frictionis atque resistentiae aeris posthabita dissertatio. Praes. J. G. Björling, in Reg. Acad. Ups. Mechan. Docens; Resp. J. C. Polheimer. Holmiae. 1840. 4.

Praktische Mechanik.

Die Maschinen-Elemente und die Hydraulik. Letztere besonders auf die Berechnung und die Construction der Wasserräder angewendet. Ein Handbuch für Mechaniker, Fabrik-Dirigenten, Techniker u. s. w. von C. G. Kuppler, Prof. an der polytechnischen Schule zu Nürnberg. Auch unter dem Titel: Industrielle Mechanik. Nach Poncelet u. s. w. deutsch bearbeitet und mit Anmerkungen begleitet von C. G. Kuppler. II. Theil. Die Maschinen-Elemente und die Hydraulik. Mit 19 Kupfertafeln. Nürnberg. 1841. 8. 3 Thlr.

Von Dr. J. A. Hülsse's Maschinen-Encyclopädie (S. No. I. S. 11. des Literarischen Berichts) ist die 6ste Lieferung (1 Thlr.) erschienen.

Morin: Notice sur divers appareils dynamométriques. 2e. édit. Paris. 1841. 8. 1¼ Thlr.

luna dedotte dalle osservazioni fatte al circolo meridiano di Stark nel dicembre 1834 e negli anni 1835, 36, 37, 38 e paragonate colle tavole da Roberto Stambucchi.

Dien: Atlas des phénomènes celestes donnant le tracé des mouvements apparens des planètes. Paris. 1841. 4. 6 Thlr.

Dien: Atlas du Zodiaque. Paris. 1841. 4. 6 Thlr.

Annalen der K. K. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von J. J. und C. L. von Littrow. 20r Thl. Wien. 1840. gr. Fol. 3 Thlr. 14 ggr.

Wir werden später eine ausführliche Anzeige dieses bis jetzt uns noch nicht zugegangenen Werkes liefern.

Physik.

Ueber den relativen Werth der Naturwissenschaften für die formelle Bildung der Jugend. Fest-Rede vom Prof. Dr. Jäger. Stuttgart. 1841. 3 ggr.

Lehrbuch der Physik zum Gebrauche bei Vorlesungen und beim Unterrichte. Von W. Eisenlohr. 3te Aufl. Mannheim. 1841. 8. 2 Thlr. 8 ggr.

Es wird hier die Anzeige genügen, dass von diesem längst allgemein bekannten trefflichen Lehrbuche die 3te Aufl. erschienen ist.

Lärobok i Fysiken af W. Eisenlohr, Professor i Matem. och Fysik i Mannheim. Från Andra Originalupplagan på Swenska Utgifwen af G. A. Lundhquist, Auskultant i Kongl. Bergs-Kollegium. Med 10 Plasscher. Stockholm. 1841. 8. 3 Rdr.

Die Experimental-Physik, ein geistiges Bildungsmittel, in ihren Beziehungen zum praktischen Leben. Ein Handbuch für Lehrer an gehobenen Volks- und Bürgerschulen und technischen Anstalten von Dr. K. F. R. Schneider, Oberlehrer etc. Zweite Abtheilung: Mechanik, Atmometrie, Akustik. Dresden. 1841. 8. 16 ggr.

Das in Nr. III. S. 59 des Literarischen Berichts über die erste Abtheilung gefällte günstige Urtheil gilt auch von dieser zweiten Abtheilung.

Lehrbuch der Experimental-Physik für Real- und Gymnasial-Anstalten von Dr. C. H. Nagel, Professor der

Physische Konstitution der Sonne.
Von den Planeten.
Anblick des Himmels.

Ueber die Berechnung von Beobachtungen durch die Methode der kleinsten Quadratsummen. Vom Prof. Dr. J. A. Hülsse. Leipzig. gr. 4. ½ Thlr.

Tables psychrométriques et barométriques à l'usage des observatoires météorologiqes de l'Empire de Russie. gr. in 8. St. Petersbourg. 1841. 13 ggr.

Dass auf allen meteorologischen Observatorien in Russland alle Rechnungen und Reductionen nach denselben Tafeln gemacht werden, ist eine höchst zweckmässige Einrichtung, und wir möchten hier wohl den Wunsch aussprechen, dass auch Beobachter in andern Ländern sich zu dem Gebrauche dieser Tafeln entschliessen und vereinigen möchten. Uebereinstimmende Instrumente und Reductions-Elemente scheinen uns bei allen meteorologischen Beobachtungen ein sehr wesentliches Erforderniss zu sein.

A Manual of Electricity, Magnetism and Meteorology. By Dionysius Lardner, D. C. L. F. R. S. etc. Vol. I. 1841. 8. 6 s. cloth. Being Vol. 130 of the Cabinet Cyclopaedia. (To be completed in Three more Volumes).

Beiläufig bemerken wir hierbei, dass die Cabinet Cyclopaedia auch die folgenden früher erschienenen Abtheilungen enthält:

A Treatise on Geometry. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Hydrostatics and Pneumatics. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Arithmetic. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Heat. By Dionysius Lardner. 6 s. cloth.
A Treatise on Mechanics. By Capt. Kater and Dr. Lardner. 6 s.
A Treatise on Astronomy. By Sir John Herschel. 6 s.
A Preliminary Discourse on the study of Natural-Philosophy. By Sir J. Herschel. 6 s.
The History of Natural Philosophy. By Baden Powell. 6 s.
A Treatise on Optics. By Sir David Brewster. 6 s.
A Treatise on Chemistry. By Prof. Donovan. 6 s.
Essay on Probabilities. By Prof. Dr. Morgan. 6 s.

Geschichte der Fortschritte der Geologie und Einleitung in diese Wissenschaft. Von Carl Lyell. A. d. Engl. von Carl Hartmann. Auch unter dem Titel: Grundsätze der Geologie oder die neuen Veränderungen der Erde und ihrer Bewohner in Beziehung zu geologischen Erläuterungen. I. Band. Weimar. 1842. 8. 2 Thlr.

Den zweiten Band dieses Werkes bilden die in Nr. III. S. 61 des Literarischen Berichts angezeigten neuen Veränderungen der unorganischen Welt u. s. w., weshalb dem obigen ersten Bande auch ein besonderer Titel zu dem früher angezeigten, unmittelbar vorher namhaft gemachten Werke beigelegt worden ist.

Vermischte Schriften.

Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, tome XIV. un fort vol in 4 avec gravures et une lithographie. Bruxelles. 1841. 4 Thlr.
contenant:

Crahay: Résumé des observations météorologiques faites en 1840 à Louvain.

Quetelet: Résumé des observations sur la météorologie, sur le magnétisme, sur les températures de la terre, sur la floraison de fleurs, plantes etc., suivi des comparaisons barométriques faites à Bruxelles et dans le nord de l'Europe, par Bravais et Ch. Martins.

Mémoires couronnés par l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettre de Bruxelles, tome XV, 1re partie, 1840—1841. gr. in 4. Bruxelles. 1841. 2 Thlr.
contenant:

Moriz Stern: Recherches sur la théorie des résidus quadratiques; mémoire en réponse à la question suivante: On demande un mémoire d'analyse algébrique, dont le sujet est laissé au choix des concurrens.

Preisaufgaben.

Aufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Paris für 1843.

„Perfectionner les méthodes par lesquelles on résout le problè-„me des perturbations de la lune ou des planètes, et remplacer les „développements ordinaires en séries de sinus et de cosinus par „d'autres développements plus convergents, composés de termes pé-„riodiques que l'on puisse calculer facilement à l'aide de certaines „tables construites une fois pour toutes."

Le prix consistera en une medaille d'or de la valeur de 3000 Fr. Les mémoires devront être arrivés au secrétariat de l'Académie avant le 1er avril 1843. Ce terme est de rigueur. Les noms des auteurs seront contenus dans un billet cacheté, qui ne sera ouvert que si la pièce est couronnée.

Vorläufige Nachricht über eine neue Zeitschrift für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände.

In München erscheint vom Anfange dies Jahres an eine neue Zeitschrift unter dem Titel:

Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, redigirt von Grunert, Koller, Kreil, Lamont, Plieninger, Stieffel, herausgegeben von Dr. J. Lamont, Conservator der Königlichen Sternwarte bei München, ordentl. Mitgliede der Königl. Academie der Wissenschaften in München, u. s. w.

Der Gedanke, welchem diese Zeitschrift ihre Entstehung verdankt, ist in neuerer Zeit schon oft zu realisiren versucht worden, ohne dass diese Versuche bis jetzt mit dem Erfolge des Gelingens gekrönt worden wären. Jeder, wer sich lebhaft für Meteorologie interessirt, kennt die grossen Dienste, welche die ehemalige sogenannte Societas Palatina zu Mannheim dieser Wissenschaft geleistet hat, und weiss, dass die von derselben herausgegebenen Ephemeriden *) noch immer die wichtigste Fundgrube für meteorologische Untersuchungen sind, wobei auch der Kurfürst Carl Theodor von der Pfalz, welcher diese meteorologische Gesellschaft stiftete, den Abt Hemmer als deren Director an ihre Spitze stellte, und dieselbe in den Stand setzte, nach fernen Gegenden meteorologische Instrumente zu senden, die alle bis dahin verfertigten an Genauigkeit übertrafen und vollkommen übereinstimmend waren, stets in dem dankbarsten Andenken fortleben und in den Annalen der Meteorologie immer mit Hochachtung genannt werden wird. Ein ähnlicher allgemeiner meteorologischer Verein ist im vorigen Jahre in München gestiftet worden. Sämmtliche mitarbeitende Meteorologen erhalten sorgfältigst regulirte meteorologische und magnetische Instrumente, die in der Werkstätte der Königlichen Sternwarte bei München verfertigt und bloss gegen Erstattung der Auslagen, d. h. ungefähr zu dem dritten Theile des gewöhnlichen Preises, geliefert werden, wonach ein Barometer zu dem höchst geringen Preise von 6 Gulden, ein Doppelthermometer (eine Art Psychrometer) zu dem ebenfalls äusserst niedrigen Preise von 3 Gulden 30 Kr. abgelassen wird **). Die Beobachtungen wer-

---

*) Ephemerides Soc. meteorolog. palatinae. Historia et observationes. Manh. 1783—1792. XII. T. 4.

**) Die magnetischen Instrumente sind natürlich verhältnissmässig theurer, im Ganzen jedoch die Preise, welche einem Jeden auf Verlangen bereitwilligst mitgetheilt werden, so niedrig als nur irgend möglich gestellt, so dass durch dieselben bloss die Auslagen einigermassen gedeckt werden. Die sogenannten Differential-Instrumente können in jedem Hause, wenn nur in der Nähe keine veränderlichen Eisenmassen sind, aufgestellt und gebraucht werden. Natürlich kann man sich aber dem Vereine auch bloss für eigentliche meteorologische Beobachtungen, ohne sich zugleich zu magnetischen Beobachtungen zu verpflichten, anschliessen.

den an allen Stationen nach einem gemeinschaftlichen Plane gemacht und in den verschiedenen Ländern durch besondere dazu bestimmte Meteorologen redigirt. Die Redaction für Bayern hat Herr Dr. Lamont, die Redaction für Oesterreich haben die Herren Astronomen Koller zu Kremsmünster und Kreil zu Prag, die Redaction für Würtemberg hat Herr Prof. Plieninger, für Baden Herr Prof. Stieffel übernommen, und dem nördlichen Deutschland hofft der Unterzeichnete seine Kräfte zu widmen. Die oben genannten Annalen für Meteorologie, Erdmagnetismus und verwandte Gegenstände, deren Herausgabe, so wie die oberste Leitung des ganzen Unternehmens, Herr Doctor Lamont in München besorgt, sind zur Bekanntmachung der von den Redactoren nach München als dem Centralpunkte für das gesammte Unternehmen, gesandten Beobachtungsjournale, zur Mittheilung geeigneter Aufsätze, Abhandlungen u. dergl. durch den Druck bestimmt, so dass man dieselben alle an einem Orte beisammen findet. Die Druckkosten werden entweder ganz oder wenigstens so weit dieselben nicht durch den Absatz gedeckt werden, von der Königlich Bayerischen Regierung getragen, so dass also das Unternehmen durch diesen neuen Beweis der Munificenz, mit welcher von jeher die Königlich Bayerische Regierung sich die Förderung der Wissenschaften angelegen sein lässt, vollkommen gesichert erscheint, und nur zu wünschen übrig bleibt, dass noch recht viele Meteorologen in den verschiedensten Ländern und den entferntesten Gegenden sich dem Vereine anschliessen, weshalb sie sich entweder unmittelbar nach München an Herrn Doctor Lamont oder an den ihnen zunächst wohnenden Redacteur zu wenden haben, um auf dem kürzesten und wohlfeilsten Wege die ihnen nöthigen Instrumente, Instructionen, u. s. w. zu erhalten. Dies für jetzt nur als vorläufige Nachricht über ein Unternehmen, welches, wie wir wenigstens wünschen und hoffen, der Meteorologie und verwandten Wissenschaftszweigen die schönsten Früchte tragen wird.

Greifswald den 11. März 1842.

Grunert.

VII.

Literarischer Bericht.

Philosophie der Mathematik.

Die Philosophie der Mathematik. Zugleich ein Beitrag zur Logik und Naturphilosophie von Const. Franz. Leipzig. 1842. 8. 1½ Thlr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

A Course of Mathematics, principally designed for the Use of Students in the East India Company's Military Seminary at Addiscombe. By the Rev. J. Cape, M. A. etc. Professor of Mathematics and Classics at Addiscombe. Vol. 2. 8. 16 s. cloth. Vol. 1. 8. 15 s. cloth.

Arithmetik.

Bourdon: Ausführliches Lehrbuch der Algebra. Aus dem Franz. von E. W. Müller. Quedlinburg. 1842. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

The Analysis and Solution of cubic and biquadratic Equations; forming a Sequel to „The Elements of Alge-

worden; aber die Begründung der ganzen Lehre ist eigentlich philosophisch, und darin blieben jene Lehrer sehr einseitig und erregten deswegen überspannte Hoffnungen, denen nie entsprochen werden kann. Die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht nämlich auf der Theorie der Inductionen, und hier gehen jene Lehrer von dem Sensualismus des Locke, Condillac und Hume aus, und wollen alle Inductionen nur als empirische nachweisen, welche ohne alle Erkenntnisse a priori gelten sollen. Dagegen hat uns Kant belehrt, dass jede Erfahrung erst a priori erkannte Bedingungen ihrer Möglichkeit voraussetze, und wir leiten daraus ab, dass jede taugliche Induction eine rationelle werden müsse, welche nicht nur durch die Erwartung ähnlicher Fälle, sondern zuhöchst immer durch leitende Maximen gelte, deren oberste a priori erkannt werden.

So wird es nothwendig für die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Metaphysik des Calculs, wie die Franzosen sagen, eine andere Grundlage zu geben. Dazu kommt nun noch, dass die Franzosen, durch die einseitige Begründung, der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein viel zu weites Feld geben wollen, indem im Grunde alle unsre Erkenntniss allgemeiner Gesetze von ihren Regeln abhängen soll. Dadurch ist es gekommen, dass sie viele Aufgaben stellen, und Lehren ausführen, die gar keinen wahren Grund haben, und dagegen beabsichtige ich hier meine Rede zu richten, wiewohl ich damit vielen der grössten Mathematiker streitend entgegentrete. Ich behaupte, dass der Grundbegriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit selbst nicht genau bestimmt sei; ich behaupte, dass die ganze herkömmliche Lehre von der Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen und der richterlichen Entscheidungen falsch sei, und, was das Wichtigste ist, ich muss einen grossen Theil der Lehren von der Wahrscheinlichkeit a posteriori ganz zu beseitigen suchen.

Dies sind die Zwecke der hier vorliegenden Arbeit. Am Schluss der Vorrede sagt der Verf. endlich noch: „Während ich an dieser Abhandlung arbeite, ist Poissons grosses Werk: recherches sur la probabilité des jugemens; nicht nur erschienen, sondern auch in meine Hand gelangt. Die grosse Kunst der mathematischen Analysis, welche ihm eigen war, zeigt sich darin auf eine glänzende Weise, daneben hat er manchen besondern von den Fehlern gerügt, gegen welche ich meine Kritik richte; aber die Grundgedanken trifft er doch nicht, ein wichtiger Theil meiner tadelnden Kritik bleibt auch gegen ihn stehen.

Geometrie.

Geometrie für Realschulen von J. A. Pflanz. Dritter Theil. Stuttgart. 1842. 8. 6 ggr.

Die beiden ersten Theile sind in Nr. V. des Literarischen Berichts S. 76 kurz angezeigt. Dieser dritte Theil enthält die prak-

Praktische Geometrie.

A Treatise on Land Surveying and Levelling, illustrated by copious Field Notes, Plans, and Diagrams, in Four Parts, by the Chain, Theodolite, Circumferentor, and Spirit Level; with Drawings, explaining their use, and exhibiting their adjustment: together with introductory chapters on Geometry, Logarithms, Mensuration and Trigonometry; and an Appendix of Tables of Logarithms, Sines, Cosines, Tangents etc. to Six Places; and a Troverse Table to any Distance, and to Three Minutes of Bearing. By H. J. Castle, Surveyor and Civil Engineer, Lecturer on Practical Geometry and Levelling to King's College, London. 1842. 8. 14 s. cloth.

Der geschwind und richtig rechnende Markscheider. Von K. W. Böbert. 2te Aufl. Quedlinburg. 1842. 8. 1½ Thlr.

Trigonometrie.

Plain and spherical Trigonometry. By H. W. Jeans, F. R. A. S. Royal Naval College, Portsmouth, late Mathematical Master, in the Royal Military Academy, Woolwich. Part 1, containing Rules, Examples, and Problems, 1842. 3 s. 6d. cl. Portsea: Woodward. London: Longman, Brown and Co.

Mechanik.

Lehrbuch der Mechanik nebst einem Anhange über Pendel und Wage. Gemeinfasslich dargestellt von Dion. Lardner und H. Kater. Aus dem Englischen v. Heinrich Kossmann. Stuttgart. 1842. 8. 1 Thlr. 18 ggr.

Vorschriften zur Berechnung der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab in der Ferne ausübt. Von Gauss.

Vorschlag die Variationen des Stabmagnetismus beim Bifilarmagnetometer unabhängig von der Kenntniss der Temperatur zu bestimmen. Von Weber.

Ueber magnetische Friction. Von Weber.

Ueber die absolute horizontale Intensität in Christiania. Von Hansteen.

Untersuchung über die mittlere Declination in Göttingen. Von Goldschmidt.

Messung starker galvanischer Ströme bei geringem Widerstande nach absolutem Maasse. Von Weber.

Ueber das electrochemische Aequivalent des Wassers. Von Weber.

Magnetische Beobachtungen. Von Hansteen.

Auszug aus den täglichen Beobachtungen der magnetischen Declination zu Göttingen im Jahre 1840. Von Goldschmidt.

Ueber die Bestimmung der absoluten Intensität. Von Goldschmidt.

Resultate aus den in den Jahren 1834—1836 von Sartorius von Waltershausen und Listing in Italien angestellten Intensitätsmessungen. Von Listing.

Vergleichung magnetischer Beobachtungen mit den Ergebnissen der Theorie. Von Goldschmidt.

Erläuterungen zu den Terminszeichnungen und Beobachtungszahlen.

Beobachtungszahlen von den Variationen der Declination und Intensität in den Terminen vom 28—29. Februar, 29—30. Mai, 28—29. August und 27—28. November 1840.

Vermischte Schriften.

Dreihundert Aufgaben aus der höhern und angewandten Mathematik. Von D. E. L. Lehmus. Berlin. 1842. 8. 18 ggr.

Das Programm der Petrischule zu Danzig von Michaelis 1841 enthält S. 9—14 wieder mehrere sehr beachtungswerthe wissenschaftliche Bemerkungen des Herrn Professors und Directors F. Strehlke zu Danzig, mathematischen und physikalischen Inhalts, welche denselben Zweck haben, wie die Aufgaben, von denen im ersten Theile des Archivs. S. 435 Nr. LV. und in Nr. IV. S. 67 des literarischen Berichts die Rede gewesen ist. So bald es der Raum gestattet, werden wir wieder Mehreres aus diesen Bemerkungen im Archive unter der Rubrik: Uebungsaufgaben für Schüler, mittheilen.

Auch in dem Programm des Catharineums zu Lübeck von Ostern 1842 sind auf S. 34—40 von Herrn Chr. Scherling mehrere bei'm Unterrichte wirklich vorgekommene geometrische Aufgaben, die mit Hülfe der Algebra ohne Anwendung der Goniometrie lösbar sind, mitgetheilt. Auch von diesen Aufgaben sollen mehrere, so bald es der Raum erlaubt, im Archive mitgetheilt werden.

Zu wünschen ist, dass mehrere Lehrer dem von den Herren Strehlke und Scherling gegebenen Beispiele, solche Aufgaben, die bei'm Unterrichte wirklich vorgekommen sind, in den Programmen mitzutheilen, folgen. In dem Archive werden dieselben gewiss immer möglichste Berücksichtigung finden.

Gelegentlich mag hierbei noch bemerkt werden, dass das Programm des Catharineums zu Lübeck von Michaelis 1840 folgende Abhandlung enthält:

Ueber die Curven, die enthalten sind in der Polargleichung $u = a\,F.\mathrm{trig}\,(\varphi)$ und über diejenige, welche dargestellt wird durch die Polargleichung $u = a\sec\varphi + b$. Von Chr. Scherling, Coll. für Mathem. uud Naturw.

Der Verf. hat nämlich in dieser Abhandlung den Zweck: die Curven zu untersuchen, welche die Eigenschaft haben, dass der Radius Vector eines jeden Punktes gleich sei dem Produkte aus einer constanten Grösse a in irgend eine trigonometrische Function des Winkels, den der Radius Vector mit einer festen durch den Pol gehenden Linie macht.

Mathematical Tracts: 1. Lunar and Planetary Theories. 2. Figure of the Earth. 3. Precession and Nutation. 4. Calculus of Variations. 5. Undulatory Theory of Optics, and Theory of Polarization. Designed for the use of Students in the Universities. By G. Biddell Airy, M. A. F. R. S. Astronomer Royal. 3d. Edition, corrected, 1842. 8. 15s. London: John W. Parker West Strand. Cambridge: Deightons.

Educationel Models etc. sold by Taylor et Walton, 28, Upper Gower Street.

A Pyrometer for shewing the expansion of metals. 15 s.

Atwood's Machine for explaining the laws of falling bodies, with apparatus attached for illustrating the theory of the pendulum. Price of Atwood's Machine with a „Companion" L. 2. 2 s.; additional apparatus for the pendulum L. 1. 1 s.

A set of mechanical powers; containing the Lever — Wheel and Axle — series of Pulleys — the Inclined Plane — Wedge — Screw — with Examples of the Parallelogram of For-

ces — Centre of Gravity — Friction — Collision of Elastic Bodies — Compound Lever. Price L. 5. 5 s. in a Box.

A Second Set, omitting the Parallelogram of Forces and Collision of Elastic Bodies. Price in a Box L. 2. 12 s. 6 d. A commoner Set L. 1. 6 s. 3 d. in a Box.

Philosophical Diagrams; illustrating the various branches of Natural Philosophy. By Frederick J. Minasi, Lecturer of Natural Philosophy etc. Designed for the use of Lecturers, Philosophical Classes, and Schools. 1 st Series — Mechanics. In Monthly Numbers each containing 3 Sheets of Diagrams, price 3 s. each Number. — Number 1 is just published.

Geometrical solids to illustrate Reiner's Lessons on form, and other works on Geometry. The Set, in a Box, 9 s.

An Instrument for teaching Geometry, convertible into a Theodolite, Spirit Level, Hadley's Sextant, and Wollaston's Goniometer. Price L. 2. 12 s. 6 d.

Diagrams in Wood, to illustrate Dr. Lardner's Euclid. Solid Geometry, Book 1. The Set of Nine, in a Box, 7 s. 6 d.

VIII.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Matheseos Universalis formulae fundamentales Caroli Joh. Ds. Hill, a C. A. Augustinson MDCCCXLI publice defensae. Lundae. XDCCCXLI. 4. 4 gg.

Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht an Gymnasien, höhern Bürger- und Militair-Schulen. Bearbeitet von Dr. Martin Ohm. Dritte, durchgesehene und theilweise umgearbeitete Auflage. Leipzig. 1842. 8. 22 ggr.

Dieses seiner Einrichtung und den Ansichten seines Vfs. über den mathematischen Unterricht nach aus den beiden ersten Auflagen hinreichend bekannte Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht enthält die Arithmetik und Algebra, die ebene Geometrie mit Einschluss der ebenen Trigonometrie, die körperliche Geometrie mit Einschluss der sphärischen Trigonometrie, und in einem Anhange Einiges über Reihen und über Permutationen und Combinationen, nebst dem Beweise des binomischen Lehrsatzes. Da, wie gesagt, die Ansichten des Vfs. schon bekannt genug sind, und allerdings auch schon bei vielen Lehrern Eingang gefunden haben, wie am besten durch die wiederholten Auflagen des vorliegenden Werkchens bewiesen wird, so würde eine nicht überall beifällige Kritik derselben, wobei wir übrigens manches Treffliche in denselben keineswegs verkennen und dem Vf. deshalb immer unsere besondere Achtung gezollt haben, in diesen bloss für kurze Anzeigen und literarische Notizen bestimmten literarischen Berichten nur unpassend erscheinen. Unterdrücken aber können wir in Bezug auf §. 177. — §. 181. die Bemerkung nicht, dass die Formeln

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

und die aus denselben gezogenen Herleitungen, auch wenn sie nur gelegentlich beigebracht sein sollten, in einem für erste Anfänger

bestimmten Lehrbuche nach unserer Ueberzeugung gewiss ganz am unrechten Orte sind, und den Anfänger nur verwirren. Solche eigentlich nur symbolische Ausdrücke in ihr rechtes Licht zu stellen und ihre richtige Anwendung zu zeigen, muss nach unserer Ueberzeugung ganz einem höhern Unterrichte aufbehalten bleiben.

Arithmetik.

Die neue Multiplication oder Anweisung, die unmittelbare Berechnung der Producte aus zwei- bis achtzifferigen Factoren nach einer einfachen, von der bisher gebräuchlichen ganz verschiedenen Methode auszuführen. Für Freunde der Arithmetik, für alle Classen von Rechnern, namentlich aber zur Einführung in Gymnasien und Bürgerschulen zum Druck befördert. Zweite, ganz umgearbeitete Auflage. Oldenburg. 1842. 8.

Bei der gewöhnlichen Art zu multipliciren bildet man bekanntlich, wenn im Allgemeinen $a+b+c+d+\ldots.$ der Multiplicand, $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots.$ der Multiplicator ist, nach und nach die Producte

$$(a+b+c+d+\ldots.)\alpha,$$
$$(a+b+c+d+\ldots.)\beta,$$
$$(a+b+c+d+\ldots.)\gamma,$$
$$(a+b+c+d+\ldots.)\delta,$$

u. s. w.

indem man jedes derselben wieder in seine einzelnen Theile auflöst, und erhält durch Addition aller dieser Producte das gesuchte Product des gegebenen Multiplicandus und Multiplictors. Der Verf. setzt dagegen

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+\ldots)\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)\\ =a\alpha+b\alpha+c\alpha+d\alpha+\ldots.\\ +a\beta+b\beta+c\beta+d\beta+\ldots.\\ +a\gamma+b\gamma+c\gamma+d\gamma+\ldots.\\ +a\delta+b\delta+c\delta+d\delta+\ldots.\end{aligned}$$

u. s. w.

ordnet die einzelnen Theile der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach den Diagonalreihen, wodurch er

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+\ldots)\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)\\ =a\alpha\\ +(a\beta+b\alpha)\\ +(a\gamma+b\beta+c\alpha)\\ +(a\delta+b\gamma+c\beta+d\alpha)\\ +\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

erhält, bildet die sämmtlichen einzelnen Theile dieses Aggregats, und erhält durch deren Addition das gesuchte Product, wobei er übrigens die einzelnen Theile nicht vom ersten bis zum letzten, in der Ordnung wie sie vorher geschrieben worden sind, sondern in umgekehrter Ordnung vom letzten bis zum ersten bildet und zu einander addirt. Hierin besteht das ganze Kunststück! Soll man z. B. 786 mit 543 multipliciren, so sagt man 6 . 3 ist 18, schreibt die 8 hin, und behält 1 im Sinne; hierauf sagt man 8 . 3 + 6 . 4 ist 48, und 1 dazu ist 49, schreibt die 9 hin und behält 4 im Sinne; dann sagt man 7 . 3 + 8 . 4 + 6 . 5 ist 83, und 4 dazu ist 87, schreibt die 7 hin und behält 8 im Sinne; hierauf sagt man 7 . 4 + 8 . 5 ist 68, und 8 dazu ist 76, schreibt die 6 hin und behält 7 im Sinne; endlich sagt man 7 . 5 ist 35 und 7 dazu ist 42, welche Zahl nun auch hingeschrieben wird. Hiernach erhält das Exempel folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r} 786 \\ 543 \\ \hline 426798 \\ {\scriptstyle 7\,8\,4\,1} \end{array}$$

So unbedeutend die Sache auch an sich nach unserer Ueberzeugung ist, und so wenig wir glauben, dass dieselbe sich einer günstigen Aufnahme erfreuen wird, so hielten wir es doch für unsere Pflicht, diese neue Multiplicationsmethode hier etwas näher zu characterisiren, weil der Verf. dieselbe namentlich zur Einführung in Gymnasien und Bürgerschulen bestimmt und empfiehlt. Wir haben unsere Pflicht gethan und unser Zweck ist erreicht, wenn durch das Obige jeder Lehrer in den Stand gesetzt wird, sich über diese neue Multiplicationsmethode selbst ein Urtheil zu bilden.

Tafeln zur Verwandlung aller Brüche von $\frac{1}{1000}$ — $\frac{100000}{1000}$ und von $\frac{1}{1000}$ — $\frac{100}{100000}$ in fünf bis siebenziffrige Decimalbrüche, oder: Tafeln zur Berechnung der siebenziffrigen Quotienten aller oben angegebenen Dividenden und Divisoren. Nebst einigen auf benannte Zahlen bezüglichen Decimaltabellen und einer Anweisung zur allgemeinsten Anwendung der Decimalbruchrechnung auf die Auflösung der gewöhnlichsten arithmetischen Aufgaben. Für Mathematiker und Geschäftsleute sowohl, als auch Lehrer und Lernende eingerichtet und berechnet. Oldenburg. 1842. 4.

Diese neuen zur Erleichterung der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche bestimmten Tafeln, deren Verf. sich nirgends genannt hat, haben die folgende Einrichtung. Auf 198 Seiten enthalten dieselben alle gemeinen Brüche, welche aus dem Bruche $\frac{a}{b}$ entstehen, wenn man für den Zähler a alle ganze Zahlen von 1 bis 99 setzt, und mit jedem einzelnen dieser Zähler als Nenner b alle ganze Zahlen von 1 bis 999 verbindet, in Decimalbrüche mit sieben Decimalstellen verwandelt. Einem jeden der

Auf ähnliche Art ist

$$\frac{98766}{887} = \frac{98}{887} \cdot 1000 + \frac{76}{887} \cdot 10 + \frac{6}{887}$$

$$= \begin{cases} 110,4848 \\ 0,856821 \\ 0,0067644 \end{cases}$$

$$= 111,3483854$$

Dass diese Resultate nun aber nicht mehr bis auf sieben Stellen richtig sind, versteht sich von selbst, weshalb auch der Verf. in §. 14. der Einleitung noch ein anderes bei diesen Verwandlungen anzuwendendes Verfahren lehrt.

Uebersteigt der Nenner des in einen Decimalbruch zu verwandelnden gemeinen Bruchs die Gränze der Tafeln, ohne dass dies auch bei dem Zähler der Fall ist, so hat man sich auf folgende Art zu verhalten. Der gegebene gemeine Bruch sei z. B. $\frac{86}{17862}$. Unmittelbar aus den Tafeln ergiebt sich zuvörderst

$$\frac{86}{17800} = 0,0048315.$$

Ferner findet man aus den Tafeln leicht als Differenz zwischen den beiden Brüchen

$$\frac{86}{178} \text{ und } \frac{86}{179}$$

die Grösse 0,0026992, folglich als Differenz zwischen den Brüchen

$$\frac{86}{17800} \text{ und } \frac{86}{17900}$$

die Grösse 0,000026992, oder, wenn die Ziffer unmittelbar vor dem Komma sich auf Einheiten der siebenten Decimalstelle bezieht, die Grösse 269,92.

Ueberhaupt ist nun, wenn $\frac{n}{m}$ ein sehr kleiner Bruch ist, näherungsweise

$$\frac{a}{m+n} = \frac{a}{m}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{a}{m}\left(1-\frac{n}{m}\right) = \frac{a}{m} - \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{m};$$

und eben so, wenn $\frac{100}{m}$ ein sehr kleiner Bruch ist, näherungsweise

$$\frac{a}{m+100} = \frac{a}{m}\left(1+\frac{100}{m}\right)^{-1} = \frac{a}{m}\left(1-\frac{100}{m}\right) = \frac{a}{m} - \frac{a}{m} \cdot \frac{100}{m}.$$

Ueberlegt man jetzt, dass

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{n}{m} = \frac{a}{m} \cdot \frac{100}{m} \cdot \frac{n}{100}$$

ist, so ist klar, dass in Bezug auf den obigen speciellen Fall

$$\frac{86}{17862} = 0,0048315 - 0,000026992 \cdot \frac{62}{100},$$

oder, weil

$$269.92 \times 62 = 16735{,}04$$

also

$$269{,}92 \times \frac{62}{100} = 167{,}3504$$

ist

$$\frac{86}{17862} = \left\{\begin{array}{r} 0{,}0048315 \\ -\ 167 \\ \hline \end{array}\right.$$
$$= 0{,}0048148.$$

Wenn sowohl der Zähler, als auch der Nenner des gegebenen, in einen Decimalbruch zu verwandelnden gemeinen Bruchs die Gränze der Tafeln übersteigt, so hat man auf folgende Art zu verfahren. Der gegebene Bruch sei z. B. $\frac{866}{97287}$. Weil zuvörderst

$$\frac{866}{973} = \frac{86}{973} \cdot 10 + \frac{6}{973}$$

ist, so findet man mittelst der Tafeln leicht

$$\frac{866}{97300} = \left\{\begin{array}{r} 0{,}0088386 \\ 0{,}0000617 \\ \hline \end{array}\right.$$
$$= 0{,}0089003.$$

Für $\frac{86}{973}$ und $\frac{6}{973}$ sind die Differenzen nach den Tafeln 0,0000910 und 0,0000063. Also ist die Differenz für $\frac{866}{97300}$

$$= \left\{\begin{array}{r} 0{,}00000910 \\ 0{,}000000063 \\ \hline \end{array}\right.$$
$$= 0{,}000009163.$$

Multiplicirt man dies, weil $97300 - 97287 = 13$ ist, mit 13, so erhält man als Product 0,000119119, und, dies durch 100 dividirt, giebt 0,0000012. Also ist

$$\frac{866}{97287} = \left\{\begin{array}{r} 0{,}0089003 \\ 12 \\ \hline \end{array}\right.$$
$$= 0{,}0089015$$

Wie man dies in der Praxis abzukürzen hat, wird sogleich erhellen.

Angehängt sind den Tafeln zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche noch Verwandlungstabellen einiger Maasse, Verwandlungstabellen einiger Gewichte und Verwandlungstabellen einiger Münzen.

Kann nun auch über ein sehr wesentliches Erforderniss solcher Tafeln, nämlich über ihre Correctheit, erst nach längerm Gebrauch derselben entschieden werden, so glauben wir doch durch die vorhergehenden Bemerkungen hinreichend nachgewiesen zu haben, dass

die obigen Tafeln zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, ungeachtet schon mehrere ältere Schriften, die eine ähnliche Tendenz haben, wie z. B. die Rechnung mit Decimalbrüchen und Logarithmen nebst dazu gehörigen ganz neu berechneten Tafeln. Von F. A. Schröter. Helmstädt. 1799. 4. und W. F. Wucherer's Beiträge zum allgemeinern Gebrauche der Decimalbrüche oder Tafeln u. s. w. Karlsruhe. 1795. 8., existiren, verdienen, von praktischen Rechnern, denen sie sich vorzüglich durch ihre einfache Einrichtung empfehlen werden, und Lehrern nicht unbeachtet zu bleiben.

Lehrbuch der Arithmetik, allgemeinen Grössenlehre und Algebra für die mittlern und obern Klassen der Gymnasien und höhern Bürgerschulen von J. W. Elsermann, Oberlehrer der Math. und Naturw. an dem Gymnasium und der Realschule in Saarbrücken. Saarbrücken. 1842. 8. 20 ggr.

Dieses Lehrbuch schliesst sich im Allgemeinen und Wesentlichen den Ansichten an, welche M. Ohm in seinen verschiedenen Lehrbüchern geltend zu machen gesucht hat.

Young's Analysis and Solution of Cubic and Biquadratic Equations. 1842. 12. 6s.

Table des logarithmes des nombres depuis 1000 jusqu'à 10000. Par Croizet. in 4. Chez Petissonnier. 1842. 6 Fr.

Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniss zur Schule von Dr. Martin Ohm. Auch als Anhang zu seinen verschiedenen Lehrbüchern. Berlin. 1842. 8. 1 Thlr.

Der Herr Verf. theilt, um uns hier seiner eignen Worte aus der Vorrede zu bedienen, in dieser Schrift „so kurz als es ihm „nur immer möglich gewesen ist, das Wesen der Ansichten mit, „welche derselbe in seinen Schriften seit 1816, besonders aber seit „1822 gelehrt hat und lehrt, — Ansichten, welche das Glück ge„habt haben, in seinen verschiedenen Lehrbüchern vielfachen Bei„fall zu finden, welche aber auch vielfach missverstanden worden „sind, und wahrscheinlich deshalb leichter missverstanden werden „konnten, weil ein Lehrbuch noch so manches andere zu berück„sichtigen hat, welches das Auffassen des Wesens der Sache er„schwert. Gegenwärtige kleine Schrift setzt voraus, dass der Le„ser alles Material selbst einschalte, und beschäftigt sich bloss mit „der Aufstellung logisch bestimmter, scharfer und entschiedener „Begriffe und zwar aller derer, um welche sich die mathematische „Analysis herumdreht.“ Auf Seite 15 spricht sich der Herr Verf. über seine Schrift ferner in folgenden Worten aus: „Der Verf. ist „in diesem Augenblicke überzeugt, dass er seine Lehrbücher nur „ruhig wirken lassen dürfe, um nach längerer Zeit seine Ansichten „von den meisten Pädagogen adoptirt zu sehen, weil sie sich ne„benbei (eben wegen der darin vorwaltenden wissenschaftlichen „Einheit) durch eben so grosse Einfachheit als Bequemlichkeit aus„zeichnen. In so fern sich aber Mathematiker von Fach, wie z. B. „Abel es gewesen ist, mit dem Lesen von Elementar-Lehrbüchern,

„auch wenn sie in ihnen die Quellen ihrer Klagen*)
„verstopft finden könnten, in der Regel nicht befassen, so
„versucht es der Verf. in diesen Bogen denselben seine Ansichten
„auf eine möglichst kurze und übersichtliche Weise vor Augen zu
„legen, und zugleich die wichtigsten Folgerungen hervorzuheben,
„welche sich für das sichere und nothwendig richtige Arbeiten mit
„unendlichen Reihen daraus ergeben." Diese eignen Worte des
Herrn Verfs. müssen der Beschränktheit des Raums wegen hier
hinreichen, um den Lesern des Archivs den Zweck, welchen der
Herr Verf. durch seine Schrift zu erreichen beabsichtigte, vor die
Augen zu führen.

Wichtig für die Theorie der bestimmten Integrale sind die
folgenden uns neuerlichst aus Schweden zugekommenen Abhand-
lungen.

De seriebus periodicis auctore Adolpho Ferdinando
Svanberg. (Ex Actis Reg. Soc. Scient. Upsal.) Upsaliae.
1836. 4.

Diese Abhandlung ist auch für Astronomie von besonderm In-
teresse.

Deux Mémoires sur les intégrales définies par C. J.
Malmstén. Extrait des Acta Reg. Soc. Upsal. A Upsal
1841. 4.

1. Mémoire sur les intégrales

$$\int_0^m \frac{(1-p\cos tx)\varphi(x)dx}{1-2p\cos tx+p^2} \text{ et } \int_0^m \frac{p\sin tx\, f(x)dx}{1-2p\cos tx+p^2}.$$

2 Mémoire sur les integrales définies entre $x=0$ et $x=\infty$

Om Integralen $\int_0^\infty \frac{\cos axdx}{(1+x^2)^n}$ af Carl J. Malmsten. Ur
den K. V. Acad. Handl. 1841.

Theoremata nova de integralibus definitis, summa-
tione serierum earumque in alias series transforma-
tione. Auctore Carol. Joh. Malmsten, Phil. Mag. ad Reg.
Acad. Upsal. Math. infer. Doc. Upsaliae. 1842. 8.

Wir werden künftig aus allen diesen vieles Interessante ent-
haltenden Abhandlungen im Archive Auszüge mittheilen.

Disquisitio academica, integrationem aequationis cu-
jusdam differentialis exhibens, quam consent. ampl. ord.
philos. Lundens., praeside Carolo Joh. Ds. Hill, Math.
prof. reg. et ord., pro gradu philosophico publico exa-
mini subjicit C. A. Ehrensvärd. Comes. Lundae. 1841. 4.

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der Integration der Diffe-
rentialgleichung des 2ten Grades $A(y'dx'-x'dy')+Bdx'+Cdy'=0$,
wo $A=a_0+a_{,}x'+a_{,,}y'$, $B=b_0+b_{,}x'+b_{,,}y'$, $C=c_0+c_{,}x'+c_{,,}y'$
ist, und die Coefficienten von x' und y' constant sind, nach ver-
schiedenen Methoden.

---

*) M. vergl. hierbei Archiv Theil I. Literarischer Bericht Nr. I. S. 20.
Gr.

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie, enthaltend die ebene Geometrie und die Stereometrie nebst Anwendung der Algebra auf dieselben. Von Friedrich Pross, Professor der Mathematik an der Königlichen polytechnischen Schule zu Stuttgart. Mit neun Figurentafeln. Stuttgart. 1842. 8. 2 Thlr.

Ein recht vollständiges in deutlicher Darstellung, mit steter Rücksicht auf praktische Anwendung verfasstes, und einen ziemlich grossen Reichthum einzelner auch vielfach die Praxis berücksichtigender, auch hin und wieder neue Relationen darbietender Aufgaben enthaltendes Lehrbuch der ebenen und körperlichen Geometrie, welches in seinem Kreise gewiss vortheilhaft wirken wird. Besondern Fleiss scheint der Verf. mit Recht auf die für viele praktische Anwendungen so wichtigen Körperberechnungen verwandt zu haben. Dass in diesem Lehrbuche nicht besondere Rücksicht auf descriptive Geometrie genommen worden ist, wie man seiner sonstigen Anlage nach wohl hätte erwarten können, hat seinen Grund jedenfalls darin, dass auf polytechnischen Lehranstalten in diesem Theile der Geometrie mit Recht wohl durchgängig ein besonderer ausführlicher und in's Einzelne gehender, mit vielfachen Uebungen im Zeichnen verbundener Unterricht ertheilt wird, für welchen daher in diesem Lehrbuche der Geometrie doch kein hinreichendes Material hätte geliefert werden können, weshalb es allerdings am besten war, denselben von den gewöhnlichen Elementen der ebenen und körperlichen Geometrie zu trennen. Tabellen zur Vergleichung der Maasse verschiedener Länder und eine Tafel der specifischen Gewichte sind dem Buche beigegeben.

Éléments de Géométrie par Eugène Lionnet. in 4. Chez Dézobry. 1842.

Die Lehre von den Polyedern. Rein-geometrisch dargestellt von Dr. Hohl, ausserordentlichem Prof. der Math. an der Univ. zu Tübingen. Mit 11 Figurentafeln. Tübingen. 1842. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Diese Schrift leistet das, was ihr Titel verspricht, in ziemlicher Vollständigkeit, und verdient Lehrern deshalb empfohlen zu werden, weil sie in derselben eine grosse Anzahl in verschiedenen Schriften zerstreuter Sätze, — durchgängig nach rein-geometrischer Methode, ohne Einmischung des Calculs, behandelt, — an einem Orte beisammen finden. Ohne des allgemeiner Bekannten zu gedenken erwähnen wir hier nur u. A. die das Grösste und Kleinste betreffenden Eigenschaften der Prismen und Pyramiden, wobei der Verf. Lhuilier's bekanntes Werk: **De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata. Varsaviae. 1782.** benutzt, statt der zum Theil algebraischen Beweise aber geometrische substituirt hat; die Lehre von den archimedischen Polyedern mit zweierlei und dreierlei Seitenflächen; die

Hindernisse in den Weg treten, doch häufig mit besonderer Eleganz mittelst des Messtisches in Ausführung bringen lassen, und nach unserer Erfahrung namentlich von den befähigtern Zuhörern immer mit besonderm Interesse aufgenommen werden. Tafeln zur Vergleichung der Maasse sind auch beigegeben. Mit besonderer Ausführlichkeit verbreitet sich die vorliegende Schrift über das topographische Zeichnen, wobei der Verf. ganz Lehmann folgt, und es sind zugleich eine grössere Anzahl recht gut ausgeführter lithographirter Tafeln beigegeben, die, wie wir glauben, zweckmässig als Vorlegeblätter bei'm Unterrichte im Zeichnen gebraucht werden können. In dieser Beziehung verdient daher das vorliegende Buch vorzüglich bei dem hohen Preise des bekannten Lehmann'schen Werkes, für diejenigen, welche sich eine hinreichende Kenntniss der Lehmann'schen Methode erwerben wollen, noch besondere Empfehlung.

Traité d'aréage et de métrage. Par Croizet. in 12 Chez Petissonnier. 1842. 1 Fr. 2 s.

Practical Geodesy, comprising Chain Surveying, the Use of Surveying Instruments, together with Levelling and Trigonometrical, Mining, and Maritime Surveying Adapted to the use of Land-Surveyors, and for Students in Civil, Military, and Naval Engineering. By Butler Williams, C. E. F. G. S. Professor of Geodesy in the College for Civil Engineers, London. 1842. 8. with numerous Illustrations. 12 s. 6 d.

Praktische Mechanik.

Cours élémentaire de Mécanique industrielle par Jariez. 2 vols. et Atlas. 8. 1842. 5¼ Thlr.

Théorie géometrique des engrenages par Olivier avec 4 planches. 4. 1842. 4 Thlr.

Astronomie.

Leichtfassliche Vorlesungen über Astronomie für jene, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt. Von August Kunzek, Doctor der Phil., ord. öffentl. Pro

der Physik und angewandten Mathematik an der Univ. in Lemberg. Wien. 1842. 8. 1 Thlr. 16 ggr.

Der Zweck dieses zwar nur kurzen, aber deutlich verfassten populären Lehrbuchs der Astronomie ist durch seinen Titel hinreichend bezeichnet. Die Vorrede beginnt der Verf. mit den folgenden schönen Worten Jean Paul's aus der Levana. „Ich „verarg' es euern Eltern, dass sie euch nicht Astronomie lernen „liessen, sie, die dem Menschen ein erhabenes Herz giebt, und ein „Auge, das über die Erde hinaus reicht, und Flügel, die in die „Unermesslichkeit heben, und Einen Gott, der nicht endlich, son„dern unendlich ist.“ Angehängt dem aus 23 Vorlesungen bestehenden Werke sind einige arithmetische und geometrische Begriffe und Sätze, und einige trigonometrische Betrachtungen über Parallaxe, Aberration, Berechnung der Länge der Tage und Nächte, der Dauer der Dämmerung, u. s. w.

Erläuterungen zu J. J. v. Littrow's Vorlesungen über Astronomie (Wien 1830 bei J. G. Heubner) von C. L. v. Littrow, Adjuncten an der Sternwarte der K. K. Universität zu Wien, u. s. w. Mit 5 lithographirten Tafeln. Wien. 1842. 8. 1 Thlr.

Diese Erläuterungen zu J. J. v. Littrow's bekannten Vorlesungen über Astronomie, von denen (oder von der theoretischen und praktischen Astronomie desselben Verfs. Wien 1821—1827), wie wir aus der Vorrede zu den Erläuterungen zu unserer Freude ersehen, auf Sir John Herschel's Veranlassung bald eine englische Uebersetzung erscheinen wird, werden minder geübten Lesern des genannten in mehrfacher Beziehung ausgezeichneten Werkes, wegen der Kürze der Darstellung an den meisten Orten in demselben, gewiss sehr willkommen sein, und zwar um so mehr, weil Herr C. L. v. Littrow auch mehrere werthvolle Zusätze zu demselben, wohin wir z. B. auf S. 112—117 Jvory's von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung unabhängige, und sonach für erste Anfänger recht wohl geeignete Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate rechnen, geliefert, und an mehreren Orten veränderte Darstellungen, wie z. B. bei der Bestimmung der Fehler des Theodoliten auf S. 187—190, eingeschaltet hat. Mit kindlicher Pietät hat Herr C. L. v. Littrow seine empfehlenswerthe Schrift dem Andenken seines der Wissenschaft und den Seinigen leider zu früh entrissenen, in so vielen Beziehungen ausgezeichneten und verdienten Vaters gewidmet, auf dessen in den Annalen der Wiener Sternwarte für 1841 sich findende Lebensbeschreibung wir die Leser hier noch besonders aufmerksam machen.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. Edlen von Littrow, Adjuncten an der k. k. Sternwarte, Doctor der Philosophie, der philosophischen Facultät zu Wien und mehrerer gelehrter Gesellschaften Mitgliede. Ein und zwanzigster Theil. Neuer Folge Erster Band. Mit einer lithographirten Tafel. Wien. 1841. 4.

Diesen ersten Band der neuen Folge der trefflichen Annalen der k. k. Sternwarte zu Wien, die, weil von ihnen nur 150 Exem-

plare gedruckt werden, nicht in die Hände vieler Leser kommen können, und daher, so wie überhaupt ihrer Wichtigkeit für die Wissenschaft wegen, in diesem Archive jedenfalls eine ausführlichere Anzeige verdienen, eröffnet mit Recht die Lebensbeschreibung des Begründers dieses Werkes und der neuen Wiener Sternwarte, des der Wissenschaft leider zu früh entrissenen J. J. von Littrow.

Joseph Johann Edler von Littrow wurde geboren zu Bischof-Teinitz in Böhmen, am 13ten März 1781, in derselben Stunde, wo Herschel den Uranus entdeckte. Sein Vater lebt noch gegenwärtig als Kaufmann daselbst, seine Voreltern stammen aus Liefland. Nach fast fortdauernder Kränklichkeit in den drei ersten Lebensjahren bezog er mit dem fünften Jahre die Schule seiner Geburtsstadt, und legte schon hier den Grund zu der Eleganz des Stils, die späterhin alle seine Schriften so sehr auszeichnete. Nach Vollendung dieses Cursus bemächtigten sich religiöse Zweifel des neunjährigen Knaben, die nur erst dann wieder einem ruhigen Gemüthszustande Raum liessen, als er im Jahre 1794 das Gymnasium zu Prag bezog, auf welchem er sich vorzugsweise mit dem Studium der Classiker beschäftigte. Nachdem er die Universität zu Prag bezogen, schloss er sich besonders an den Aesthetiker A. G. Meissner an, und beschäftigte sich in freien Stunden mit dem Studium der griechischen Literatur und der Mathematik. Im Jahre 1800 versuchte er sich zum ersten Male als Schriftsteller, und gab unter dem Titel: Propyläen eine Zeitschrift heraus, die aber im folgenden Jahre wieder einging, weil er in die sogenannte Legion, einem vom Erzherzog Carl errichteten militärischen Corps von 2200 Mann, eintrat. Nachdem nach geschlossenem Frieden die Legion aufgelöst worden war, kehrte Littrow zu den Studien zurück, und beschäftigte sich nach und nach mit den verschiedenartigsten Wissenschaften, bis er im Jahre 1803 die Erziehung der beiden Grafen Rénard, aus dem berühmten Hause Colonna, das dem römischen Stuhle mehrere Päpste gegeben hatte, auf deren Gütern in Schlesien übernahm, wo er zuerst ganz der schönen Literatur, später aber ausschliesslich der Mathematik und Astronomie lebte, in welchen letztern Wissenschaften er ganz Autodidact war. Im Jahre 1807 wurde er in Folge eines schriftlichen Concurs-Elaborates zum Professor der Astronomie an der Universität Krakau ernannt, und nahm hier die Namen Joseph Johann an, weil er durch die früher geführten Namen Joseph Samuel in den Anschein, der jüdischen Religion anzugehören, gerathen war, und sich vor seiner Anstellung erst urkundlich als katholisch hatte ausweisen müssen. Zugleich änderte er seinen Zunamen, der ursprünglich Lyttroff geschrieben worden war, in Littrow um. In Krakau verband er sich mit Caroline von Ullrichsthal, aus welcher im Jahre 1833 durch den Tod der Gattinn getrennten glücklichen Ehe ihm eine zahlreiche Nachkommenschaft hervorging, von welcher noch fünf Söhne am Leben sind. Im Jahre 1809 ging er, einem Rufe des damaligen kaiserl. russ. Minister des Cultus, Grafen Razumowsky, folgend, als Professor der theoretischen Astronomie nach Kasan, nahm im Jahre 1816 seinen Abschied, um einem Rufe an die eben vollendete Sternwarte auf dem Bloksberge bei Ofen zu folgen, und vertauschte im Jahre 1819 diese Stelle mit der durch Triesnecker's Tod (1817) erledigten Stelle des Directors der

einer merkwürdigen Uebereinstimmung zu 127,78 Wiener Klaftern (eine Wiener Klafter = 1,8966138 Meter) bestimmt worden, so dass Wien jedenfalls als einer derjenigen Punkte betrachtet werden muss, deren Meereshöhe am Genauesten bestimmt ist. Die Meereshöhe des mittlern Spiegels der Donau ist 81,10 Wiener Klaftern, die Meereshöhe des Nullpunkts am Mittelpfeiler der Franzensbrücke ist 80,43 Wiener Klaftern.

Höhe des Herrmannskogel, Leopolds- und Kahlenberges über dem adriatischen Meere, aus barometrischen Messungen. Von F. C. Hallaschka.

Horizont der Leopoldskirche auf dem Leopoldsberge über dem adriatischen Meere 217,907 Par. Klaftern;

Höhe des Hermannskogel über dem adriatischen Meere 279,201 Par. Klaftern;

Höhe des Josephsbergs über dem adriatischen Meere 231,877 Par. Klaftern.

Vorschlag eines neuen Fernrohr-Micrometers mit hellen Linien und Punkten im dunkeln Gesichtsfelde. Von Simon Stampfer, Prof. der prakt. Geom. am k. k. polytechn. Institute in Wien.

Beiträge zur nautischen Astronomie von C. L. v. Littrow.

I. Ueber ein Mittel, die Breitenbestimmung zu erleichtern, und zugleich näherungsweise die Zeit zu bestimmen.

II. Ueber die Genauigkeit der gebräuchlichsten Ortsbestimmungen zur See.

III. Ueber die unmittelbare Verbindung bei fahrendem Schiffe angestellter Beobachtungen.

Auszüge aus den beiden letzten bemerkenswerthen Aufsätzen der Herren Stampfer und C. L. v. Littrow, die in diesem literarischen Berichte einen zu grossen Raum in Anspruch nehmen und dessen Zwecke entgegen sein würden, werden wir nach und nach unter den Miscellen geben.

Resultate der Planetenbeobachtungen im Jahre 1840.

Beobachtungen des Mondes und von Mondsternen im Jahre 1840.

Beobachtete Sternbedeckungen bis Ende 1841.

Sonnenfinsterniss des 18ten Juli 1841.

Beobachtungen am Meridiankreise vom 21. Januar bis 29. September 1836.

Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen von 1840 und 1841.

Für 1840 ist

mittlere Barometerhöhe bei 0° Réaumur 27″,527 Par. M.

mittlere Temperatur + 6°,87 R.

Für 1841 ist

mittlere Barometerhöhe bei 0° Réaumur 27″,501 Par. M.

mittlere Temperatur + 8°,53 R.

Stand des Barometers über dem mittlern Spiegel der Donau 101,7 Wiener Fuss. Als mittlere Jahrestemperatur von Wien giebt der

Herr Herausgeber im Allgemeinen +8°,46 R. an, so dass also im Jahre 1840 die Jahrestemperatur 1°,59 unter der mittlern geblieben ist, eine Abweichung, die seit 1775 nur von dem Jahre 1829, wo sie —2°,37 betrug, übertroffen wurde.

Den Schluss dieses Bandes der Annalen machen:

Hülfstafeln für die Wiener Sternwarte. Zusammengestellt im Jahre 1842;

wobei wir bemerken, dass der Herr Herausgeber es sich zum Gesetz gemacht hat, diese Hülfstafeln alle fünf Jahre erscheinen zu lassen, um das Publikum sowohl von der Art, wie auf der Wiener Sternwarte die Rechnungen ausgeführt werden, zu unterrichten, als auch in den Stand zu setzen, weitere Reductionen vorzunehmen, eine Einrichtung, die gewiss allgemeiner nachgeahmt zu werden verdient.

Aus der obigen Relation werden die Leser den in so vielen Beziehungen interessanten und wichtigen Inhalt des vorliegenden neuesten Bandes der Annalen der Wiener Sternwarte erkennen, und es uns gewiss Dank wissen, wenn wir, wie schon oben versprochen worden ist, künftig unter den Miscellen weitere Mittheilungen aus denselben machen.

Karte der totalen Sonnenfinsterniss am 8. Juli 1842 nach J. H. W. Lehmann für die östreichische Monarchie entworfen von C. L. Littrow. Verlag der lithographischen Anstalt des Ludwig Mohn in Wien.

Physik.

Anfangsgründe der Naturlehre mit logischen, arithmetischen und geometrischen Vorbereitungslehren für angehende Thierärzte und Oekonomen. Von Anton L. Buchmüller. Zweite verbesserte Auflage. Wien. 1842. 8. 2 Thlr.

Wo sich zu Anwendungen physikalischer Lehren in Bezug auf den speciellen Zweck, welchen dieses Buch zu erreichen sucht, Gelegenheit darbot, hat der Verf. dieselbe immer benutzt, und wir brauchen wohl nicht erst zu erinnern, dass dies u. A. in der Lehre vom Hebel in Bezug auf die Wirkung der Muskeln, in der Lehre von den Haarröhrchen, in der Lehre von der Wärme, in der Lehre vom Schall, in der Lehre vom Lichte, u. s. w. der Fall gewesen ist. Als ganz speciell auf den Zweck des Buchs Bezug habend erwähnen wir die Beschreibung und Abbildung einer eigenthümlichen Beschlagmaschine in §. 247. und Fig. 210. Der Vortrag ist uns überall deutlich und dem beabsichtigten Zwecke entsprechend erschienen, in Bezug auf welchen gewiss auch die vorausgeschickten allerdings nur höchst elementaren, logischen, arithmetischen und geometrischen Vorbereitungslehren ganz an ihrem Orte sind. Dass sich das Buch überhaupt nur in dem Kreise der ersten Elemente hält, braucht wohl

kaum noch besonders erinnert zu werden; jedenfalls aber ist es erfreulich zu sehen, wie sich die Anwendung der Naturlehre immer mehr und mehr in sehr verschiedenen Kreisen und nach sehr verschiedenen Richtungen hin geltend macht, und wie die hohe Wichtigkeit der Kenntniss der Hauptgesetze der Physik nach und nach immer allgemeiner erkannt wird. Das Buch kann, wie es uns scheint, auch landwirthschaftlichen Lehranstalten zur Beachtung empfohlen werden.

Lettres de L. Euler à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie, précédées de l'Eloge d'Euler par Condorcet et annotées par Cournot. 2 vols. 8. Paris. 1842. 4½ Thlr.

Jedenfalls ist es erfreulich zu sehen, wie alle Schriften des grossen Leonhard Euler auch jetzt immer noch fortwirken und neu herausgegeben werden.

The Hand-Book of Natural Phenomena, containing full Accounts of the following Natural Appearances: — Aurora Borealis, Changes in the Weather, Climates, Clouds, Comets, Dew, Earthquakes, Eclipses, Fixed Stars, Frost, Hail, Ice, Lakes, Lightning, Meteorites, Mirage, Moon, Mountains, Nebulae, Phosphorescence of the Sea, Planets, Rain, Rainbow, Refraction, Rivers, Seasons, Shooting, Stars, Snow, Springs, Summer Evening Lightning, Thunder, Twilight, Valleys, Volcanoes, Winds, etc. etc. 1842. 1 s.

Om fluiders rörelse; af A. F. Svanberg.

Ueber die Theorie des Lichtes. Nach einem lithographirten Memoire des Freiherrn Augustin Luis Cauchy frei bearbeitet von Franz Xaver Moth, k. k. Prof. am Lyceum zu Linz. Wien. 1842. 8. 1 Thlr.

Herr Prof. Moth hat sich durch die Uebersetzung des in Rede stehenden nur in sehr wenigen Exemplaren vorhandenen lithographirten Memoires von Cauchy jedenfalls ein besonderes Verdienst erworben, weil dasselbe bis jetzt gewiss vielen Mathematikern und Physikern ganz unbekannt geblieben ist. Dieses Memoire enthält eine kurze Darstellung der allgemeinen Gleichungen, welche die Grundlage zu allen Untersuchungen über die besondern Phänomene des Lichtes ausmachen, und giebt eine gedrängte Zusammenstellung der Methoden und Resultate, auf welche Cauchy in seinen Untersuchungen über die Theorie des Lichtes gekommen ist. Durch viele ganz zweckmässig gleich in den Text eingeschaltete Erläuterungen ist der Herr Uebersetzer den in der Analysis weniger Geübten sehr zu Hülfe gekommen, wozu auch insbesondere Abschnitt I. Ueber die Summen, welche durch Addition ähnlicher Functionen der Coordinaten der verschiedenen Punkte gebildet werden. Abschnitt II. Ueber die Flächen der zweiten Ordnung. Abschnitt III. Ueber die Bedingungen, welche sich auf die Gränzen eines Körpers oder eines Systems von Moleculen beziehen und der Anhang zum sechsten Abschnitte: Ueber den Gebrauch der symbolischen Formen in der Analysis, viel beitragen werden.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] VII. Mathematical notes.

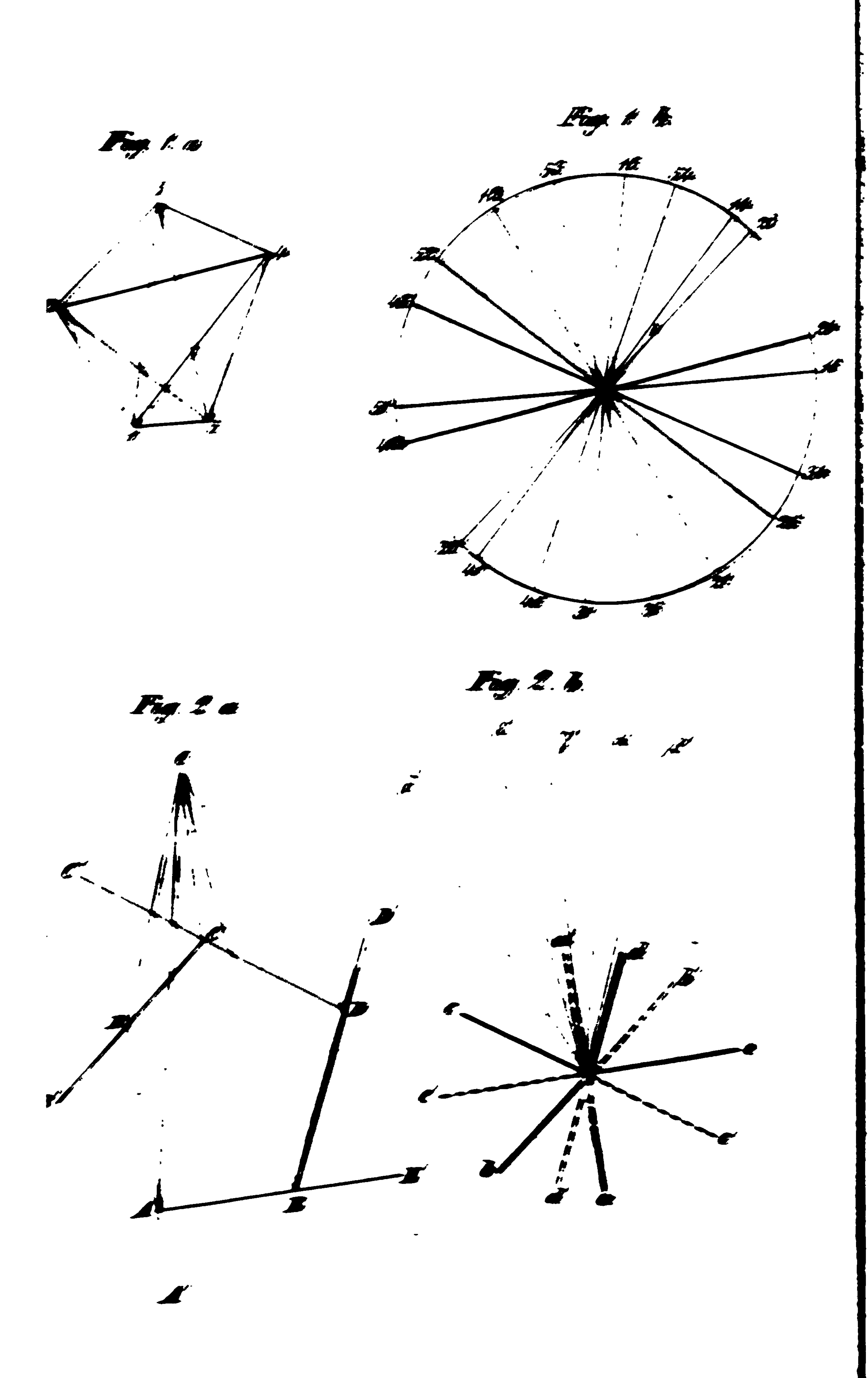
[illegible] 1852 [illegible] [illegible] [illegible] article [illegible] and [illegible] [illegible] [illegible]. I. Remarks on the [illegible] theorem. [illegible] correspondent. II. On the properties of a certain symbolical expression. By Arthur Cayley. III. On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connection with the mathematical theory of electricity. [illegible] correspondent. V. On the limits of Maclaurin's theorem. By [illegible] Crawford. VI. Solution of a problem in analytical Geometry. By [illegible] Booth. VII. Note on a class of factorials. By D. F. Gregory. VIII. Remarks on the distinction between algebraical and functional equations. By R. L. Ellis. IX. Mathematical notes.

Berichtigungen.

Literarischer Bericht. Nr. VII. S. 112. Z. 2. Statt „dritten" s. m. „ersten."

S. 112. Z. 22. Statt „zweiten" s. m. „dritten."

S. 112. Z. 24. Hinter „Coefficienten" schalte man die Worte „der höchsten Glieder" ein.


Fig. 1. a.
Fig. 1. b.
Fig. 2. a.
Fig. 2. b.

Taf. II.

I.

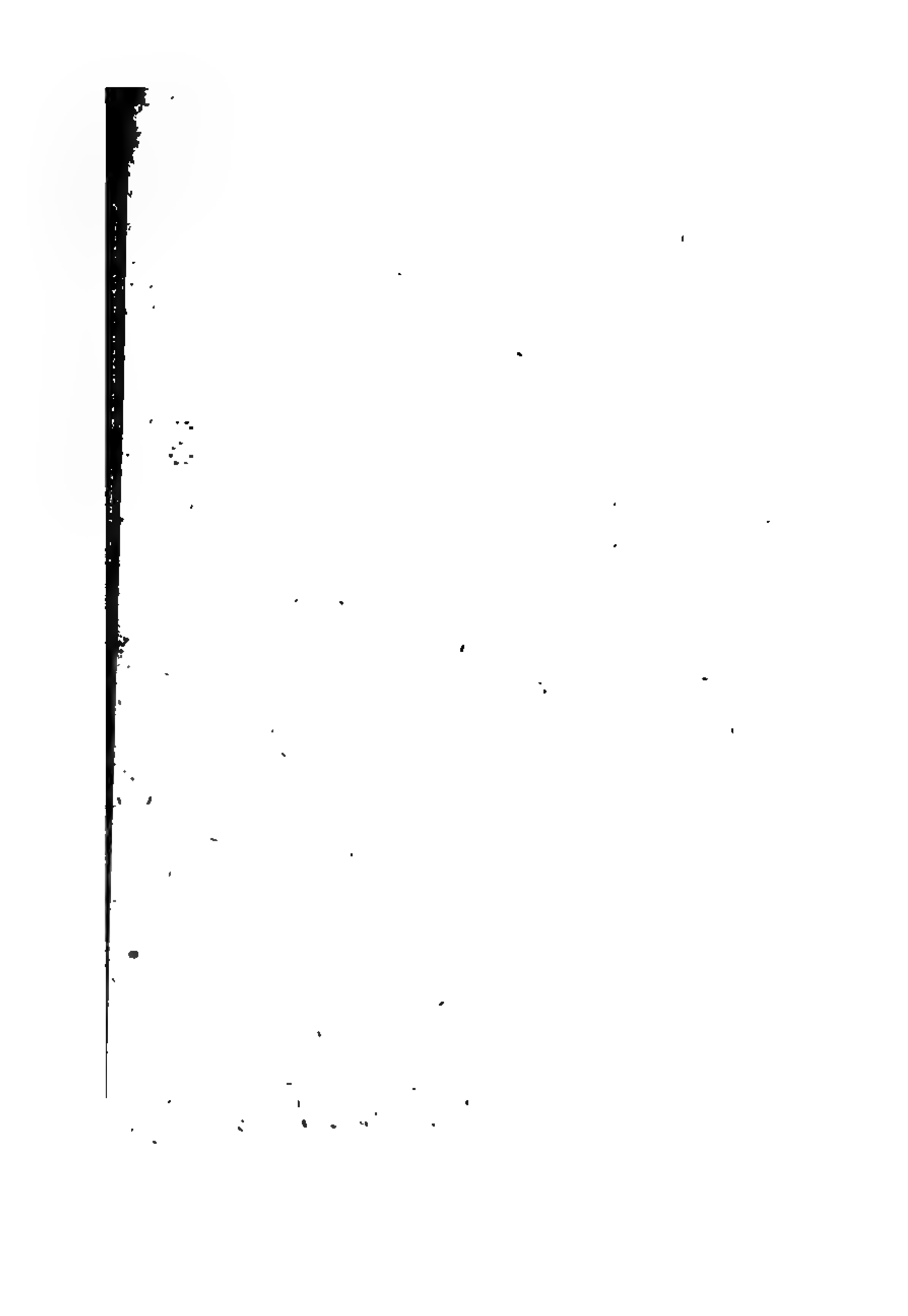
IV.

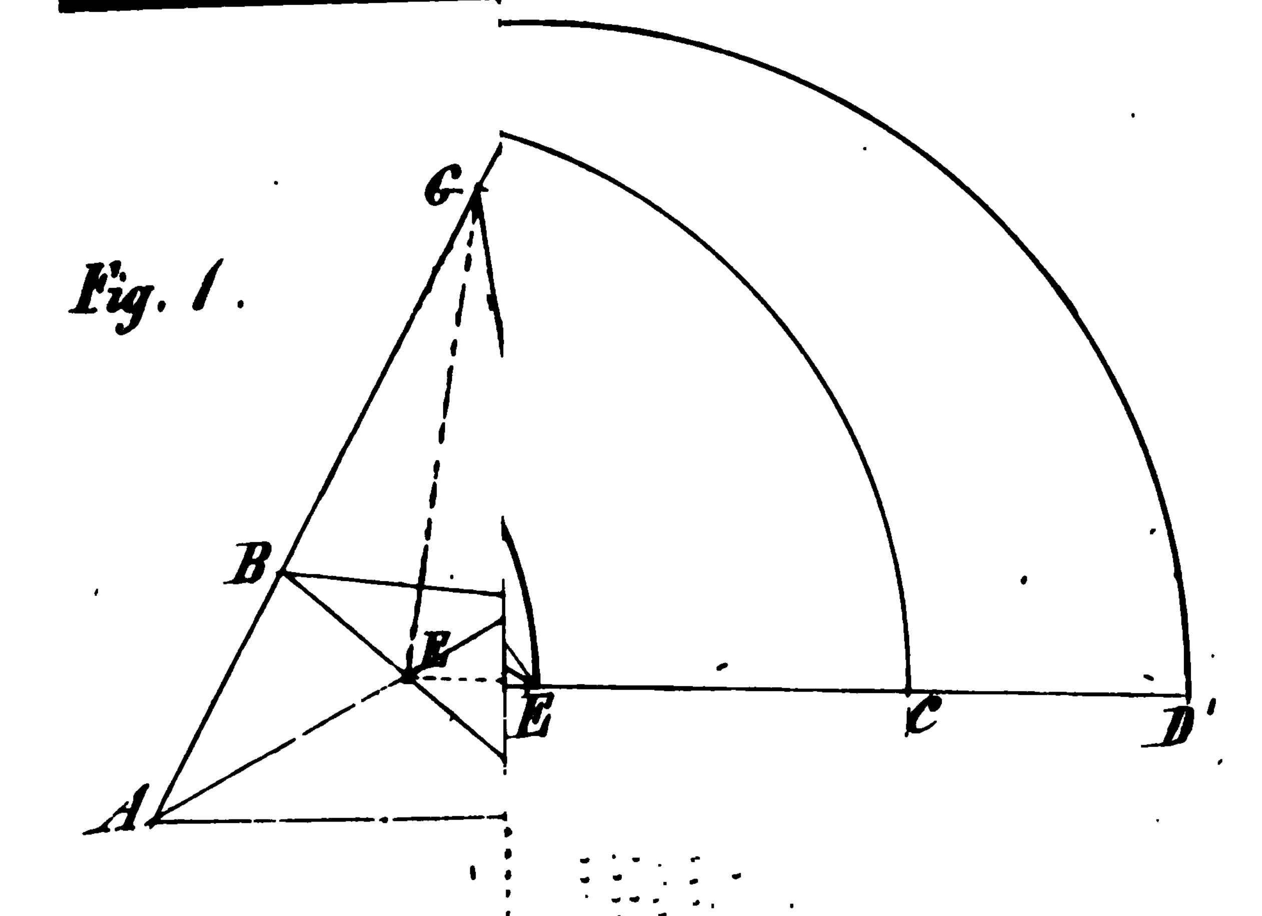
Fig. 2.

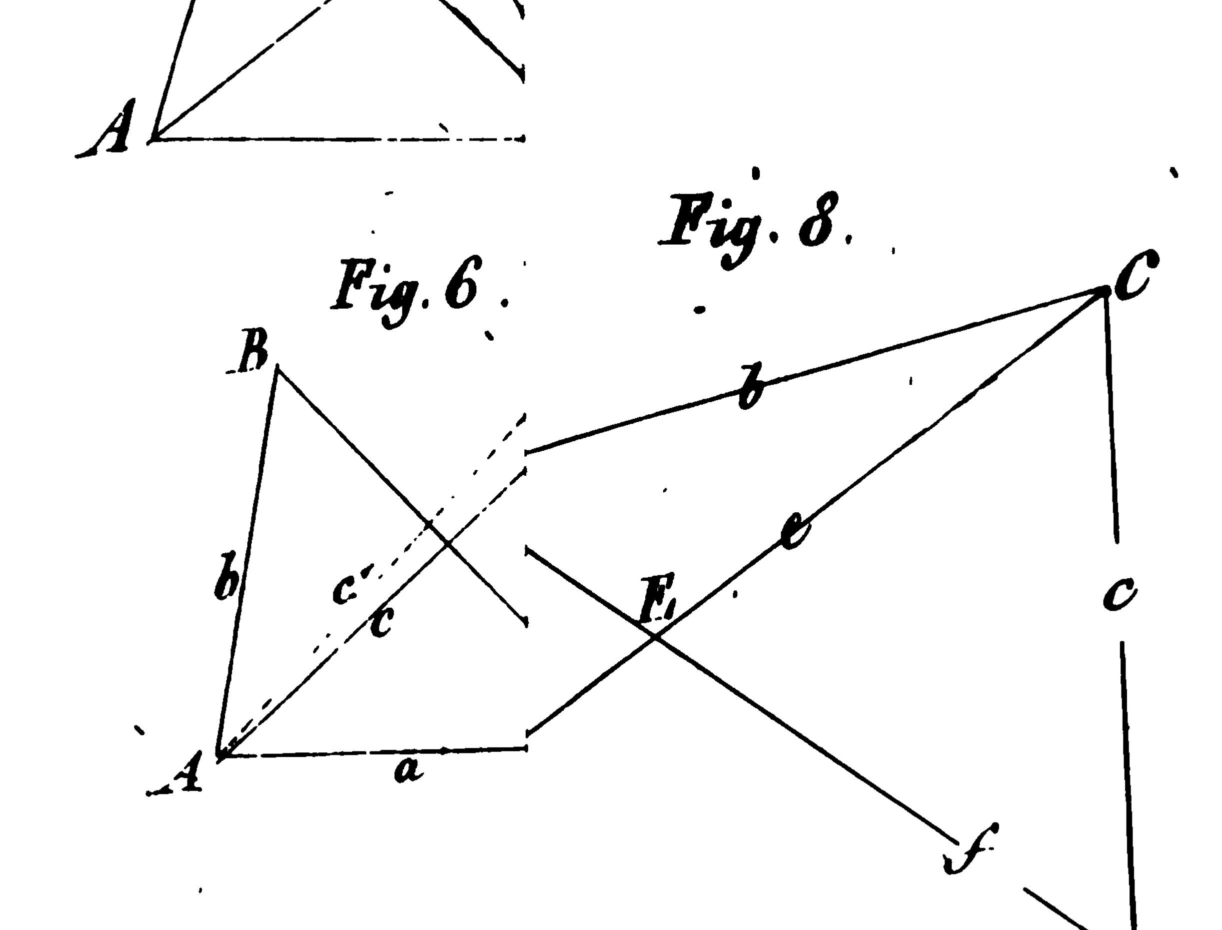
(d)

Fig. 6.

nert Archiv.




Fig. 1.
G
B
F
A
E
C
D


Fig. 3.
B
C
A
Fig. 6.
B
b
c
c
A
a
Fig. 8.
C
b
e
E
c
f
d
D

C'

